Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Отборочный этап. 7 класс

Задача 1 / 1. Электропоезд совершает регулярные рейсы из пункта А в пункт Б. Он должен был отправиться в 8:00 утра со станции в пункте А и прибыть в 10:00 утра на станцию в пункте Б. Но из-за технических неполадок поезд отправился с опозданием на 40 минут. Расстояние между станциями составляет 160 км. Чтобы прибыть на станцию Б вовремя, машинист решил увеличить скорость поезда. После прохождения половины пути, поезд был вынужден остановиться на 10 минут из-за необходимости технического обслуживания. После остановки, чтобы наверстать упущенное время, машинист увеличил скорость ещё раз. Определите на сколько машинисту пришлось увеличить скорость поезда на оставшемся участке пути после остановки, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя. Ответ дайте в км/ч и округлите до целых. Поезд мгновенно разгоняется до нужной скорости, мгновенно останавливается и на каждом участке пути движется равномерно. Влиянием силы трения и сопротивления воздуха можно пренебречь.

Возможное решение

Пусть до вынужденной остановки поезд двигался со скоростью v_1, а после — со скоростью v_2. Вследствие опоздания поезда на 40 минут, машинист должен был проехать весь путь за

$$120\,\text{мин} - 40\,\text{мин} = 80\,\text{мин}.$$

Тогда поезд двигался до остановки со скоростью

$$v_1 = \frac{160\,\text{км}}{80/60\,\text{ч}} = 120\,\text{км/ч}.$$

Поезд проехал первую половину пути за время $t_1 = 40$ мин $\left(t_1 = \dfrac{80\,\text{км}}{120\,\text{км/ч}} = 2/3\,\text{ч}\right)$. После вынужденной задержки на 10 мин поезд должен проехать оставшиеся 80 км за время $t_2 = 30$ мин. Из этого следует, что поезд должен был двигаться после остановки со скоростью

$$v_2 = \frac{80\,\text{км}}{30/60\,\text{ч}} = 160\,\text{км/ч}.$$

Таким образом, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, скорость поезда на оставшемся участке пути после вынужденной остановки была увеличена на

$$v_2 - v_1 = 40\,\text{км/ч}.$$

Ответ:

$$v_2 - v_1 = 40\,\text{км/ч}.$$

Задача 1 / 2. Электропоезд совершает регулярные рейсы из пункта А в пункт Б. Он должен был отправиться в 8:00 утра со станции в пункте А и прибыть в 10:00 утра на станцию в пункте Б. Но из-за технических неполадок поезд отправился с опозданием на 30 минут. Расстояние между станциями составляет 240 км. Чтобы прибыть на станцию Б вовремя, машинист решил увеличить скорость поезда. После прохождения половины пути, поезд был вынужден остановиться из-за необходимости технического обслуживания. После остановки, чтобы наверстать упущенное время, машинист увеличил скорость на оставшемся участке пути еще раз на 80 км/ч. Определите на сколько минут машинисту пришлось остановить поезд для технического обслуживания. Ответ дайте в минутах и округлите до целых. Поезд мгновенно разгоняется до нужной скорости, мгновенно останавливается и на каждом участке пути движется равномерно. Влиянием силы трения и сопротивления воздуха можно пренебречь.

Ответ:

$$\Delta t = 15\,\text{мин}.$$

Задача 2 / 1. Тело неизвестной формы массой 10 кг плавает в воде. Затем его привязывают веревкой ко дну ёмкости, в которой оно плавало. Сила натяжения каната, удерживающего тело, составляет $F = 50$ Н. Найдите плотность тела в кг/м^3 , ответ округлите до целых. Плотность воды 1000 кг/м^3, ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Возможное решение

Сумма сил, действующих на тело, привязанное ко дну емкости, равна нулю. Запишем условие равновесия:

$$\rho_{\text{воды}} \cdot V_{\text{тела}} \cdot g = m_{\text{тела}} \cdot g + F \quad \longrightarrow \quad V_{\text{тела}} = \frac{m_{\text{тела}} \cdot g + F}{\rho_{\text{воды}} \cdot g} = 0{,}015 \text{ м}^3.$$

Плотность тела легко найти из выражения:

$$\rho_{\text{тела}} = \frac{m_{\text{тела}}}{V_{\text{тела}}} = 666{,}6 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ:

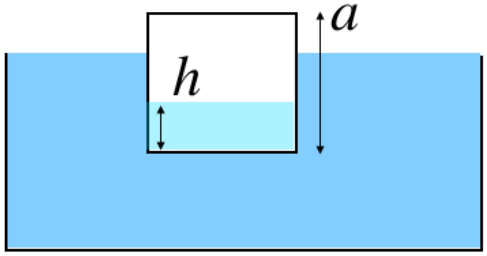
$$\rho_{\text{тела}} = 667 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 2 / 2. Тело неизвестной формы массой 15 кг плавает в воде. Затем его привязывают веревкой ко дну емкости, в которой оно плавало. Сила натяжения каната, удерживающего тело составляет $F = 100$ Н. Найдите плотность тела в кг/м^3 , ответ округлите до целых. Плотность воды 1000 кг/м^3, ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ:

$$\rho_{\text{тела}} = 600 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 3 / 1. Небольшая ёмкость, имеющая форму полого кубика без верхней грани, плавает в ванне с водой. До какого максимального уровня h емкость можно наполнить водой, чтобы она при этом не утонула? Пустая емкость погружена в воду на треть длины своей стороны. Уровень наполнения емкости отсчитывается от дна емкости. Длина стороны ёмкости $a = 12$ см. Толщиной стенок ёмкости пренебречь. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целых.



Возможное решение

Запишем закон Архимеда для случая погружения пустой емкости:

$$\frac{1}{3}\rho g a^3 = mg,$$

где ρ — плотность воды, m — масса пустой ёмкости. Емкость начнет тонуть, если погрузится в воду на полную длину своей стороны, так как при этом вода начнет заливаться в емкость. Запишем условие равновесия сил для максимально возможной глубины погружения емкости:

$$\rho g a^3 = mg + \rho g h a^2,$$

где $\rho g h a^2$ — сила тяжести, действующая на воду, налитую в емкость.

Подставляя значение mg из условия равновесия для пустой емкости, получим уравнение:

$$\rho g a^3 = \frac{1}{3}\rho g a^3 + \rho g h a^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{3}\rho g a^3 = \rho g h a^2.$$

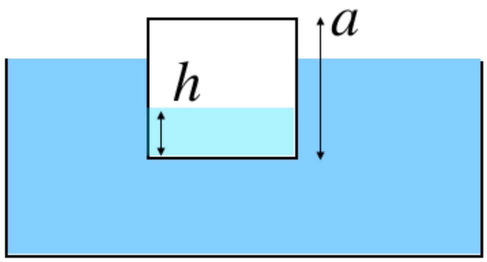
Таким образом, искомый уровень воды в емкости

$$h = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 12 \text{ см} = 8 \text{ см}.$$

Ответ:

$$h = 8 \text{ см}.$$

Задача 3 / 2. Небольшая емкость, имеющая форму полого кубика без верхней грани, плавает в ванне с водой. Максимальный уровень, на который емкость можно наполнить водой до того, как она утонет, составляет $h = 12$ см. Уровень наполнения ёмкости отсчитывается от дна емкости. Длина стороны емкости $a = 15$ см. На какую глубину пустая емкость погружена в воду до наполнения ее водой? Толщиной стенок ёмкости пренебречь. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целых.



Ответ:

$$b = 3 \text{ см}.$$

Задача 4 / 1. Необходимо поднять затонувший корабль. Для этого требуется сила $F = 7 \cdot 10^5$ Н. К кораблю крепятся металлические бочки. Затем из бочек выкачивается вода с помощью сжатого воздуха. Когда все бочки опустошены, корабль начинает подниматься. Каждая бочка имеет объем $V = 2{,}5$ м^3 и в пустом состоянии (или заполненном сжатым воздухом) имеет вес $F_0 = 2000$ Н. Плотность морской воды $\rho = 1020$ кг/м^3; $g = 10$ м/с^2. Сколько бочек необходимо прикрепить к кораблю?

Возможное решение

Подъемная сила одной бочки $F_{\text{подъем}}$ равна весу вытесненной ей воды и вычисляется по формуле:

$$F_{\text{подъем}} = \rho \cdot g \cdot V.$$

Пусть число бочек, необходимое для подъема корабля, равно N. Общая подъемная сила всех N бочек должна равняться необходимой силе для подъема корабля плюс суммарный вес всех бочек:

$$N \cdot \rho \cdot g \cdot V = F + N \cdot F_0.$$

Отсюда можно выразить число бочек N:

$$N = \frac{F}{\rho \cdot g \cdot V - F_0};$$

$$N = \frac{7 \cdot 10^5\,\text{Н}}{1020\,\text{кг/м}^3 \cdot 10\,\text{м/с}^2 \cdot 2{,}5\,\text{м}^3 - 2000\,\text{Н}} \approx 30.$$

Ответ:

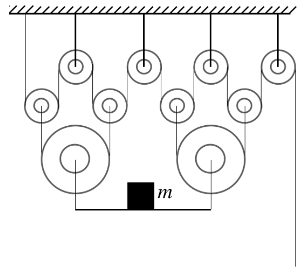
$$N \approx 30 \text{ бочек}.$$

Задача 4 / 2. Необходимо поднять затонувший корабль. Для этого требуется сила $F = 6 \cdot 10^5$ Н. К кораблю крепятся металлические бочки. Затем из бочек выкачивается вода с помощью сжатого воздуха. Когда все бочки опустошены, корабль начинает подниматься. Каждая бочка в пустом состоянии (или заполненном сжатым воздухом) имеет вес $F_0 = 1000$ Н. Для того, чтобы поднять корабль требуется $N = 45$ бочек. Плотность морской воды $\rho = 1020$ кг/м^3; $g = 10$ м/с^2. Какой объем имеет каждая бочка? Ответ выразите в м^3 и округлите до десятых.

Ответ:

$$V \approx 1{,}4 \text{ м}^3.$$

Задача 5 / 1. Рассмотрим систему блоков, изображенную на рисунке. В начальный момент времени свободный конец веревки удерживают в неподвижном положении. Затем свободный конец веревки опускают на $h = 16$ см вниз, сила натяжения остаётся прежней. На сколько поднимется груз? Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целых.



Возможное решение

В силу равномерной нагрузки на все верхние подвижные блоки сила натяжения веревки определяется следующим соотношением:

$$2nT = Mg,$$

где n – число верхних подвижных блоков, M – масса груза и всех подвижных блоков. Из условий задачи $n = 4$ (как видно из рисунка):

$$8T = Mg.$$

Так как простые механизмы не влияют на величину работы, выполняемую внешней силой, то:

$$FH = Th,$$

где H – искомый подъем груза, а $F = 8T$.

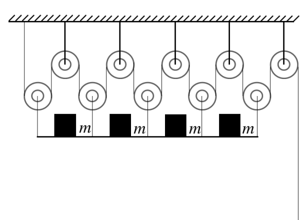
Тогда

$$H = \frac{1}{8}h = \frac{1}{8} \cdot 16 \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Ответ:

$$H = 2 \text{ см}.$$

Задача 5 / 2. Рассмотрим систему блоков, изображенную на рисунке. В начальный момент времени свободный конец веревки удерживают в неподвижном положении. Затем свободный конец веревки опускают на h см вниз, так что груз поднимается на $H = 3$ см, сила натяжения остаётся прежней. На сколько сантиметров опустили нижний конец веревки? Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целых.



Ответ:

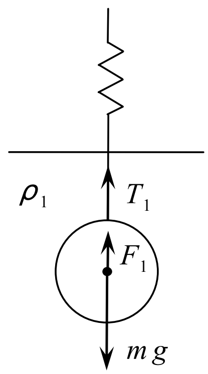
$$h = 30 \text{ см}.$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Отборочный этап. 8 класс

Задача 1 / 1. Однородный металлический шарик привязали ниткой к пружине динамометра и полностью погрузили сначала в воду, а затем в масло. В первом случае сила натяжения пружины оказалась равной $T_1 = 0{,}68$ Н, во втором случае — $T_2 = 0{,}69$ Н. Найдите плотность ρ металла, из которого изготовлен шарик. Ответ выразите в г/см^3. Плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность масла $\rho_2 = 0{,}9$ г/см^3.

Возможное решение



Обозначим через m массу шарика и через V его объём. Рассмотрим случай, когда шарик погружён в воду. На него действуют сила тяжести $m\,g$, сила натяжения T_1 и выталкивающая сила F_1. Запишем условие равновесия шарика:

$$T_1 + F_1 = m\,g\,.$$

Полагая здесь $F_1 = \rho_1 g\,V$ и $m = \rho\,V$, получаем:

$$T_1 = (\,\rho - \rho_1\,)\,g\,V\,.$$

Для случая, когда шарик погружён в масло, имеем аналогичное равенство:

$$T_2 = (\,\rho - \rho_2\,)\,g\,V\,.$$

Поделив эти уравнения друг на друга, находим плотность металла:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2}\,, \qquad \rho\,T_1 - \rho_2\,T_1 = \rho\,T_2 - \rho_1\,T_2\,,$$

$$\rho = \frac{\rho_1\,T_2 - \rho_2\,T_1}{T_2 - T_1} = 7{,}8 \text{ г/см}^3\,.$$

Получилась плотность стали.

Ответ:

$$\rho = \frac{\rho_1\,T_2 - \rho_2\,T_1}{T_2 - T_1} = 7{,}8 \text{ г/см}^3\,.$$

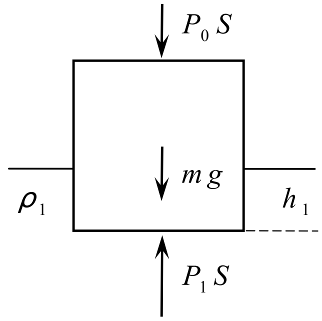
Задача 1 / 2. Однородный металлический шарик привязали ниткой к пружине динамометра и полностью погрузили сначала в воду, а затем в спирт. В первом случае сила натяжения пружины оказалась равной $T_1 = 0{,}34$ Н, во втором случае — $T_2 = 0{,}38$ Н. Найдите плотность ρ металла, из которого изготовлен шарик. Ответ выразите в г/см^3. Плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, плотность спирта $\rho_2 = 0{,}8$ г/см^3.

Ответ:

$$\rho = \frac{\rho_1\,T_2 - \rho_2\,T_1}{T_2 - T_1} = 2{,}7 \text{ г/см}^3\,.$$

Задача 2 / 1. В ртути плавает однородный латунный куб с длиной ребра $a = 10$ см. Поверх ртути наливают слой воды толщиной $L = 2{,}5$ см. Найдите разность $\Delta h = h_1 - h_2$, где h_1 и h_2 — значения глубины погружения куба в ртуть до и после доливания воды. Ответ выразите в миллиметрах и округлите до десятых. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6$ г/см^3, плотность латуни $\rho_2 = 8{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_3 = 1$ г/см^3.

Возможное решение



1. Рассмотрим сначала случай, когда куб плавает в ртути. Найдём глубину погружения h_1. Обозначим через P_0 атмосферное давление, через P_1 давление на уровне нижней грани куба и через m массу куба. На верхнюю и нижнюю грани куба действуют силы давления P_0S и P_1S, где S — площадь грани. Кроме того, на куб действует сила тяжести mg. Запишем условие равновесия куба:

$$P_1S = P_0S + mg\,.$$

Полагая $S = a^2$ и $m = \rho_2\, a^3$, получаем:

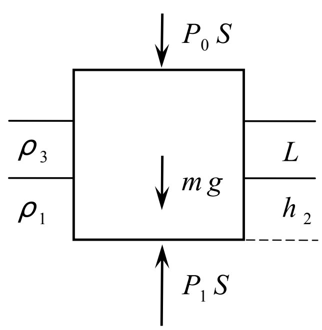
$$P_1\, a^2 = P_0\, a^2 + \rho_2\, g\, a^3 \quad\longrightarrow\quad P_1 - P_0 = \rho_2\, g\, a\,.$$

Разность давлений $(\,P_1 - P_0\,)$ равна гидростатическому давлению слоя ртути толщиной h_1:

$$P_1 - P_0 = \rho_1\, g\, h_1\,.$$

Получаем:

$$\rho_1\, g\, h_1 = \rho_2\, g\, a \quad\longrightarrow\quad h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\, a\,.$$



2. Рассмотрим следующий случай, когда поверх ртути налит слой воды, толщина L которого такова, что уровень воды не доходит до верхней грани куба. Найдём глубину погружения куба в ртуть h_2. Условие равновесия куба остаётся прежним:

$$P_1 - P_0 = \rho_2\, g\, a\,,$$

но теперь разность $(\,P_1 - P_0\,)$ равна сумме гидростатических давлений слоя воды толщиной L и слоя ртути толщиной h_2:

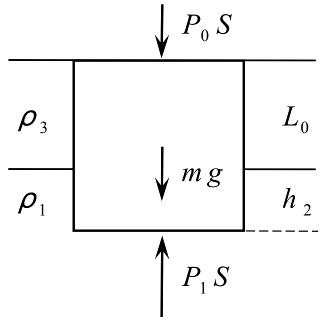
$$P_1 - P_0 = \rho_3\, g\, L + \rho_1\, g\, h_2\,.$$

Получаем:

$$\rho_3\, g\, L + \rho_1\, g\, h_2 = \rho_2\, g\, a \quad\longrightarrow\quad h_2 = \frac{\rho_2\, a - \rho_3\, L}{\rho_1}\,.$$

Как видно, h_2 уменьшается с ростом L. Полученный результат справедлив до тех пор, пока уровень налитой воды не сравняется с верхней гранью куба. Найдём толщину L_0 слоя воды в этом случае.

Воспользуемся равенством:

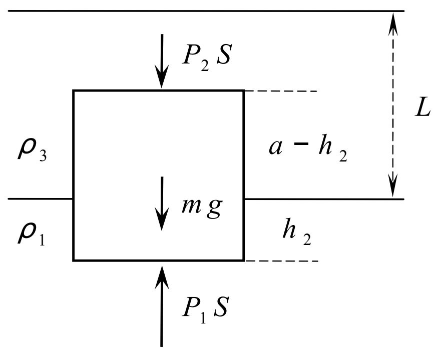


Полагая $L = L_0$ в найденном выше значении h_2, получаем:

$$\frac{\rho_2\, a - \rho_3\, L_0}{\rho_1} + L_0 = a\,, \qquad \rho_2\, a - \rho_3\, L_0 + \rho_1\, L_0 = \rho_1\, a \quad \longrightarrow \quad L_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_3}\, a\,.$$

Глубина h_2 в этом случае равна:

$$h_2 = a - L_0 = a - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_3}\, a = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3}\, a\,.$$



3. Рассмотрим последний случай, когда толщина слоя воды больше, чем L_0, и верхняя грань куба находится под водой. Обозначим через P_2 давление на уровне верхней грани. Оно больше, чем атмосферное давление P_0. Снова запишем условие равновесия куба:

$$P_1\, a^2 = P_2\, a^2 + \rho_2\, g\, a^3 \quad \longrightarrow \quad P_1 - P_2 = \rho_2\, g\, a\,.$$

Разность $(\,P_1 - P_2\,)$ равна равна сумме гидростатических давлений слоя воды толщиной $(\,a - h_2\,)$ и слоя ртути толщиной h_2:

$$P_1 - P_2 = \rho_3\, g\,(\,a - h_2\,) + \rho_1\, g\, h_2\,.$$

Получаем:

$$\rho_3\, g\,(\,a - h_2\,) + \rho_1\, g\, h_2 = \rho_2\, g\, a\,, \qquad \rho_3\, a - \rho_3\, h_2 + \rho_1\, h_2 = \rho_2\, a\,,$$

$$h_2 = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3}\, a\,.$$

Глубина погружения уже не зависит от толщины слоя воды L и совпадает со значением, полученным при $L = L_0$.

4. Подведём итог. Глубина погружения куба в ртуть зависит от соотношения между толщиной слоя воды L и параметром L_0:

$$L_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_3}\, a\,.$$

При $L < L_0$ уровень воды находится ниже верхней грани куба и глубина погружения равна:

$$h_2 = \frac{\rho_2\, a - \rho_3\, L}{\rho_1}\,.$$

С ростом L глубина погружения уменьшается и при $L = L_0$ достигает минимального значения. В этом случае уровень воды совпадает с верхней гранью куба. При дальнейшем увеличении L весь куб находится под водой и глубина погружение уже не меняется. Таким образом, при $L \geq L_0$

$$h_2 = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3}\, a\,.$$

5. Выясним, какой случай реализуется в предложенной задаче. Для этого вычислим L_0:

$$L_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_3}\, a = \frac{13{,}6 - 8{,}6}{13{,}6 - 1} \cdot 10 \text{ см} = 4{,}0 \text{ см}\,.$$

При $L = 2{,}5$ см реализуется неравенство $L < L_0$ и уровень воды находится ниже верхней грани куба. Значение глубины погружения куба в ртуть равно:

$$h_2 = \frac{\rho_2\, a - \rho_3\, L}{\rho_1}\,.$$

Разность глубин:

$$\Delta\, h = h_1 - h_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\, a - \frac{\rho_2\, a - \rho_3\, L}{\rho_1} = \frac{\rho_3\, L}{\rho_1} = 1{,}8 \text{ мм}\,.$$

Ответ:

$$\Delta\, h = \frac{\rho_3\, L}{\rho_1} = 1{,}8 \text{ мм}\,.$$

Задача 2 / 2. В ртути плавает однородный латунный куб с длиной ребра $a = 10$ см. Поверх ртути наливают слой воды толщиной $L = 5$ см. Найдите разность $\Delta\, h = h_1 - h_2$, где h_1 и h_2 — значения глубины погружения куба в ртуть до и после доливания воды. Ответ выразите в миллиметрах и округлите до десятых. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6$ г/см^3, плотность латуни $\rho_2 = 8{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_3 = 1$ г/см^3.

Ответ:

$$\Delta\, h = \frac{\rho_3\,(\,\rho_1 - \rho_2\,)\, a}{\rho_1\,(\,\rho_1 - \rho_3\,)} = 2{,}9 \text{ мм}\,.$$

Задача 3 / 1. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 1$ кг при температуре $t_1 = 0$ °С, положили кусок стали массой $m_2 = 0{,}2$ кг, нагретый до температуры $t_2 = 505$ °С. Часть воды выкипела, и в калориметре установилась температура $t_3 = 5$ °С. Найдите массу M выкипевшей воды. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °С), удельная теплоёмкость стали $C_2 = 0{,}46$ кДж/(кг °С), удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3$ МДж/кг, температура кипения воды $t_{\text{К}} = 100$ °С. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до целого значения.

Возможное решение

Кусок стали, охлаждаясь от температуры t_2 до температуры t_3, отдаёт количество теплоты

$$Q_0 = m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,)\,.$$

Мысленно разделим всю воду на две порции массами M и $(\, m_1 - M\,)$. Для того чтобы испарить массу воды M, её сначала нужно нагреть от начальной температуры t_1 до температуры кипения $t_{\text{К}}$. Необходимое для этого количество теплоты равно:

$$Q_1 = M\, C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_1\,)\,.$$

Для испарения воды при температуре кипения требуется количество теплоты

$$Q_2 = M\, L\,.$$

На нагревание массы воды $(\, m_1 - M\,)$ от начальной температуры t_1 до конечной температуры t_3 затрачивается количество теплоты

$$Q_3 = (\, m_1 - M\,)\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)\,.$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3\,.$$

Подставляя сюда выражения для количеств теплоты, получаем:

$$m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) = M\, C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_1\,) + M\, L + (\, m_1 - M\,)\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)\,,$$

$$m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) = M\, C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_1\,) + M\, L + m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,) - M\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)\,,$$

$$m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) - m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,) = M\, (\, C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_1\,) + L - C_1\, (\, t_3 - t_1\,)\,)\,,$$

$$m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) - m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,) = M\, (\, C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_3\,) + L\,)\,,$$

$$M = \frac{m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) - m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)}{C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_3\,) + L} = 9\ \text{г}\,.$$

Ответ:

$$M = \frac{m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) - m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)}{C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_3\,) + L} = 9\ \text{г}\,.$$

Задача 3 / 2. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 2$ кг при температуре $t_1 = 0$ °С, положили кусок алюминия массой $m_2 = 0{,}4$ кг, нагретый до температуры $t_2 = 510$ °С. Часть воды выкипела, и в калориметре установилась температура $t_3 = 10$ °С. Найдите массу M выкипевшей воды. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °С), удельная теплоёмкость алюминия $C_2 = 0{,}9$ кДж/(кг °С), удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3$ МДж/кг, температура кипения воды $t_{\text{К}} = 100$ °С. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до целого значения.

Ответ:

$$M = \frac{m_2\, C_2\, (\, t_2 - t_3\,) - m_1\, C_1\, (\, t_3 - t_1\,)}{C_1\, (\, t_{\text{К}} - t_3\,) + L} = 36\ \text{г}\,.$$

Задача 4 / 1. В калориметр, содержащий воду массой m_1 при температуре $t_1 = 10$ °C, положили кусок льда массой $m_2 = 0{,}5$ кг при температуре $t_2 = -20$ °C. После установления теплового равновесия в калориметре образовался лёд массой $M = 0{,}4$ кг. Найдите исходную массу воды m_1. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость льда $C_2 = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в килограммах и округлите до сотых.

Возможное решение

Тот факт, что масса льда уменьшилась, означает, что часть льда растаяла и в конечном состоянии в калориметре имеется смесь воды и льда при температуре 0 °C. Количество теплоты, которое выделилось при охлаждении воды от температуры t_1 до 0 °C, равно:

$$Q_1 = m_1\, C_1\, t_1\,.$$

Для нагревания всей массы льда от температуры t_2 до 0 °C необходимо затратить количество теплоты

$$Q_2 = m_2\, C_2\,(\,-t_2\,)\,.$$

Масса растаявшего льда равна $(\,m_2 - M\,)$. Для превращение этой массы льда в воду при 0 °C требуется количество теплоты

$$Q_3 = (\,m_2 - M\,)\,\lambda\,.$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3\,.$$

Подставляя сюда выражения для количеств теплоты, находим массу воды m_1:

$$m_1\, C_1\, t_1 = m_2\, C_2\,(\,-t_2\,) + (\,m_2 - M\,)\,\lambda\,,$$

$$m_1 = \frac{(\,m_2 - M\,)\,\lambda - m_2\, C_2\, t_2}{C_1\, t_1} = 1{,}29 \text{ кг}\,.$$

Ответ:

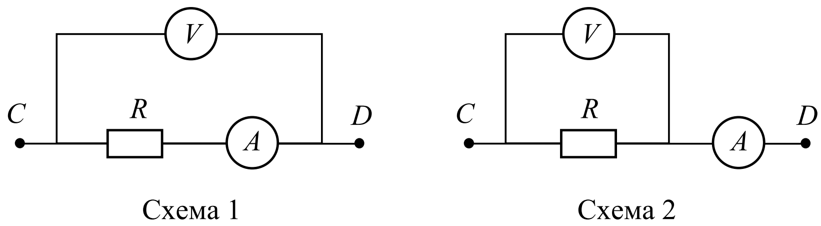
$$m_1 = \frac{(\,m_2 - M\,)\,\lambda - m_2\, C_2\, t_2}{C_1\, t_1} = 1{,}29 \text{ кг}\,.$$

Задача 4 / 2. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 0{,}4$ кг при температуре $t_1 = 25$ °C, положили кусок льда массой m_2 при температуре $t_2 = -55$ °C. После установления теплового равновесия в калориметре образовалась вода массой $M = 0{,}3$ кг. Найдите исходную массу льда m_2. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость льда $C_2 = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в килограммах и округлите до сотых.

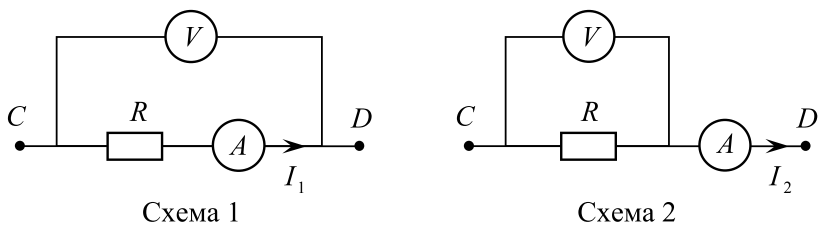
Ответ:

$$m_2 = \frac{(\,m_1 - M\,)\,\lambda + m_1\, C_1\, t_1}{C_2\,(\,-t_2\,)} = 0{,}65 \text{ кг}\,.$$

Задача 5 / 1. Вольтметр V, амперметр A и сопротивление R соединили двумя способами и подключили получившиеся схемы к одному и тому же источнику постоянного напряжения за точки C и D. В схеме 1 вольтметр показал напряжение $V_1 = 24$ В, а амперметр — силу тока $I_1 = 18$ мА. В схеме 2 показания приборов были $V_2 = 23$ В и $I_2 = 20$ мА. Найдите отношение $x = R_V/R$, где R_V — сопротивление вольтметра. Ответ округлите до десятых.



Возможное решение



Обозначим через R_A сопротивление амперметра. В первой схеме вольтметр показывает напряжение, поданное на точки C и D. В этом случае

$$V_1 = I_1\,(\,R + R_A\,)\,.$$

Во второй схеме напряжение V_1 равно сумме напряжений на сопротивлении R и на амперметре:

$$V_1 = V_2 + I_2\,R_A\,.$$

Из этих соотношений найдём сопротивления R и R_A:

$$R_A = \frac{V_1 - V_2}{I_2}\,,$$

$$R = \frac{V_1}{I_1} - R_A = \frac{V_1}{I_1} - \frac{V_1 - V_2}{I_2}\,.$$

Во второй схеме сопротивление R и вольтметр включены параллельно. Общее сопротивление этого соединения равно:

$$\frac{R\,R_V}{R + R_V} = \frac{x\,R}{x+1}\,,$$

$x = R_V/R$. Далее имеем:

$$V_2 = I_2 \cdot \frac{x\,R}{x+1}\,, \qquad \frac{V_2}{I_2} = \frac{x\,R}{x+1}\,, \qquad x \cdot \frac{V_2}{I_2} + \frac{V_2}{I_2} = x\,R\,, \qquad x\left(R - \frac{V_2}{I_2}\right) = \frac{V_2}{I_2}\,.$$

В последнем равенстве коэффициент при x равен:

$$R - \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_1}{I_1} - \frac{V_1 - V_2}{I_2} - \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_1}{I_1} - \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_1\,(\,I_2 - I_1\,)}{I_1\,I_2}\,.$$

Получаем:

$$x \cdot \frac{V_1\,(\,I_2 - I_1\,)}{I_1\,I_2} = \frac{V_2}{I_2} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{V_2\,I_1}{V_1\,(\,I_2 - I_1\,)} = 8{,}6\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{V_2\,I_1}{V_1\,(\,I_2 - I_1\,)} = 8{,}6\,.$$

Задача 5 / 2. Вольтметр V, амперметр A и сопротивление R соединили двумя способами и подключили получившиеся схемы к одному и тому же источнику постоянного напряжения за точки C и D. В схеме 1 вольтметр показал напряжение $V_1 = 18$ В, а амперметр — силу тока $I_1 = 30$ мА. В схеме 2 показания приборов были $V_2 = 17$ В и $I_2 = 33$ мА. Найдите отношение $x = R_V/R$, где R_V — сопротивление вольтметра. Ответ округлите до десятых.

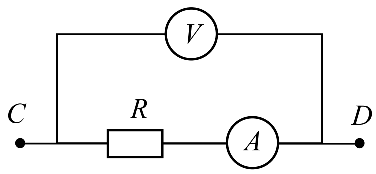


Схема 1

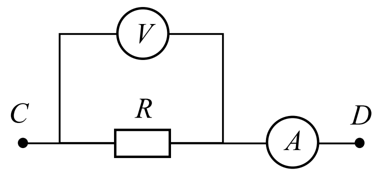


Схема 2

Ответ:

$$x = \frac{V_2\, I_1}{V_1\,(\,I_2 - I_1\,)} = 9{,}4\,.$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Отборочный этап. 9 класс

Задача 1 / 1. Автомобиль нарушителя, двигаясь по прямолинейному участку шоссе с постоянной скоростью $V = 90$ км/ч, проехал мимо стоявшей на обочине полицейской машины. Спустя время $\tau = 15$ с полиция начала преследовать нарушителя и, двигаясь равноускоренно, догнала его, пройдя расстояние $L = 1{,}7$ км. Найдите ускорение a, с которым двигалась полицейская машина. Ответ выразите в м/с^2 и округлите до десятых.

Возможное решение

Обозначим через t время, за которое полиция догнала нарушителя. За это время автомобиль нарушителя, двигаясь с постоянной скоростью V, прошёл расстояние L:

$$L = Vt \quad \longrightarrow \quad t = \frac{L}{V}\,.$$

Полицейская машина двигалась равноускоренно в течение времени $(t - \tau)$ и за это время также прошла расстояние L:

$$L = \frac{a\,(t-\tau)^2}{2}\,.$$

Подставляя сюда значение t, находим ускорение полицейской машины:

$$L = \frac{a}{2}\left(\frac{L}{V} - \tau\right)^2 = \frac{a\,(L - V\tau)^2}{2\,V^2} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{2\,V^2\,L}{(L - V\tau)^2} = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:

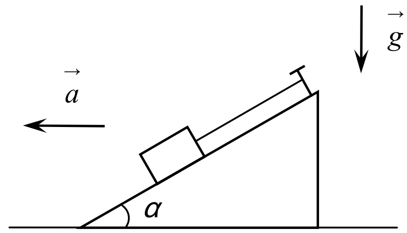
$$a = \frac{2\,V^2\,L}{(L - V\tau)^2} = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1 / 2. Автомобиль нарушителя, двигаясь по прямолинейному участку шоссе с постоянной скоростью $V_1 = 90$ км/ч, проехал мимо стоявшей на обочине полицейской машины. Спустя время $\tau = 10$ с полиция начала преследовать нарушителя и, двигаясь равноускоренно, догнала его, пройдя расстояние $L = 1{,}4$ км. Найдите скорость V_2 полицейской машины в момент, когда она догнала автомобиль нарушителя. Ответ выразите в км/ч и округлите до целого значения.

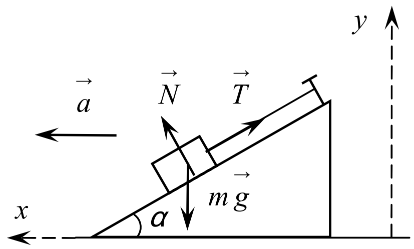
Ответ:

$$V_2 = \frac{2\,V_1\,L}{L - V_1\tau} = 219 \text{ км/ч}\,.$$

Задача 2 / 1. На гладкой наклонной грани клина, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, лежит брусок, прикреплённый к верхушке клина невесомой нитью, параллельной грани. Клин начинают разгонять с горизонтальным ускорением, абсолютная величина которого зависит от времени по закону $a = k\,t$, где $k = 0{,}9$ м/с^3. Найдите, через какое время τ брусок начнёт скользить по клину. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Рассмотрим движение бруска в неподвижной системе отсчёта, связанной с горизонтальной поверхностью, по которой движется клин. Запишем второй закон Ньютона для бруска, считая, что он неподвижен относительно клина:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}\,,$$

m — масса бруска, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции со стороны клина, $\vec{T}$ — сила натяжения нити. Направим ось x параллельно ускорению клина, а ось y вертикально вверх. В проекциях на эти оси получаем:

$$m\,a = N\,\sin\alpha - T\,\cos\alpha\,, \qquad 0 = -m\,g + N\,\cos\alpha + T\,\sin\alpha\,.$$

Из этих уравнений нетрудно найти силы T и N:

$$N = m\,(\,g\,\cos\alpha + a\,\sin\alpha\,)\,, \qquad T = m\,(\,g\,\sin\alpha - a\,\cos\alpha\,)\,.$$

Как видно, с ростом ускорения сила N увеличивается, а сила T уменьшается, в некоторый момент времени τ обращается в нуль и в дальнейшем становится отрицательной. Формально это означает, что при $t > \tau$ нить сжата, чего не может быть (нить может только растягиваться). Реально равенство $T = 0$ является условием начала скольжения бруска по клину. Отсюда находим время τ:

$$T = 0 \quad \longrightarrow \quad g\,\sin\alpha - k\,\tau\,\cos\alpha = 0\,,$$

$$\tau = \frac{g\,\operatorname{tg}\alpha}{k} = 6{,}4\text{ с}\,.$$

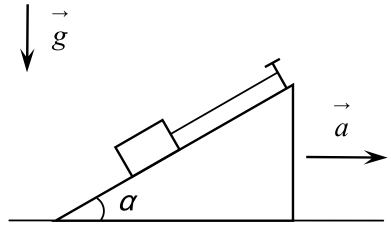
Ответ:

$$\tau = \frac{g\,\operatorname{tg}\alpha}{k} = 6{,}4\text{ с}\,.$$

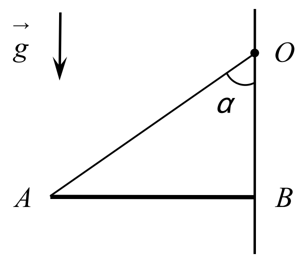
Задача 2 / 2. На гладкой наклонной грани клина, образующей с горизонтом угол $\alpha = 60°$, лежит брусок, прикреплённый к верхушке клина невесомой нитью, параллельной грани. Клин начинают разгонять с горизонтальным ускорением, абсолютная величина которого зависит от времени по закону $a = k\,t$, где $k = 1{,}2$ м/с^3. Найдите, через какое время τ сила давления бруска на клин обратится в нуль. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ:

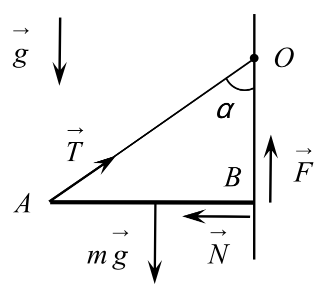
$$\tau = \frac{g\,\operatorname{ctg}\alpha}{k} = 4{,}8\text{ с}\,.$$



Задача 3 / 1. Тонкий однородный горизонтальный стержень AB упирается правым концом в вертикальную стенку. К левому концу стержня привязана невесомая нить, закреплённая на стенке в точке O. Угол между нитью и стенкой $\alpha = 60°$. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ между правым концом стержня и стенкой, при котором стержень будет оставаться в равновесии. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



На стержень действует сила тяжести, приложенная к середине стержня, и сила натяжения нити $\overrightarrow{T}$. Кроме того, со стороны стенки на правый конец стержня действует сила нормальной реакции $\overrightarrow{N}$ и сила трения покоя $\overrightarrow{F}$. Сила $\overrightarrow{N}$ направлена вдоль стержня, сила $\overrightarrow{F}$ — вдоль стенки к точке O (на рисунке векторы этих сил немного смещены). Обозначим через L длину стержня и через h длину отрезка OB:

$$L = AB\,, \quad h = OB = L \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Запишем условие равенства нулю алгебраической суммы моментов сил относительно точек O и A:

$$N\,h - m\,g\,\frac{L}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad N = \frac{m\,g}{2} \cdot \frac{L}{h} = \frac{m\,g}{2} \operatorname{tg}\alpha\,,$$

$$m\,g\,\frac{L}{2} - F\,L = 0 \quad \longrightarrow \quad F = \frac{m\,g}{2}\,.$$

Сила трения покоя удовлетворяет условию:

$$F \le \mu\,N\,.$$

Отсюда получаем значения коэффициента трения, при которых стержень будет оставаться в равновесии:

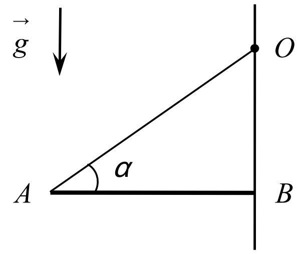
$$\frac{m\,g}{2} \le \mu\,\frac{m\,g}{2} \operatorname{tg}\alpha \quad \longrightarrow \quad \mu \ge \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Минимальное значение коэффициента трения равно:

$$\mu = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58\,.$$

Ответ:

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}$$



Задача 3 / 2. Тонкий однородный горизонтальный стержень AB упирается правым концом в вертикальную стенку. К левому концу стержня привязана невесомая нить, закреплённая на стенке в точке O. Коэффициент трения между правым концом стержня и стенкой $\mu = 0{,}25$. Найдите максимальное значение угла α между нитью и стержнем, при котором стержень будет оставаться в равновесии. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения.

Ответ:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\mu = 14^\circ\,.$$

Задача 4 / 1. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 1$ кг при температуре $t_1 = 20$ °C, положили кусок льда массой $m_2 = 0{,}4$ кг при температуре $t_2 = -50$ °C. Найдите массу M льда, образовавшегося в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость льда $C_2 = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в килограммах и округлите до сотых.

Возможное решение

Выясним, что будет находиться в калориметре после установления теплового равновесия. Охлаждаясь от температуры t_1 до 0 °C, вода может отдать количество теплоты

$$Q_1 = m_1 C_1 t_1 = 84 \text{ кДж}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_2 до 0 °C, равно:

$$Q_2 = m_2 C_2 (-t_2) = 42 \text{ кДж}.$$

Так как $Q_1 > Q_2$, лёд нагреется до 0 °C и начнёт таять. На таяние может пойти количество теплоты, равное разности $(Q_1 - Q_2) = 42$ кДж. Выясним, растает ли весь лёд. Для этого необходимо затратить количество теплоты

$$Q_3 = m_2 \lambda = 132 \text{ кДж}.$$

Эта величина больше, чем разность $(Q_1 - Q_2)$. Поэтому растает только часть льда. Таким образом, в конечном состоянии в калориметре образуется смесь воды и льда при температуре 0 °C. Найдём массу растаявшего льда m_3:

$$Q_1 - Q_2 = m_3 \lambda \quad \longrightarrow \quad m_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda}.$$

Масса льда, оставшегося в калориметре, равна:

$$M = m_2 - m_3 = m_2 - \frac{m_1 C_1 t_1 + m_2 C_2 t_2}{\lambda} = 0{,}27 \text{ кг}.$$

Ответ:

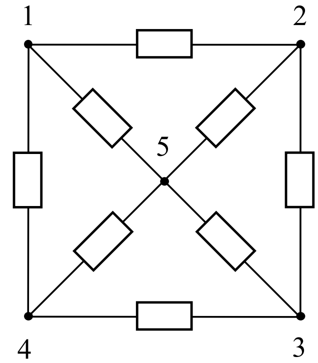
$$M = m_2 - \frac{m_1 C_1 t_1 + m_2 C_2 t_2}{\lambda} = 0{,}27 \text{ кг}.$$

Задача 4 / 2. В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 0{,}5$ кг при температуре $t_1 = 10$ °C, положили кусок льда массой $m_2 = 1$ кг при температуре $t_2 = -40$ °C. Найдите массу M воды, образовавшейся в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $C_1 = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость льда $C_2 = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в килограммах и округлите до сотых.

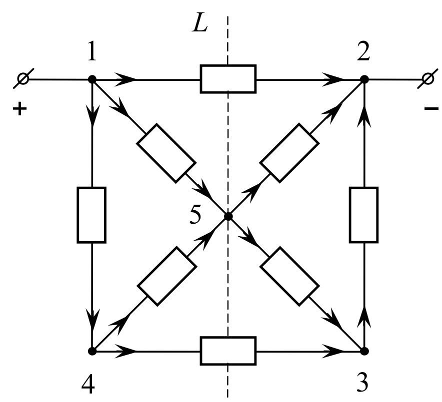
Ответ:

$$M = m_1 + \frac{m_1 C_1 t_1 + m_2 C_2 t_2}{\lambda} = 0{,}31 \text{ кг}.$$

Задача 5 / 1. Плоский каркас собран из восьми одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 5. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 1 и 2. Найдите отношение $x = I_{23}/I_{15}$, где I_{23} и I_{15} — силы токов, текущих на участках 2–3 и 1–5.



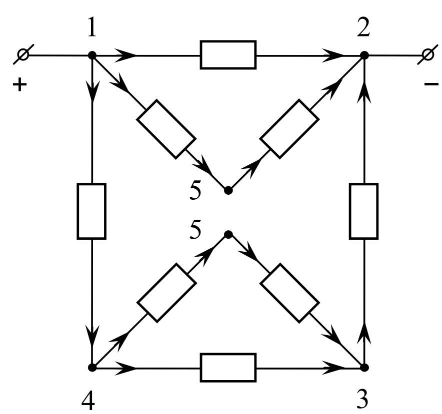
Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке 1, а отрицательный к точке 2. Рассматриваемая схема зеркально симметрична относительно прямой L, проходящей через точку 5. Поэтому распределение токов также зеркально симметрично. Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$I_{15} = I_{25}\,, \quad I_{45} = I_{35}\,.$$

Здесь нижние индексы указывают участки, по которым текут соответствующие токи. В силу этих равенств можно разъединить точку 5. В результате получаем упрощённую схему.



Обозначим через R каждое из исходных сопротивлений. В получившейся схеме треугольник 453 состоит из сопротивлений R и $2\,R$, соединённых параллельно. Общее сопротивление этого треугольника равно:

$$\frac{R \cdot 2\,R}{R + 2\,R} = \frac{2\,R}{3}\,.$$

Сопротивление участка 1–4–3–2 равно:

$$\frac{2\,R}{3} \quad 6 \quad \frac{8\,R}{3}$$

Для силы тока, текущего по участку 2–3, получаем:

$$I_{23} = \frac{V}{8\,R/3} = \frac{3\,V}{8\,R}\,,$$

V — напряжение, поданное на точки 1 и 2. Общее сопротивление участка 1–5–2 равно $2\,R$. Для силы тока, текущего по участку 1–5, имеем:

$$I_{15} = \frac{V}{2\,R}\,.$$

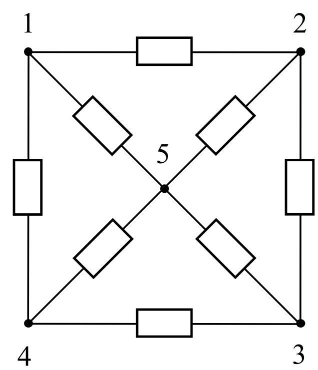
Отношение сил токов:

$$x = \frac{I_{23}}{I_{15}} = \frac{3\,V}{8\,R} \cdot \frac{2\,R}{V} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

Ответ:

$$x = 0{,}75\,.$$

Задача 5 / 2. Плоский каркас собран из восьми одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 5. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 1 и 2. Найдите отношение $x = I_{14}/I_{35}$, где I_{14} и I_{35} — силы токов, текущих на участках 1–4 и 3–5.



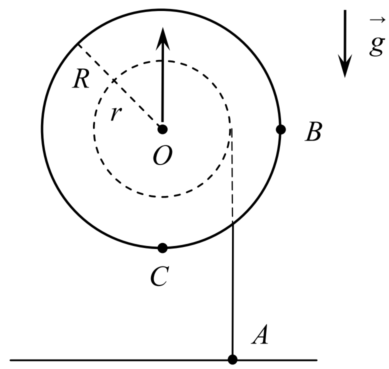
Ответ:

$$x = 3\,.$$

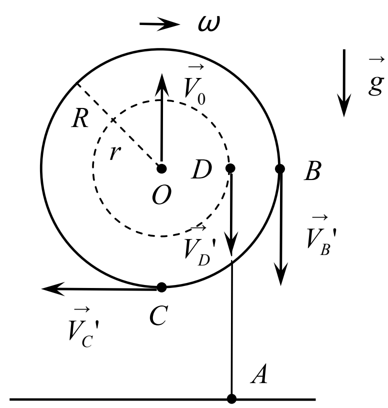
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Отборочный этап. 10 класс

Задача 1 / 1. Катушка, состоящая из внутреннего цилиндра радиуса $r = 16$ мм и боковых колёс радиуса $R = 31$ мм, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. На внутренний цилиндр намотана тонкая нерастяжимая лента, вертикальный конец которой закреплён на полу в точке A. Ось катушки поднимают вертикально вверх. Считая, что лента натянута и не скользит по катушке, найдите отношение $x = V_B/V_C$, где V_B и V_C — мгновенные скорости точек B и C, лежащих на концах горизонтального и вертикального диаметров одного из боковых колёс. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Обозначим через $\overrightarrow{V_0}$ мгновенную скорость точки O относительно пола и через ω мгновенноную угловую скорость вращения катушки вокруг этой точки. Найдём связь между V_0 и ω. Скорость всех точек вертикального участка ленты относительно пола равна нулю. В частности, это верно и для точки D, в которой этот участок касается внутреннего цилиндра катушки. Скорость точки D относительно пола равна:

$$\overrightarrow{V_D} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_D}\,',$$

где $\overrightarrow{V_D}\,'$ — линейная скорость точки D относительно точки O. Вектор $\overrightarrow{V_D}\,'$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{V_0}$ и по абсолютной величине равен $\omega\, r$. Из условия $\overrightarrow{V_D} = 0$ получаем:

$$V_0 = \omega\, r \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{V_0}{r}\,.$$

Рассмотрим теперь скорости точек B и C относительно пола:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_B}\,', \qquad \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_C}\,'.$$

Здесь $\overrightarrow{V_B}\,'$ и $\overrightarrow{V_C}\,'$ — линейные скорости рассматриваемых точек относительно точки O. По абсолютной величине они одинаковы:

$$V_B\,' = V_C\,' = \omega\, R = V_0\, \frac{R}{r}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{V_B}\,'$ направлен противоположно $\overrightarrow{V_0}$. Так как $V_B\,' > V_0$, вектор скорости $\overrightarrow{V_B}$ направлен вертикально вниз. Его абсолютная величина равна:

$$V_B = V_B{}' - V_0 = V_0 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = \frac{V_0\,(\,R - r\,)}{r}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{V_C}{}'$ перпендикулярен $\overrightarrow{V_0}$. Поэтому абсолютную величину скорости точки C находим по теореме Пифагора:

$$V_C = \sqrt{V_C{}'^{\,2} + V_0^{\,2}} = V_0 \sqrt{\left(\frac{R}{r} \right)^2 + 1} = \frac{V_0 \sqrt{R^{\,2} + r^{\,2}}}{r}\,.$$

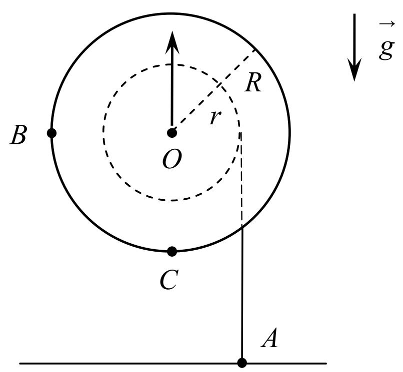
Отношение скоростей точек B и C равно:

$$x = \frac{V_B}{V_C} = \frac{R - r}{\sqrt{R^{\,2} + r^{\,2}}} = 0{,}43\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{R - r}{\sqrt{R^{\,2} + r^{\,2}}} = 0{,}43\,.$$

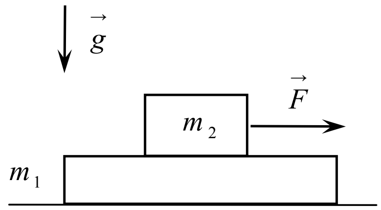
Задача 1 / 2. Катушка, состоящая из внутреннего цилиндра радиуса $r = 13$ мм и боковых колёс радиуса $R = 29$ мм, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. На внутренний цилиндр намотана тонкая нерастяжимая лента, вертикальный конец которой закреплён на полу в точке A. Ось катушки поднимают вертикально вверх. Считая, что лента натянута и не скользит по катушке, найдите отношение $x = V_B/V_C$, где V_B и V_C — мгновенные скорости точек B и C, лежащих на концах горизонтального и вертикального диаметров одного из „колёс“. Ответ округлите до десятых.



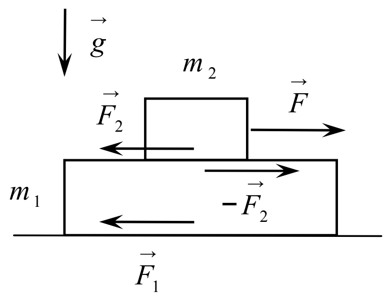
Ответ:

$$x = \frac{R + r}{\sqrt{R^{\,2} + r^{\,2}}} = 1{,}3\,.$$

Задача 2 / 1. На длинном горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1{,}5$ кг. Коэффициент трения между доской и столом $\mu_1 = 0{,}04$. На доске стоит брусок массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_2 = 0{,}3$. На брусок начинает действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F = k\,t$, где $k = 0{,}25$ Н/с. Найдите время τ, прошедшее от начала движения доски по столу до начала скольжения бруска по доске. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



На доску со стороны стола действует сила трения $\overrightarrow{F_1}$. На брусок со стороны доски действует сила трения $\overrightarrow{F_2}$. По третьему закону Ньютона брусок действует на доску силой $-\overrightarrow{F_2}$. Пока внешняя сила F мала, доска и брусок неподвижны и силы F_1 и F_2 являются силами трения покоя. В этом случае имеем равенства:

$$F_1 = F_2 = F\,.$$

Поскольку сила трения покоя не превосходит силу трения скольжения, максимальные значения сил F_1 и F_2 равны:

$$F_{1\,max} = \mu_1\,(m_1 + m_2)\,g = 0{,}8\text{ Н}\,,$$

$$F_{2\,max} = \mu_2\,m_2\,g = 1{,}5\text{ Н}\,.$$

При увеличении внешней силы F сначала будет достигнуто значение $F_{1\,max}$, то есть первой начнёт двигаться доска. Найдём момент времени t_1, когда это произойдёт:

$$F_{1\,max} = F\,, \quad \mu_1\,(m_1 + m_2)\,g = k\,t_1 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{\mu_1\,(m_1 + m_2)\,g}{k}\,.$$

При $t > t_1$ доска и брусок будут некоторое время двигаться как одно тело. Найдём ускорение этого движения:

$$(m_1 + m_2)\,a = F - \mu_1\,(m_1 + m_2)\,g \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu_1\,g\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m_2\,a = F - F_2\,.$$

Выразим отсюда F_2:

$$F_2 = F - m_2\,a = F - \frac{m_2\,F}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g = \frac{m_1\,F}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g\,.$$

С ростом F сила F_2 увеличивается и в некоторый момент времени t_2 достигает своего максимального значения $F_{2\,max}$. В этот момент брусок начинает скользить по доске. Найдём время t_2:

$$\mu_2\,m_2\,g = \frac{m_1\,k\,t_2}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g \quad \longrightarrow \quad t_2 = \frac{(m_1 + m_2)\,g}{m_1\,k}\cdot(\mu_2 - \mu_1)\,m_2\,.$$

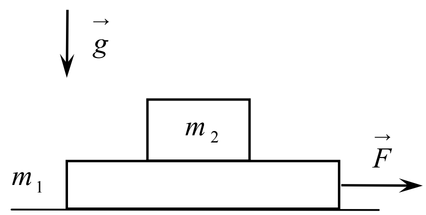
Искомое время τ равно:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{(m_1 + m_2)\,g}{k}\left(\frac{m_2\,(\mu_2 - \mu_1)}{m_1} - \mu_1\right) = 3{,}7\text{ с}\,.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2)\,g}{k}\left(\frac{m_2\,(\mu_2 - \mu_1)}{m_1} - \mu_1\right) = 3{,}7\ \text{с}\,.$$

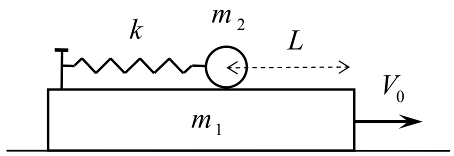
Задача 2 / 2. На длинном горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1{,}2$ кг. Коэффициент трения между доской и столом $\mu_1 = 0{,}15$. На доске стоит брусок массой $m_2 = 0{,}3$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_2 = 0{,}25$. На доску начинает действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F = k\,t^2$, где $k = 0{,}2$ Н/с^2. Найдите время τ, прошедшее от начала движения доски по столу до начала скольжения бруска по доске. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ:

$$\tau = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\,g}{k}}\,\left(\sqrt{\mu_1 + \mu_2} - \sqrt{\mu_1}\right) = 2{,}1\ \text{с}\,.$$

Задача 3 / 1. На гладком горизонтальном столе стоит брусок массой $m_1 = 0{,}4$ кг. В левый край бруска вбит гвоздь, к которому прикреплена невесомая горизонтальная пружина жёсткости $k = 20$ Н/м. Другой конец пружины прикреплён к шарику массой $m_2 = 0{,}1$ кг. Расстояние от центра шарика до правого края бруска $L = 5$ см. Коротким ударом бруску сообщают скорость V_0, направленную вдоль пружины вправо. Найдите максимальное значение этой скорости, при котором шарик не соскочит с бруска. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых. Считайте, что за время удара шарик не успел прийти в движение; трение не учитывайте.



Возможное решение

Максимальное значение V_0 соответствует случаю, когда на правом краю бруска скорость шарика относительно бруска обращается в нуль. При этом относительно стола шарик и брусок движутся с одной и той же скоростью V. По закону сохранения импульса

$$m_1 V_0 = (m_1 + m_2) V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}.$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} + \frac{k L^2}{2}, \qquad m_1 V_0^2 = (m_1 + m_2) V^2 + k L^2.$$

Подставляя сюда найденное значение V, находим V_0:

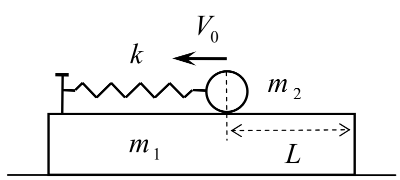
$$m_1 V_0^2 = (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2} \right)^2 + k L^2, \qquad m_1 V_0^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = k L^2,$$

$$\frac{m_1 m_2 V_0^2}{m_1 + m_2} = k L^2 \quad \longrightarrow \quad V_0 = L \sqrt{\frac{k (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Ответ:

$$V_0 = L \sqrt{\frac{k (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

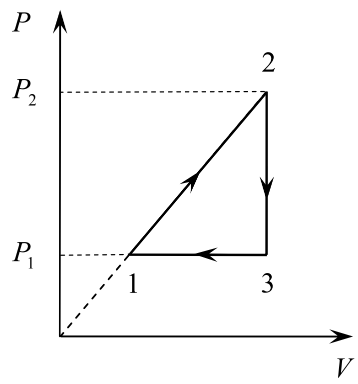
Задача 3 / 2. На гладком горизонтальном столе стоит брусок массой $m_1 = 0{,}25$ кг. В левый край бруска вбит гвоздь, к которому прикреплена невесомая горизонтальная пружина жёсткости $k = 10$ Н/м. Другой конец пружины прикреплён к шарику массой $m_2 = 0{,}05$ кг. Расстояние от центра шарика до правого края бруска $L = 4$ см. Коротким ударом шарику сообщают скорость V_0, направленную вдоль пружины влево. Найдите максимальное значение этой скорости, при котором шарик не соскочит с бруска. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых. Считайте, что за время удара брусок не успел прийти в движение; трение не учитывайте.



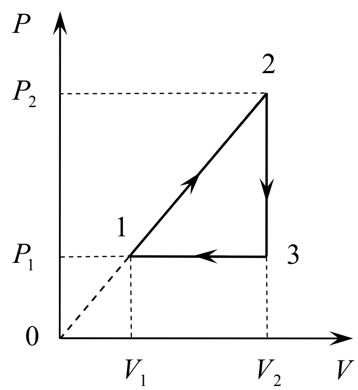
Ответ:

$$V_0 = L \sqrt{\frac{k (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}6 \text{ м/с}.$$

Задача 4 / 1. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — отрезок прямой, проходящей через начало координат на диаграмме P, V; 2–3 — изохорическое охлаждение, 3–1 — изобарическое сжатие. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Известно отношение давлений смеси в состояниях 2 и 1: $P_2/P_1 = 2$. КПД двигателя $\eta = 6{,}5$ %. Найдите отношение x числа молей гелия и азота: $x = \nu_1/\nu_2$. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Найдём связь объёмов и температур в состояниях 1 и 2. Из подобия треугольников $0\,1\,V_1$ и $0\,2\,V_2$ получаем:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} = 2 \quad \longrightarrow \quad V_2 = 2\,V_1\,.$$

Запишем уравнение состояния газовой смеси в точках 1 и 2:

$$P_1\,V_1 = \nu R\,T_1\,, \qquad P_2\,V_2 = \nu R\,T_2\,.$$

Здесь $\nu = \nu_1 + \nu_2$ — полное число молей смеси, R — универсальная газовая постоянная. Поделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = 4 \quad \longrightarrow \quad T_2 = 4\,T_1\,.$$

Работу газовой смеси за цикл вычислим как площадь треугольника $1\,2\,3$:

$$A = \frac{1}{2}\,(\,P_2 - P_1\,)\,(\,V_2 - V_1\,) = \frac{1}{2}\,P_1\,V_1 = \frac{1}{2}\,\nu R\,T_1\,.$$

Газовая смесь получает тепло на участке 1–2. Подведённое количество теплоты равно:

$$Q = \frac{3}{2}\,\nu_1 R\,(\,T_2 - T_1\,) + \frac{5}{2}\,\nu_2 R\,(\,T_2 - T_1\,) + A_{1\,2} = \frac{3}{2}\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,R\,T_1 + A_{1\,2}\,,$$

$A_{1\,2}$ — работа газовой смеси на участке 1–2. Вычислим эту работу как площадь трапеции $V_1\,1\,2\,V_2$:

$$A_{1\,2} = \frac{1}{2}\,(\,P_1 + P_2\,)\,(\,V_2 - V_1\,) = \frac{3}{2}\,P_1\,V_1 = \frac{3}{2}\,\nu R\,T_1\,.$$

Для подведённого количества теплоты получаем:

$$Q = \frac{3}{2}\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,R\,T_1 + \frac{3}{2}\,(\,\nu_1 + \nu_2\,)\,R\,T_1 = 3\,(\,2\,\nu_1 + 3\,\nu_2\,)\,R\,T_1\,.$$

КПД двигателя равен:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{6\,(\,2\,\nu_1 + 3\,\nu_2\,)} = \frac{x+1}{6\,(\,2x+3\,)}\,,$$

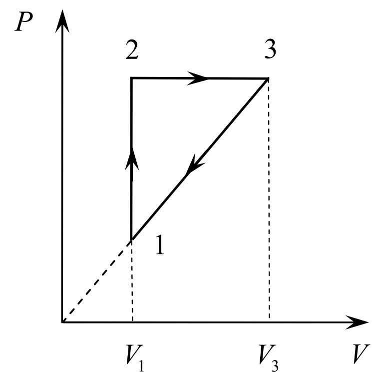
где $x = \nu_1/\nu_2$. Отсюда находим отношение числа молей:

$$12\,\eta\,x + 18\,\eta = x + 1 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{18\,\eta - 1}{1 - 12\,\eta} = 0{,}77\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{18\,\eta - 1}{1 - 12\,\eta} = 0{,}77\,.$$

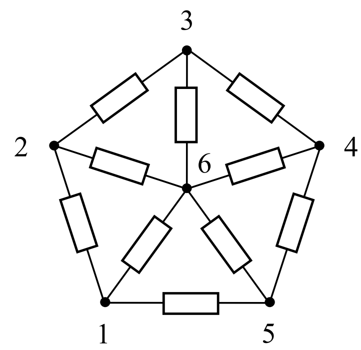
Задача 4 / 2. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — изохорическое нагревание, 2–3 — изобарическое расширение, 3–1 — отрезок прямой, проходящей через начало координат на диаграмме P, V. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Известно отношение объёмов смеси в состояниях 3 и 1: $V_3/V_1 = 2$. КПД двигателя $\eta = 7$ %. Найдите отношение x числа молей гелия и азота: $x = \nu_1/\nu_2$. Ответ округлите до десятых.



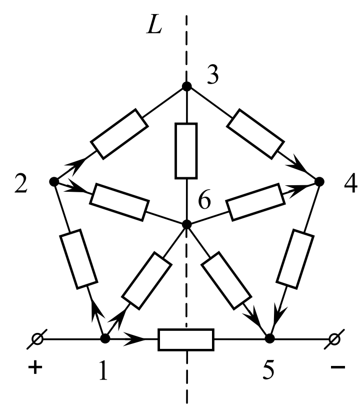
Ответ:

$$x = \frac{19\,\eta - 1}{1 - 13\,\eta} = 3{,}7\,.$$

Задача 5 / 1. Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 1 и 5. Найдите отношение $x = P_{45}/P_0$, где P_{45} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 4–5; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



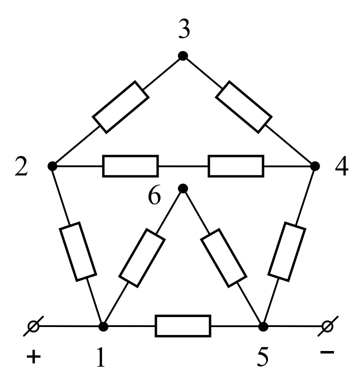
Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке 1, а отрицательный к точке 5. Рассматриваемая схема зеркально симметрична относительно прямой L, проходящей через точки 3 и 6. Поэтому распределение токов также зеркально симметрично. Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$I_{23} = I_{34}, \qquad I_{26} = I_{46}, \qquad I_{16} = I_{56}.$$

Здесь нижние индексы указывают участки, по которым текут соответствующие токи. В силу этих равенств ток на участке 3–6 равен нулю и этот участок можно убрать из схемы. Кроме того, можно разъединить точку 6. В результате получаем упрощённую схему.

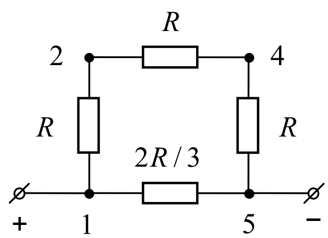


Обозначим через R каждое из исходных сопротивлений. В получившейся схеме верхний треугольник 234 состоит из двух сопротивлений $2\,R$, соединённых параллельно. Общее сопротивления этого треугольника равно:

$$\frac{2\,R\cdot 2\,R}{2\,R+2\,R}=R\,.$$

Нижний треугольник 156 состоит из сопротивлений R и $2\,R$, также соединённых параллельно. Его общее сопротивления равно:

$$\frac{R\cdot 2\,R}{R+2\,R}=\frac{2\,R}{3}\,.$$



Получаем совсем простую схему, с помощью которой находим общее сопротивление исходного каркаса:

$$R_0=\frac{3\,R\cdot(\,2\,R/3\,)}{3\,R+(\,2\,R/3\,)}=\frac{6\,R}{11}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе, равна:

$$P_0=\frac{V^{\,2}}{R_0}=\frac{11\,V^{\,2}}{6\,R}\,,$$

V — напряжение, поданное на точки 1 и 5. Сила тока, текущего по участку 4–5, равна:

$$I_{45}=\frac{V}{3\,R}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на этом участке:

$$P_{45}=I_{45}^{2}\,R=\frac{V^{\,2}}{9\,R}\,.$$

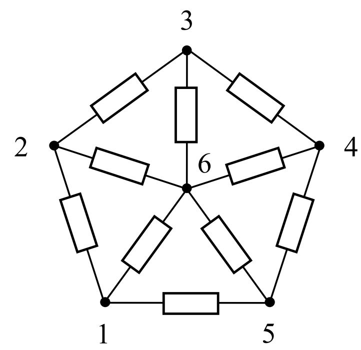
Отношение мощностей:

$$x=\frac{P_{45}}{P_0}=\frac{6}{9\cdot 11}=\frac{2}{33}=0{,}061\,.$$

Ответ:

$$x=\frac{2}{33}=0{,}061\,.$$

Задача 5 / 2. Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 2 и 4. Найдите отношение $x = P_{56}/P_0$, где P_{56} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 5–6; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



Ответ:

$$x = \frac{1}{88} = 0{,}011\,.$$

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Отборочный этап. 11 класс

Задача 1 / 1. Ядро N_1, движущееся с импульсом p_0, упруго сталкивается с неподвижным ядром N_2 и отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\vartheta = 30°$. Отношение масс ядер $n = m_1/m_2 = 4/3$. Найдите отношение $x = (p_1 - p_1')/p_0$, где p_1 и p_1' — возможные значения импульса отклонившегося ядра N_1, совместимые с законами сохранения импульса и энергии ($p_1 > p_1'$). Ответ округлите до сотых.

Возможное решение

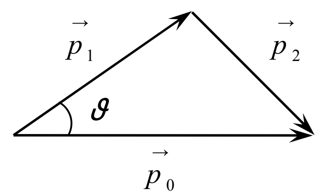
Запишем закон сохранения энергии для упругого столкновения:

$$\frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad \longrightarrow \quad p_0^2 = p_1^2 + n\,p_2^2\,,$$

p_1 и p_2 — модули конечных импульсов ядер N_1 и N_2. Исключим p_2, воспользовавшись законом сохранения импульса:

$$\vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2}\,.$$

Представим это равенство в виде треугольника с углом ϑ между векторами $\vec{p_0}$ и $\vec{p_1}$.



По теореме косинусов

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2\,p_0\,p_1\cos\vartheta\,.$$

Подставляя это выражение в уравнение баланса энергии, получаем квадратное уравнение для безразмерного отношения p_1/p_0:

$$p_0^2 = p_1^2 + n\,(p_0^2 + p_1^2 - 2\,p_0\,p_1\cos\vartheta)\,,$$

$$(n+1)\,p_1^2 - 2\,n\,p_0\,p_1\cos\vartheta + (n-1)\,p_0^2 = 0\,,$$

$$(n+1)\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - 2\,n\,\frac{p_1}{p_0}\cos\vartheta + (n-1) = 0\,.$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D = 4\,n^2\cos^2\vartheta - 4\,(n+1)\,(n-1) = 4\,(n^2\cos^2\vartheta - n^2 + 1) = 4\,(1 - n^2\sin^2\vartheta)\,.$$

Больший и меньший корни:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\,n\cos\vartheta + \sqrt{D}}{2\,(n+1)} = \frac{n\cos\vartheta + \sqrt{1-n^2\sin^2\vartheta}}{n+1}\,,$$

$$\frac{p_1'}{p_0} == \frac{n\cos\vartheta - \sqrt{1-n^2\sin^2\vartheta}}{n+1}\,.$$

Разность корней:

$$x = \frac{p_1 - p_1'}{p_0} = \frac{2}{n+1}\sqrt{1-n^2\sin^2\vartheta} = 0{,}64\,.$$

Ответ:

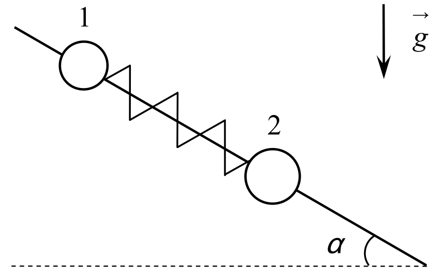
$$x = \frac{2}{n+1}\sqrt{1-n^2\sin^2\vartheta} = 0{,}64\,.$$

Задача 1 / 2. Ядро N_1, движущееся с кинетической энергией K_0, упруго сталкивается с неподвижным ядром N_2. Массы ядер удовлетворяют неравенству $m_1 > m_2$. В результате столкновения ядро N_1 отклоняется от направления своего первоначального движения на угол, при котором его кинетическая энергия K_1 может принимать единственное значение, совместимое с законами сохранения импульса и энергии: $K_1 = nK_0$, где $n = 1/6$. Найдите отношение масс ядер $x = m_1/m_2$.

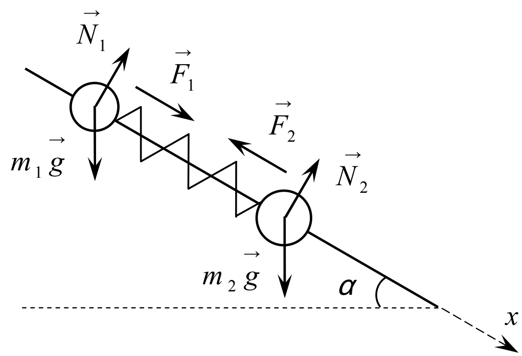
Ответ:

$$x = \frac{1+n}{1-n} = 1{,}4\,.$$

Задача 2 / 1. Длинный тонкий стержень закреплён под углом $\alpha = \arcsin(1/10)$ к горизонту. По стержню могут скользить без трения шарики 1 и 2, соединённые невесомой пружиной. Отношение масс шариков $n = m_2/m_1 = 4/3$. Сначала шарик 1 удерживают неподвижно, колебаний нет, удлинение пружины равно $x_0 = 5$ см. Затем шарик 1 отпускают без толчка и вся система начинает двигаться. Найдите, через какое время τ расстояние между шариками станет минимальным. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



Рассмотрим движение шариков в неподвижной системе отсчёта, связанной со стержнем. На шарики действуют силы тяжести, силы $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ нормальной реакции со стороны стержня и силы упругости $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ со стороны пружины. На рисунке силы упругости показаны для случая, когда пружина растянута. Направим ось x вдоль стержня вниз и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g \sin\alpha + F_{1x}, \qquad m_2 a_{2x} = m_2 g \sin\alpha + F_{2x},$$

a_{1x} и a_{2x} — проекции ускорений шариков на ось x, F_{1x} и F_{2x} — проекции сил упругости. Обозначим через x удлинение пружины и через k её жёсткость. Тогда

$$F_{1x} = kx, \qquad F_{2x} = -kx.$$

Например, если пружина растянута, то $x > 0$ и знаки проекций сил упругости соответствуют их направлениям, показанным на рисунке. Величина x определяет длину пружины и расстояние между центрами шариков. Поэтому рассмотрим движение шарика 2 относительно шарика 1. Ускорение $\vec{a}$ этого движения равно разности ускорений шариков относительно стержня:

$$\vec{a} = \vec{a_2} - \vec{a_1}.$$

В проекции на ось x:

$$a_x = a_{2x} - a_{1x}.$$

Выражая a_{1x} и a_{2x} из второго закона Ньютона, получаем:

$$a_{1x} = g \sin\alpha + \frac{F_{1x}}{m_1}, \qquad a_{2x} = g \sin\alpha + \frac{F_{2x}}{m_2},$$

$$a_x = \frac{F_{2x}}{m_2} - \frac{F_{1x}}{m_1} = -kx\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Введём величину μ, которая называется приведённой массой:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Тогда уравнение относительного движения шариков принимает вид:

$$a_x = -\frac{k}{\mu}\,x\,.$$

Получилось уравнение гармонических колебаний груза массы μ на пружине жёсткости k. Круговая частота колебаний равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,.$$

Поскольку начальная относительная скорость шариков равна нулю, зависимость удлинения пружины от времени определяется следующим выражением:

$$x = x_0\,\cos\omega t\,.$$

Искомое время τ соответствует минимальному значению x:

$$\cos\omega\tau = -1\,,\qquad \omega\tau = \pi\,,\qquad \tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,.$$

Выразим жёсткость пружины через x_0 из условия равновесия шарика 2 в начальный момент времени:

$$k\,x_0 = m_2\,g\,\sin\alpha \quad\longrightarrow\quad k = \frac{m_2\,g\,\sin\alpha}{x_0}\,.$$

Собирая всё вместе и вводя отношение масс $n = m_2/m_1$, получаем:

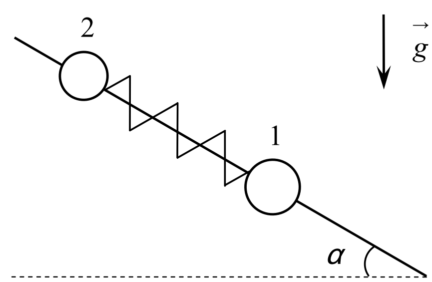
$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m_1\,m_2}{(m_1+m_2)}\cdot\frac{x_0}{m_2\,g\,\sin\alpha}} = \pi\sqrt{\frac{m_1\,x_0}{(m_1+m_2)\,g\,\sin\alpha}}\,,$$

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{x_0}{(n+1)\,g\,\sin\alpha}} = 0{,}46\ \text{с}\,.$$

Ответ:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{x_0}{(n+1)\,g\,\sin\alpha}} = 0{,}46\ \text{с}\,.$$

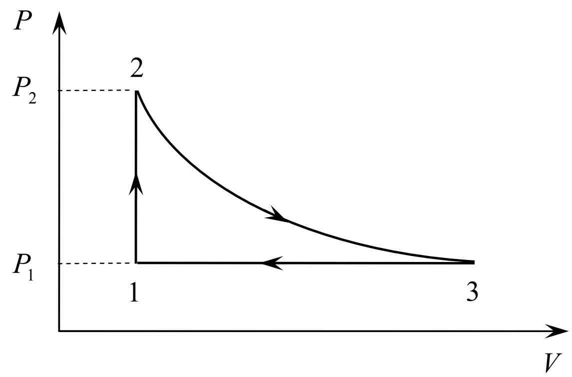
Задача 2 / 2. Длинный тонкий стержень закреплён под углом $\alpha = \arcsin(1/20)$ к горизонту. По стержню могут скользить без трения шарики 1 и 2, соединённые невесомой пружиной. Отношение масс шариков $n = m_2/m_1 = 3/5$. Сначала шарик 1 удерживают неподвижно, колебаний нет, сжатие пружины равно $x_0 = 2$ см. Затем шарик 1 отпускают без толчка и вся система начинает двигаться. Найдите, через какое время τ сжатие пружины обратится в нуль. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



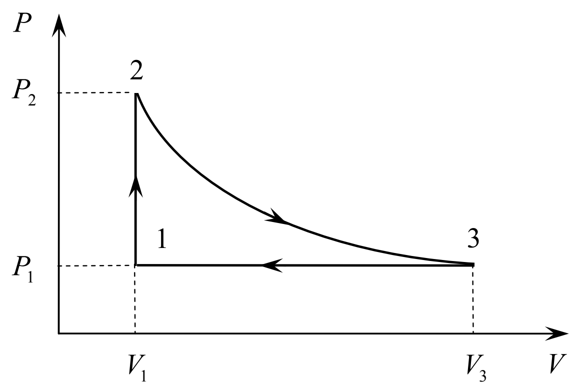
Ответ:

$$\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x_0}{(n+1)\,g\,\sin\alpha}} = 0{,}25\ \text{с}\,.$$

Задача 3 / 1. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — изохорическое нагревание, 2–3 — адиабатическое расширение, 3–1 — изобарическое сжатие. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Отношение числа молей $\alpha = \nu_1/\nu_2 = 1/5$. Известно также отношение давлений смеси в состояниях 2 и 1: $k = P_2/P_1 = 3$. Найдите КПД двигателя η. Ответ выразите в процентах и округлите до целого значения.



Возможное решение



Обозначим через ν полное число молей газовой смеси

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

и рассмотрим молярные теплоёмкости смеси C_V и C_P при постоянном объёме и давлении:

$$C_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{3}{2}\,R\,\nu_1 + \frac{5}{2}\,R\,\nu_2\right) = \frac{3\,\nu_1 + 5\,\nu_2}{2\,(\,\nu_1 + \nu_2\,)}\,R = \frac{3\,\alpha + 5}{2\,(\,\alpha + 1\,)}\,R\,,$$

$$C_P = C_V + R = \frac{5\,\alpha + 7}{2\,(\,\alpha + 1\,)}\,R\,.$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная, $\alpha = \nu_1/\nu_2$. Показатель адиабаты смеси равен:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5\,\alpha + 7}{3\,\alpha + 5}\,.$$

В рассматриваемом цикле газовая смесь получает тепло на участке 1–2:

$$Q_{12} = \nu\,C_V\,(\,T_2 - T_1\,) = \frac{C_V}{R}\,(\,\nu R\,T_2 - \nu R\,T_1\,) = \frac{C_V}{R}\,(\,P_2\,V_1 - P_1\,V_1\,) = \frac{C_V}{R}\,P_1\,V_1\,(\,k - 1\,)\,,$$

$k = P_2/P_1$. На участке 3–1 газовая смесь отдаёт тепло:

$$Q_{31} = \nu\,C_P\,(\,T_1 - T_3\,) = \frac{C_P}{R}\,(\,\nu R\,T_1 - \nu R\,T_3\,) = \frac{C_P}{R}\,(\,P_1\,V_1 - P_1\,V_3\,) = \frac{C_P}{R}\,P_1\,(\,V_1 - V_3\,)\,.$$

Выразим V_3 через V_1, воспользовавшись уравнением адиабаты:

$$P_2 V_1^{\gamma} = P_1 V_3^{\gamma} \quad \longrightarrow \quad V_3 = V_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/\gamma} = V_1 k^{1/\gamma}.$$

Получаем:

$$Q_{31} = -\frac{C_P}{R} P_1 V_1 (k^{1/\gamma} - 1).$$

Работа, совершённая двигателем за цикл, равна:

$$A = Q_{12} + Q_{31}.$$

КПД двигателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 - \frac{C_P (k^{1/\gamma} - 1)}{C_V (k - 1)} = 1 - \frac{\gamma (k^{1/\gamma} - 1)}{k - 1}.$$

Подстановка числовых значений даёт:

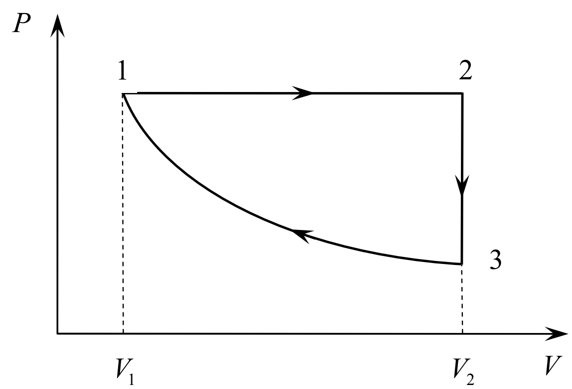
$$\gamma = \frac{10}{7}, \quad \eta = 17\,\%.$$

Ответ:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma (k^{1/\gamma} - 1)}{k - 1} = 17\,\%,$$

$$\gamma = \frac{5\alpha + 7}{3\alpha + 5} = \frac{10}{7}.$$

Задача 3 / 2. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — изобарическое расширение, 2–3 — изохорическое охлаждение, 3–1 — адиабатическое сжатие. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Отношение числа молей $\alpha = \nu_1/\nu_2 = 5/2$. Известно также отношение объёмов смеси в состояниях 2 и 1: $k = V_2/V_1 = 4$. Найдите КПД двигателя η. Ответ выразите в процентах и округлите до целого значения.

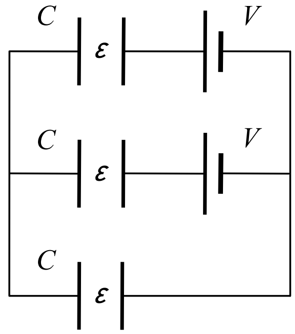


Ответ:

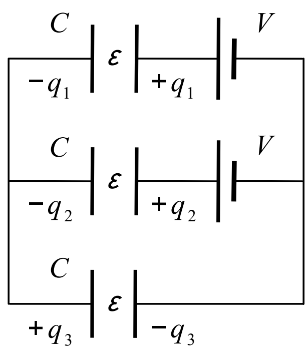
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma (k - 1)} \left(k - \frac{1}{k^{(\gamma - 1)}}\right) = 24\,\%,$$

$$\gamma = \frac{5\alpha + 7}{3\alpha + 5} = \frac{39}{25} = 1{,}56.$$

Задача 4 / 1. Всё пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено пластиной из диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5$. Ёмкость конденсатора с пластиной $C = 2$ мкФ. Из трёх таких конденсаторов и двух одинаковых батарей с ЭДС $V = 12$ В собрана схема, показанная на рисунке. Найдите минимальную работу A, необходимую для удаления пластины из нижнего конденсатора. Ответ выразите в микроджоулях. Силу тяжести и трение не учитывайте.



Возможное решение



Найдём начальные заряды конденсаторов q_1, q_2 и q_3. Левые обкладки, соединённые проводом, представляют собой изолированный проводник, заряд которого равен нулю. Поэтому

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0\,.$$

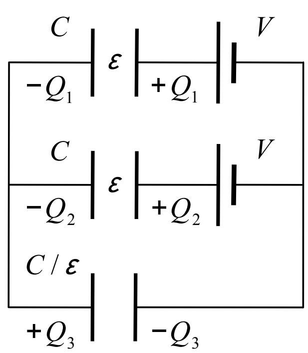
Приравнивая нулю алгебраическую сумму напряжений и ЭДС в верхнем и нижнем замкнутых контурах, получаем ещё два уравнения:

$$-\frac{q_1}{C} + V - V + \frac{q_2}{C} = 0 \quad\longrightarrow\quad q_1 = q_2\,,$$

$$-\frac{q_2}{C} + V - \frac{q_3}{C} = 0 \quad\longrightarrow\quad q_2 + q_3 = CV\,.$$

Решение этих уравнений даёт:

$$q_1 = q_2 = \frac{CV}{3}\,, \qquad q_3 = \frac{2CV}{3}\,.$$



Найдём теперь конечные заряды конденсаторов Q_1, Q_2 и Q_3. В этом случае ёмкость нижнего конденсатора без диэлектрической пластины равна C/ε. Имеем уравнения:

$$-Q_1 - Q_2 + Q_3 = 0\,,$$

$$-\frac{Q_1}{C} + V - V + \frac{Q_2}{C} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_1 = Q_2\,,$$

$$-\frac{Q_2}{C} + V - \frac{Q_3}{C/\varepsilon} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_2 + \varepsilon Q_3 = CV\,.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{CV}{2\varepsilon + 1}\,, \qquad Q_3 = \frac{2CV}{2\varepsilon + 1}\,.$$

Будем считать, что пластина выдвигается из нижнего конденсатора очень медленно. В этом случае искомая работа A внешних сил, действующих на пластину, будет минимальной, поскольку можно пренебречь кинетической энергией пластины и выделением тепла в цепи. Запишем уравнение баланса энергии для этого случая:

$$\Delta W = A + A_1 + A_2\,,$$

ΔW — приращение энергии конденсаторов, A_1 и A_2 — работы верхней и нижней батарей. Далее имеем:

$$\Delta W = W_2 - W_1\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсаторов:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + \frac{q_3^2}{2C} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{C^2V^2}{9} \cdot (1 + 1 + 4) = \frac{CV^2}{3}\,,$$

$$W_2 = \frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{2C} + \frac{Q_3^2}{2C/\varepsilon} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{C^2V^2}{(2\varepsilon+1)^2} \cdot (1 + 1 + 4\varepsilon) = \frac{CV^2}{2\varepsilon + 1}\,,$$

$$\Delta W = CV^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon + 1} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{2CV^2(\varepsilon - 1)}{3(2\varepsilon + 1)}\,.$$

Работа верхней батареи равна:

$$A_1 = (Q_1 - q_1)V = CV^2 \left(\frac{1}{2\varepsilon + 1} - \frac{1}{3} \right) = \Delta W\,.$$

В силу равенств $q_2 = q_1$ и $Q_2 = Q_1$ работа нижней батареи A_2 совпадает с A_1:

$$A_2 = (Q_2 - q_2)V = A_1 = \Delta W\,.$$

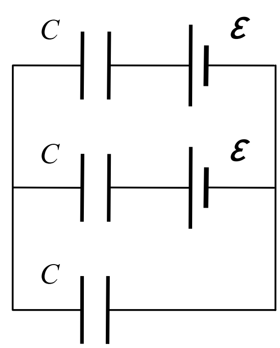
Для работы внешних сил получаем:

$$A = \Delta W - A_1 - A_2 = -\Delta W = \frac{2CV^2(\varepsilon - 1)}{3(2\varepsilon + 1)} = 48 \text{ мкДж}\,.$$

Ответ:

$$A = \frac{2CV^2(\varepsilon - 1)}{3(2\varepsilon + 1)} = 48 \text{ мкДж}\,.$$

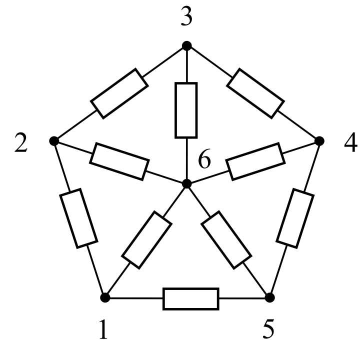
Задача 4 / 2. Из трёх одинаковых плоских воздушных конденсаторов емкостью $C = 0{,}25$ мкФ каждый и двух одинаковых батарей с ЭДС $\varepsilon = 24$ В собрана схема, показанная на рисунке. Найдите минимальную работу A, необходимую для увеличения расстояния между пластинами нижнего конденсатора в $k = 4$ раза. Ответ выразите в микроджоулях.



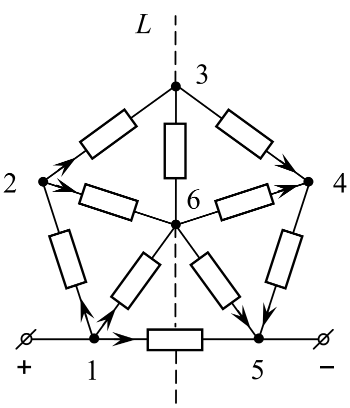
Ответ:

$$A = \frac{2C\varepsilon^2(k - 1)}{3(2k + 1)} = 32 \text{ мкДж}\,.$$

Задача 5 / 1. Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 1 и 5. Найдите отношение $x = P_{56}/P_0$, где P_{56} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 5–6; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



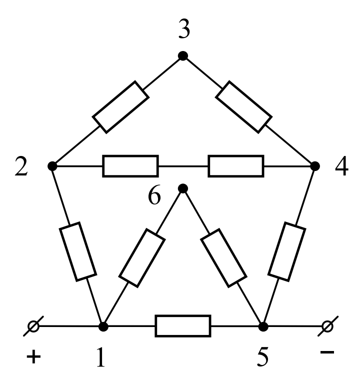
Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке 1, а отрицательный к точке 5. Рассматриваемая схема зеркально симметрична относительно прямой L, проходящей через точки 3 и 6. Поэтому распределение токов также зеркально симметрично. Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$I_{23} = I_{34}\,, \qquad I_{26} = I_{46}\,, \qquad I_{16} = I_{56}\,.$$

Здесь нижние индексы указывают участки, по которым текут соответствующие токи. В силу этих равенств ток на участке 3–6 равен нулю и этот участок можно убрать из схемы. Кроме того, можно разъединить точку 6. В результате получаем упрощённую схему.

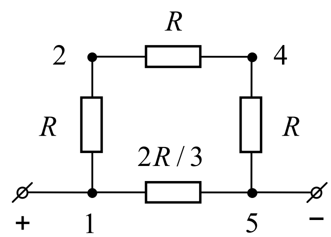


Обозначим через R каждое из исходных сопротивлений. В получившейся схеме верхний треугольник 234 состоит из двух сопротивлений $2\,R$, соединённых параллельно. Общее сопротивления этого треугольника равно:

$$\frac{2\,R\cdot 2\,R}{2\,R+2\,R}=R\,.$$

Нижний треугольник 156 состоит из сопротивлений R и $2\,R$, также соединённых параллельно. Его общее сопротивления равно:

$$\frac{R\cdot 2\,R}{R+2\,R}=\frac{2\,R}{3}\,.$$



Получаем совсем простую схему, с помощью которой находим общее сопротивление исходного каркаса:

$$R_0=\frac{3\,R\cdot(\,2\,R/3\,)}{3\,R+(\,2\,R/3\,)}=\frac{6\,R}{11}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе, равна:

$$P_0=\frac{V^{\,2}}{R_0}=\frac{11\,V^{\,2}}{6\,R}\,,$$

V — напряжение, поданное на точки 1 и 5. Сила тока, текущего по участку 5–6, равна:

$$I_{56}=\frac{V}{2\,R}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на этом участке:

$$P_{56}=I_{56}^2\,R=\frac{V^{\,2}}{4\,R}\,.$$

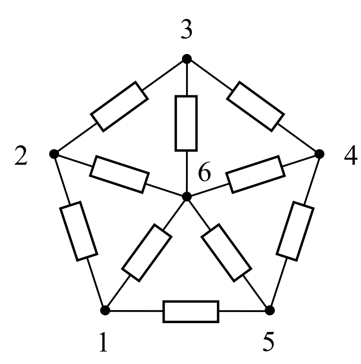
Отношение мощностей:

$$x=\frac{P_{56}}{P_0}=\frac{6}{4\cdot 11}=\frac{3}{22}=0{,}136\,.$$

Ответ:

$$x=\frac{3}{22}=0{,}136\,.$$

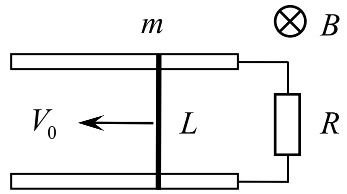
Задача 5 / 2 Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 2 и 4. Найдите отношение $x=P_{15}/P_0$, где P_{15} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 1–5; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



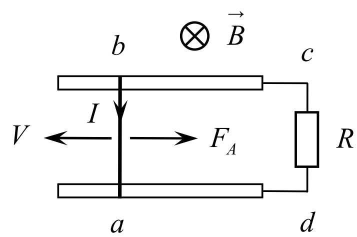
Ответ:

$$x=\frac{1}{22}=0{,}045\,.$$

Задача 6 / 1. Два длинных тонких металлических рельса расположены параллельно друг другу в горизонтальной плоскости и соединены через сопротивление $R = 5$ Ом. По рельсам может скользить без трения тонкий стержень массой $m = 10$ г и длиной $L = 50$ см. Вся система находится в вертикальном одородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}15$ Тл. Сначала стержень неподвижен и расположен перпендикулярно рельсам. Затем ему сообщают скорость $V_0 = 6$ см/с, направленную вдоль рельсов. Найдите расстояние x, пройденное стержнем к моменту, когда его скорость станет равна $V =$ 4 см/с. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до целого значения. Сопротивление рельсов и стержня не учитывайте.



Возможное решение



Направим единичный вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости замкнутого контура $abcd$ вдоль вектора магнитной индукции $\vec{B}$. Положительное направление обхода контура связано с направлением $\vec{n}$ правилом правого винта и соответствует движению по часовой стрелке. Пусть в некоторый момент времени скорость стержня равна V. За малый промежуток времени Δt стержень пройдёт расстояние $\Delta x = V\Delta t$. Приращение площади, ограниченной контуром, равно:

$$\Delta S = L\,\Delta x = L\,V\Delta t\,.$$

Приращение магнитного потока за время Δt:

$$\Delta \Phi = \vec{B}\,\vec{n}\,\Delta S = B\,L\,V\Delta t\,.$$

ЭДС индукции, возникающая в контуре, равна:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -B\,L\,V\,.$$

Знак минус означает, что ЭДС действует против положительного направления обхода контура, то есть против часовой стрелки. Поэтому ток в стержне направлен от точки b к точке a. Сила тока равна:

$$I = \frac{|\,\varepsilon\,|}{R} = \frac{B\,L\,V}{R}\,.$$

Со стороны магнитного поля на стержень с током действует сила Ампера, направленная противоположно скорости. Абсолютная величина этой силы равна:

$$F_A = B\,I\,L = \frac{(B\,L)^2\,V}{R}\,.$$

Обозначим через ΔV приращение скорости стержня за время Δt. Эта величина отрицательна, поскольку сила Ампера тормозит стержень. Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление скорости:

$$m\,\frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_A = -\frac{(B\,L)^2\,V}{R}\,.$$

Отсюда получаем связь между приращением скорости и расстоянием Δx, пройденным стержнем за время Δt:

$$\Delta V = -\frac{(B\,L)^2}{m\,R}\cdot V\Delta t = -\frac{(B\,L)^2}{m\,R}\cdot \Delta x\,.$$

Суммируя такие выражения по всем малым промежуткам времени, на которые можно разбить движение стержня, получаем:

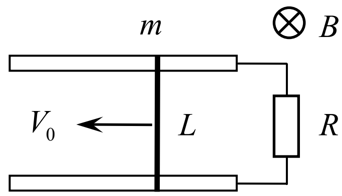
$$V - V_0 = -\frac{(BL)^2}{mR} \cdot x\,,$$

$$x = \frac{mR(V_0 - V)}{(BL)^2} = 18 \text{ см}\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{mR(V_0 - V)}{(BL)^2} = 18 \text{ см}\,.$$

Задача 6 / 2. Два длинных тонких металлических рельса расположены параллельно друг другу в горизонтальной плоскости и соединены через сопротивление $R = 5$ Ом. По рельсам может скользить без трения тонкий стержень массой $m = 15$ г и длиной $L = 60$ см. Вся система находится в вертикальном одородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Сначала стержень неподвижен и расположен перпендикулярно рельсам. Затем ему сообщают скорость $V_0 = 5$ см/с, направленную вдоль рельсов. Найдите скорость стержня V в момент, когда он пройдёт расстояние $x = 12$ см. Ответ выразите в см/с и округлите до десятых. Сопротивление рельсов и стержня не учитывайте.



Ответ:

$$V = V_0 - \frac{(BL)^2 x}{mR} = 2{,}7 \text{ см/с}\,.$$