Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Заключительный этап 6 апреля 7 класс

Задача 1. Даша опускает тело в форме кирпича с квадратным основанием в воду сначала одной квадратной гранью, затем другой. В обоих случаях кирпич плавает, и Даша делает отметку на кирпиче в том месте, где он соприкасается с водой. Оказалось, что расстояние между двумя отметками равно $h = 5\,\text{см}$. Считая, что каждый раз кирпич погружался в воду меньше, чем наполовину, рассчитайте длину наибольшего ребра L. Плотность тела однородна и равна $\rho = 400\,\text{кг/м}^3$, плотность воды $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$.

Возможное решение

1) Обозначим часть кирпича, непогруженную в воду через x. Тогда длина наибольшего ребра L выражается как $L = 2x + h$, откуда $x = \frac{L-h}{2}$.

2) Обозначим ребро квадратной грани кирпича через a и запишем уравнение баланса:

$$F_\text{Архимеда} = F_\text{тяжести},$$

$$x \cdot a^2 \cdot \rho_\text{в} \cdot g = L \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g,$$

$$L = \frac{h}{1 - 2 \cdot \rho/\rho_\text{в}} = 25\,\text{см}.$$

Ответ:

$$L = 25\,\text{см}.$$

Критерии

1. Верно получено выражение для части кирпича, которая погружена в воду. (+1 балл)
2. Верно записана сила Архимеда. (+1 балл)
3. Верно записана сила тяжести. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 2. Жители α-Центавра, Саша и Вова, наблюдают за движением космических судов в поясе астероидов в их звездной системе. Они заметили, что большинство космических поездов, пролетающих мимо определённого астероида в поясе, не совершают на нем посадку. Они предполагают, что это происходит из-за того, что астероид слишком мал и неудобен для посадки, так как максимальная длина его посадочной платформы составляет всего $l = 300$ м. Саша заметил, что один из космических поездов пролетает начало платформы за время $t_1 = 25$ с. В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время $t_2 = 42$ с. На сколько метров необходимо увеличить размер посадочной платформы, чтобы пролетающий поезд смог совершить на нём посадку? В ответе укажите минимальное целое число. Считать, что космические поезда движутся равномерно. Длину посадочной платформы астероида считать достаточной, если она больше или равна длине космического поезда.

Возможное решение

1) Обозначим скорость корабля за v. Время, за которое корабль преодолевает начало платформы равно t_1 по условию. Заметим, что в таком случае длина корабля x будет равна $x = vt_1$.

2) В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время $t_2 = 42$ с. Оно включает в себя прохождение кораблем начала платформы, и время, за которое конец корабля преодолеет всю платформу астероида. В таком случае

$$t_2 = t_1 + \frac{l}{v} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{l}{t_2 - t_1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{t_2 - t_1} t_1.$$

3) Тогда для совершения посадки на астероиде размер посадочной платформы необходимо увеличить на величину

$$\Delta l = x - l = \frac{l \cdot t_1}{t_2 - t_1} - l = 141{,}2\,\text{м}.$$

А минимальное целое число составит $\Delta l = 142$ м.

Ответ:

$$\Delta l = 142\,\text{м}.$$

Критерии

1. Верно получено время, требуемое для прохождения всей посадочной платформы астероида. (+2 балла)
2. Верно получена скорость космического поезда. (+1 балл)
3. Верно получен нужный размер посадочной платформы на астероиде. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Задача 3. На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами m и M закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение $\frac{m}{M}$, если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы m.

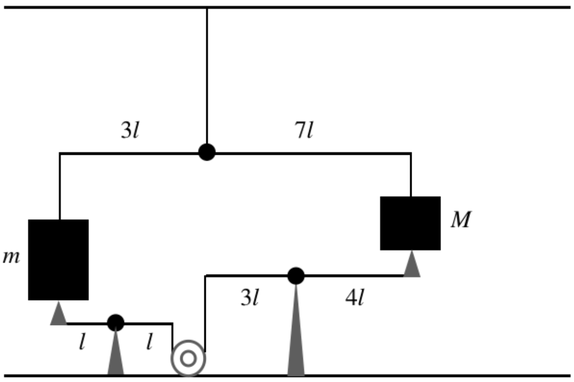


Рис. к задаче 3

Возможное решение

1) Обозначим силы, действующие на левое и правое плечи большого рычага как T_1 и T_2 соответственно. Из условия равновесия для большого рычага получаем:

$$T_1 \cdot 3l = T_2 \cdot 7l,$$

$$T_2 = \frac{3}{7}T_1.$$

По условию $T_1 = \dfrac{mg}{2}$, откуда

$$T_2 = \frac{3}{14}mg.$$

2) Запишем условия равновесия для малых рычагов, обозначив силу натяжения внутренней нити между плечами малых рычагов за T_3:

$$(mg - T_1) \cdot l = T_3 \cdot l \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{2} \cdot l = T_3 \cdot l,$$

$$(Mg - T_2) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l \quad \Rightarrow \quad (Mg - \frac{3}{14}mg) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l.$$

Откуда получаем:

$$\frac{1}{2}mg = \frac{4}{3}Mg - \frac{4}{14}mg,$$

$$\frac{11}{14}mg = \frac{4}{3}Mg,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

Ответ:

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия верхнего рычага. (+1 балла)
2. Верно записаны условия равновесия нижних рычагов. (+2 балла)
3. Получено уравнение, связывающее массы m и M. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 4. При заваривании чая чаинки, помещённые в воду, сначала плавают на поверхности воды, а затем медленно опускаются на дно чайника. Это связано с изменением массы и объёма чаинок при контакте с водой. Сразу после попадания в чайник чаинки погружены в воду на 70% своего объёма. Через некоторое время масса чаинок увеличивается на 50%. При каком максимально возможном увеличении своего объёма чаинки начнут опускаться на дно? Ответ дайте в процентах от исходного значения объёма чаинок.

Возможное решение

1) Запишем равенство сил в начальный момент времени при условии, что чаинки плавают на поверхности:

$$0{,}7\,\rho_{в} V_0\, g = m_0\, g,$$

где m_0 и V_0 – начальные масса и объем чаинок.

2) Чаинки начинают тонуть, когда выполнено условие

$$\rho_{в} V_1\, g \leq 1{,}5\, m_0\, g,$$

где V_1 – новое значение объема чаинок. Из первого условия получаем:

$$\rho_{в} V_1 g \leq 1{,}5 \cdot 0{,}7\,\rho_{в} V_0\, g,$$

$$V_1 \leq 1{,}5 \cdot 0{,}7\, V_0 = 1{,}05\, V_0.$$

Таким образом, максимально возможное увеличение объема чаинки составляет 5%.

Ответ:

5%.

Критерии

1. Верно записано условие плавания чаинок. (+1 балла)
2. Верно записано условие на максимальный объем чаинок, при котором они погружаются на дно. (+2 балла)
3. Получена связь максимально возможного объема чаинок с их исходным объемом. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 5. Вероника купила в супермаркете некоторое количество сыра, представляющего собой кубик размерами 5 см × 5 см × 5 см для необычных экспериментов с динамометром. Внутри сыра имеются дырки, которые образуются в процессе его созревания. Сначала она измерила вес сыра, погрузив его целиком в воду, и получила $P_1 = 0{,}26$ Н. Дополнительно Вероника расплавила сыр на водяной бане, отметив, что масса сыра после его затвердевания не изменилась, а объём уменьшился на 10%. Определите плотность монолитного сыра без дырок по результатам эксперимента Вероники, предполагая, что после его расплавления и затвердевания дырок в сыре не осталось. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ кг/(м · с^2).

Возможное решение

1) Запишем массу M целого куска сыра, разделив составляющие дырок и сыра:

$$M = \rho_d V_d + \rho_c V_c = \rho_d V_d + \rho_c (V - V_d) = \rho_c V - (\rho_c - \rho_d) V_d,$$

где ρ_d и ρ_c – плотность дырок и плотность монолитного сыра соответственно, а V_d, V_c и V – объём всех дырок, объем монолитного сыра и суммарный объем сыра (дан в условиях задачи) соответственно.

2) Запишем выражение для веса P_1, фиксируемого динамометром при погружении сыра в воду (подставим при этом найденное выражение для массы целого куска сыра):

$$P_1 = Mg - \rho_в V g = \rho_c V g - (\rho_c - \rho_d) V_d\, g - \rho_в V g \quad \Rightarrow$$

$$V_d = \frac{(\rho_c - \rho_в) V - \dfrac{P_1}{g}}{\rho_c - \rho_d}.$$

3) Известно, что объем сыра после его затвердевания уменьшился на 10%, тогда верно

$$V - V_d = 0{,}9\, V \quad \Rightarrow \quad V_d = 0{,}1\, V.$$

4) Заметим, что плотность дырок, а если быть точным плотность воздуха, заполняющего дырки, мала по сравнению с плотностями твердых тел $\Rightarrow$ плотностью дырок в данной задаче можно пренебречь. Тогда будет верно

$$\rho_c = \frac{\dfrac{P_1}{g} + \rho_в V}{V - V_d} = \frac{\dfrac{P_1}{g} + \rho_в V}{0{,}9\, V} = \frac{10}{9}\left(\frac{P_1}{Vg} + \rho_в\right).$$

Подставляя известные значения, находим искомую плотность монолитного сыра:

$$\rho_c \approx 1{,}34 \text{ г/см}^3.$$

Ответ:

$$\rho_c \approx 1{,}34 \text{ г/см}^3.$$

Критерии

1. Верно записано выражение для веса, фиксируемого динамометром. (+ 2 балла)
2. Верно выражен объем дырок в сыре. (+ 1 балл)
3. Получена связь плотности сыра с весом, фиксируемым динамометром. (+ 1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Задача 1. Стакан с водой помещают на весы и начинают нагревать воду кипятильником. Кипятильник работает от сети с напряжением 240 В и протекающим током 8,3 А. Когда вода закипает, включают секундомер и начинают фиксировать показания весов с интервалом 10 с, занося данные в таблицу.

1. Используя результаты измерений, рассчитайте энергию, необходимую для испарения 1 кг воды при температуре $100°C$. Удельную теплоту парообразования воды в условиях задачи считать неизвестной постоянной.
2. Воду массой 0,9 кг при температуре $0°C$ нагревают, пропуская струю водяного пара при температуре $100°C$. Используя результат прошлого пункта, найдите температуру воды в момент, когда сконденсируется $m = 0{,}1$ кг воды. Удельная теплота нагревания воды $c_{в} = 4200$ Дж/(кг$\cdot°C$).

t, с	m, г
0	168
10	159
20	151
30	142
40	133
50	124
60	116
70	107

Возможное решение

1) Построив график по табличным данным, можем найти скорость испарения воды:

$$u \approx 0{,}87 \cdot 10^{-3}\text{кг/с}.$$

Тогда искомая энергия, необходимая для испарения 1 кг воды при температуре $100°C$, может быть найдена как:

$$E = \frac{P}{u} = \frac{UI}{u} \approx 2{,}3 \text{ МДж}.$$

2) Запишем уравнение теплового баланса, чтобы найти температуру, до которой нагреется часть воды массой 0,9 кг при пропускании через нее горячего пара (для которого известна энергия, необходимая для испарения одного килограмма воды):

$$0{,}1E = 0{,}9 \cdot (t' - 0) \cdot c_{в} \quad \Rightarrow \quad t' \approx 60{,}8°C.$$

Таким образом, мы имеем смесь воды массой 0,9 кг при температуре $60{,}8°C$ и воды массой 0,1 кг при температуре $100°C$. Уравнение теплового баланса примет вид:

$$0{,}9 \cdot (t - 60{,}8) = 0{,}1 \cdot (100 - t).$$

Тогда $t = 64{,}8°C$.

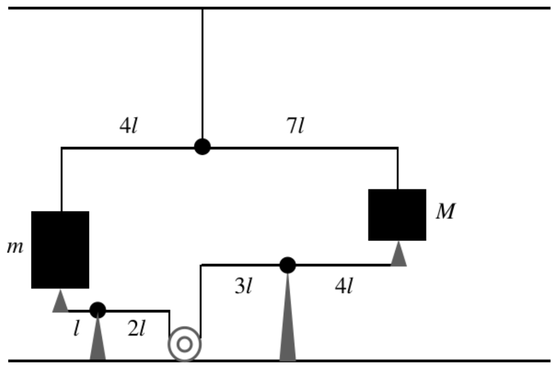
Ответ:

$$1) E = 2{,}3 \text{ МДж}, \quad 2) t = 64{,}8°C.$$

Критерии

1. Верно найдена скорость испарения воды. (+ 1 балл)
2. Получен верный численный ответ для энергии испарения килограмма воды. (+ 1 балл)
3. Верно записано уравнение теплового баланса для процесса нагревания воды с помощью пара. (+ 2 балла)
4. Получен верный численный ответ для температуры воды в момент, когда сконденсируется $m = 0{,}1$ кг воды. (+ 1 балл)

Задача 2. На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами m и M закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение $\frac{m}{M}$, если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы m.



Возможное решение

1) Обозначим силы, действующие на левое и правое плечи большого рычага как T_1 и T_2 соответственно. Из условия равновесия для большого рычага получаем:

$$T_1 \cdot 4l = T_2 \cdot 7l,$$

$$T_2 = \frac{4}{7}T_1.$$

По условию $T_1 = \dfrac{mg}{2}$, откуда

$$T_2 = \frac{2}{7}mg.$$

2) Запишем условия равновесия для малых рычагов, обозначив силу натяжения внутренней нити между плечами малых рычагов за T_3:

$$(mg - T_1) \cdot l = T_3 \cdot l \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{2} \cdot l = T_3 \cdot 2l,$$

$$(Mg - T_2) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l \quad \Rightarrow \quad (Mg - \frac{2}{7}mg) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l.$$

Откуда получаем:

$$\frac{1}{4}mg = \frac{4}{3}Mg - \frac{8}{21}mg,$$

$$\frac{53}{84}mg = \frac{4}{3}Mg,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{112}{53}.$$

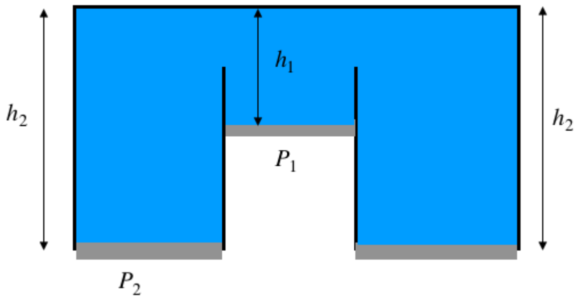
Ответ:

$$\frac{m}{M} = \frac{112}{53}.$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия верхнего рычага. (+1 балла)
2. Верно записаны условия равновесия нижних рычагов. (+2 балла)
3. Получено уравнение, связывающее массы m и M. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 3. Имеется герметичный сосуд, изображённый на рисунке. Снизу сосуда на жидкость давят три поршня, два из них расположены на расстоянии $h_2 = 10$ см от верхней крышки сосуда, ещё один – на высоте h_1 от верхней крышки сосуда. Давление одного из нижних поршней на жидкость составляет $P_2 = 3000$ Па, давление верхнего поршня составляет $P_1 = 2500$ Па. Найдите значение h_1. Ответ выразите в сантиметрах. Плотность жидкости $\rho = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Возможное решение

1) Заметим, что давления, создаваемые поршнями, расположенными на одном и том же удалении h_2 от верхней стенки сосуда, совпадают. Запишем условие равновесия для одного из нижних поршней:

$$P_2 = \rho g h_2 + P_0,$$

где P_0 – давление у верхней стенки сосуда. Выразим это давление из выражения, записанного ранее:

$$P_0 = P_2 - \rho g h_2.$$

2) Для поршня, расположенного на высоте h_1 от верхней крышки сосуда, аналогично запишем условие равновесия:

$$P_1 = \rho g h_1 + P_0.$$

Подставляя полученное ранее выражение для P_0, получаем

$$P_1 = \rho g h_1 + P_2 - \rho g h_2,$$

$$\rho g h_1 = P_1 - P_2 + \rho g h_2,$$

$$h_1 = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + h_2 = -0{,}05\ \text{м} + 0{,}1\ \text{м} = 0{,}05\ \text{м} = 5\ \text{см}.$$

Ответ:

$$h_1 = 5\ \text{см}.$$

Критерии

1. Записано давление жидкости на поршни с учетом давления жидкости на верхнюю поверхность емкости. (+2 балла)
2. Записана разность давлений жидкости на верхний и нижний поршни. (+1 балла)
3. Найдена верная формула на разницу высот верхнего и нижних поршней. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

Задача 4. Студент Миша купил в магазине неохлаждённый лимонад «Буратино» массой $m = 300$ г и температурой $T_1 = 20°\mathrm{C}$. Чтобы охладить его до температуры $T_2 = 10°\mathrm{C}$, Миша добавил восемь кубиков льда длиной ребра $a = 2$ см. Известно, что мощность передачи теплоты окружающего воздуха к смеси лимонада и льда $P = 25$ Дж/с, т.е. воздух медленно нагревает смесь.

1. Рассчитайте, как долго напиток будет оставаться охлаждённым. Ответ выразите в минутах и округлите до десятых.
2. Определите температуру напитка через 10 минут после добавления льда. Ответ выразите в °C и округлите до десятых.

Удельные теплоёмкости лимонада и воды одинаковы и равны $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг, плотность льда $\rho_{\text{льда}} = 900$ кг/м^3.

Возможное решение

1) Найдем количество льда, которое потребовалось для охлаждения лимонада до 10°C:

$$m_{\text{льда}} = 8 \cdot a^3 \cdot \rho_{\text{льда}} = 57{,}6\,\text{г}.$$

2) Для того, чтобы рассчитать, как долго напиток будет оставаться охлажденным, запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{лимонада}} m_{\text{лимонада}} \Delta T + Pt = \lambda m_{\text{льда}} + c_{\text{воды}} m_{\text{льда}} \Delta T,$$

$$\Delta T = 10°\mathrm{C}, \quad c_{\text{лимонада}} = c_{\text{воды}} = c \quad \Rightarrow$$

$$t = \frac{\lambda m_{\text{льда}} + c m_{\text{льда}} \Delta T - c m_{\text{лимонада}} \Delta T}{P} = 6{,}0\,\text{мин}.$$

3) Из условия задачи и посчитанного времени можно сделать вывод, что через время $t = 6$ мин напиток будет состоять из 300 г лимонада и 57,6 г расстаявшей воды, и смесь будет иметь температуру 10°C. После напиток будет нагреваться за счет взаимодействия с воздухом. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{лимонада}} \cdot m_{\text{лимонада}} \cdot \Delta T' + c_{\text{воды}} \cdot m_{\text{воды}} \cdot \Delta T' = P \cdot \Delta t,$$

где $\Delta T' = T_{\text{конечная}} - T_2$, Δt — промежуток времени, оставшийся после плавления льда до достижения конечного времени, т.е. $\Delta t = 10\,\text{мин} - 6\,\text{мин} = 4\,\text{мин}$;

$$\Delta T' = 4{,}0°\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{конечная}} = \Delta T' + T_2 = 4°\mathrm{C} + 10°\mathrm{C} = 14{,}0°\mathrm{C}.$$

Ответ:

$$1)\ t = 6{,}0\,\text{мин}; \quad 2)\ T_{\text{конечная}} = 14{,}0°\mathrm{C}.$$

Критерии

1. Верно записано уравнение теплового баланса с учетом теплообмена с воздухом. (+2 балла)
2. Верно записано уравнение теплового баланса для смеси лимонада и растаявшего льда при взаимодействии с воздухом. (+2 балла)
3. Получены верные численные ответы. (+1 балл)

Задача 5. С целью тестирования на устойчивость в куб массой $M = 300$ г и длиной ребра $a = 12$ см наливают воду со скоростью $u = 6{,}4$ г/с. Определите момент времени, когда центр масс куба с набранной в него водой окажется ниже всего, если куб фиксирован в пространстве и не двигается. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Ширину стенки куба не учитывать.

Возможное решение

1) Обозначим массу набранной в куб воды за m, высоту водяного столба в кубе h и высоту центра масс системы l в произвольный момент времени.

Проведем некоторые рассуждения о системе. Поскольку куб симметричен, его собственный центр масс находится на высоте $\frac{a}{2}$. Центр масс набранной воды расположен в центре водной массы, то есть на высоте $\frac{h}{2}$. Если куб пуст, то центр масс системы совпадает с центром масс куба, то есть $l = \frac{a}{2}$, и высота водяного столба при этом $h = 0$.

Если теперь вода медленно поступает на дно полого куба, то высота водяного столба h начинает расти, а высота l центра масс системы начинает уменьшаться, потому что вся добавленная вода до некоторого момента будет находиться ниже центра масс системы.

2) Высота центра масс системы больше не может быть уменьшена путем добавления воды, если она совпадает с высотой водяного столба h, т.к. в этой ситуации вновь добавленное количество воды окажется выше центра масс системы, и высота центра масс системы вырастет. Следовательно, центр масс находится как можно ниже в ситуации, когда высота центра масс системы совпадает с высотой водяного столба, то есть при $l = h$. Применяя правило моментов, получаем:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Зная, что $l = h$, и вычислив массу набранной воды как $m = \rho a^2 h$, можно преобразовать предыдущее уравнение к квадратному уравнению относительно h:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0.$$

Решим квадратное уравнение, отбрасив заведомо отрицательный корень, и получаем выражение для h, при котором центр масс куба с набранной в него водой окажется ниже всего:

$$h = \frac{M\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right)}{\rho a^2}.$$

3) Тогда искомый момент времени t, в который достигается такая высота h, будет равен

$$t = \frac{m}{u} = \frac{\rho a^2 h}{u} = \frac{M}{u}\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right) = 75 \text{ с}.$$

Ответ:

$$t = 75 \text{ с}.$$

Критерии

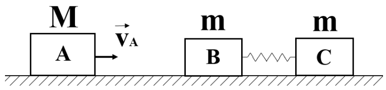
1. Верно определена высота центра масс куба $l = h$ в искомый момент времени. (+ 1 балл)
2. Верно применено правило моментов для куба с жидкостью. (+ 1 балл)
3. Получено выражение для высоты центра масс. (+ 1 балл)
4. Получено выражение для искомого момента времени. (+ 1 балл)
5. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Заключительный этап 6 апреля 9 класс

Задача 1. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска B и C, соединённых недеформированной пружиной. Масса каждого бруска $m = 0{,}15$ кг. С бруском B абсолютно упруго сталкивается брусок A массой $M = 0{,}55$ кг, движущийся с горизонтальной скоростью $v_A = 8$ м/с, направленную вдоль пружины. Считая, что за время столкновения пружина не успевает деформироваться, найдите следующие величины:

1. Отношение энергии $x = Q/E_A$, где Q - энергия относительных колебаний брусков B и C после столкновения, E_A - начальная кинетическая энергия бруска A.
2. Значение отношения масс $\alpha = \frac{M}{m}$, при котором величина x будет максимальна.



Возможное решение

1. Определим энергию, которая была потеряна в результате столкновения брусков. Для начала найдем общую кинетическую энергию системы в момент до соударения:

$$E_A = \frac{Mv_A^2}{2}.$$

Будем считать бруски B и C, соединенные пружиной, составным телом массой $2m$, обладающим некоторой энергией Q. Реально это энергия относительных колебаний брусков после столкновения. Скорость движения этого тела обозначим через v_c. Тогда его полная энергия будет равна

$$\frac{2mv_c^2}{2} + Q.$$

После соударения можно записать:

$$E_A = \frac{Mv_A'^2}{2} + \frac{2mv_c^2}{2} + Q,$$

где v_A' — скорость бруска массы M после соударения, v_c — скорость центра масс брусков B и C, Q — энергия, которая уходит на внутреннее движение системы брусков B и C. Теперь можно выразить Q:

$$Q = \frac{Mv_A^2}{2} - \frac{M{v_A}'2}{2} - mv_c^2.$$

Чтобы найти неизвестные скорости, запишем законы сохранения импульса и энергии в момент до соударения и сразу после него, обозначив скорость бруска B в момент после удара через v_B.

$$\text{ЗСИ:} \quad Mv_A = Mv_A' + mv_B;$$

$$\text{ЗСЭ:} \quad \frac{Mv_A^2}{2} = \frac{M{v_A}'2}{2} + \frac{mv_B^2}{2}.$$

Откуда получим:

$$v_A' = \frac{M-m}{M+m}v_A\,,$$

$$v_B = v_A + v_A' = \frac{2M}{M+m}v_A.$$

В момент непосредственно после соударения брусок C имеет скорость равную 0, тогда можно найти скорость центра масс v_c:

$$v_c = \frac{mv_B + m \cdot 0}{m+m} = \frac{v_B}{2} = \frac{M}{M+m} v_A.$$

Тогда Q можно выразить следующим образом:

$$Q = \frac{Mv_A^2}{2}\left(1 - \frac{2mM}{(M+m)^2} - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right) = \frac{Mv_A^2}{2} \cdot \frac{2Mm}{(M+m)^2}.$$

Выразим искомое отношение энергий x:

$$x = \frac{Q}{E_A} = \frac{2Mm}{(M+m)^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} \approx 0{,}34.$$

2. Заметим, что «потерянная» энергия Q равна поступательной энергии сложной системы. Следовательно, наибольшая потеря энергии наблюдается при максимально возможной передаче энергии по отношению к начальной кинетической энергии, что имеет место, когда вся кинетическая энергия переходит от бруска A к бруску B, то есть когда $M = m$, $\alpha = 1$.

Также можно воспользоваться неравенством о среднем геометрическом:

$$\frac{1+\alpha}{2} \geq \sqrt{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}.$$

Максимум $x = \dfrac{1}{2}$ достигается при $\alpha = 1$.

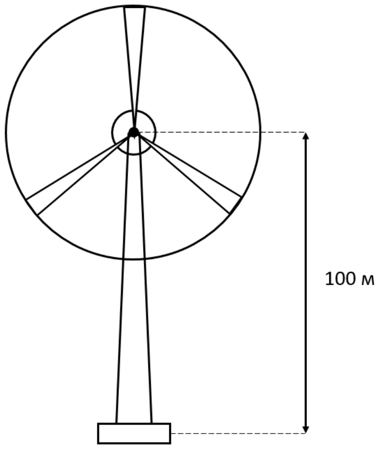
Ответ:

$$1)\ x \approx 0{,}34; \quad 2)\ \alpha = 1.$$

Критерии

1. Верно записан закон сохранения энергии до и после соударения. (+ 1 балл)
2. Из закона сохранения энергии и импульса верно найдена скорость центра масс системы двух шаров. (+ 1 балл)
3. Верно выражена энергия Q. (+ 1 балл)
4. Получен верный численный ответ для x. (+ 1 балл)
5. Проведен верный анализ и получен верный численный ответ для α. (+ 1 балл)

Задача 2. Основу Кочубеевской ветроэлектростанции составляют ветрогенераторы с длиной лопасти $r = 25$ м, вращательный центр которых расположен на высоте $h = 100$ м от земли, как показано на рисунке. Направление ветра перпендикулярно плоскости рисунка, всю свою энергию ветер отдаёт на вращение лопастей. Электрическая мощность, вырабатываемая одной такой турбиной, поступает в соседнюю деревню по электрокабелю с сопротивлением $R = 7{,}5$ Ом и напряжением $U = 2500$ В. Найдите долю мощности, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню. КПД ветрогенератора составляет $\eta = 40$ %. Средняя скорость ветра на высоте 100 м составляет $v = 11$ м/с. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ мг/см^3.



Возможное решение

1) Найдем кинетическую энергию воздуха, который приводит лопасти в движение. Для этого необходимо найти массу воздуха, который проходит через ветрогенератор за одну секунду:

$$M = \rho V = \rho \cdot (\pi r^2 v \cdot 1 \text{ сек}) \quad \to \quad E_K = \frac{Mv^2}{2} = \frac{\pi \rho r^2 v^3}{2} \cdot 1 \text{ сек}.$$

2) Мощность, вырабатываемая турбиной равна:

$$P_T = \eta E_K = \frac{\pi \eta \rho r^2 v^3}{2} \cdot 1 \text{ сек}.$$

3) Мощность, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню, находится как:

$$P' = I^2 R = (P_T/U)^2 \cdot R.$$

4) Тогда доля потерянной мощности составляет:

$$\alpha = \frac{P_T}{P'} = \frac{2U^2}{R\pi\eta\rho r^2 v^3 \cdot 1 \text{ сек}} \approx 1{,}23 > 1.$$

Разумеется, такое значение говорит о том, что ток в деревню не потечет — метод передачи энергии не является эффективным, а потери эквивалентны 100 %.

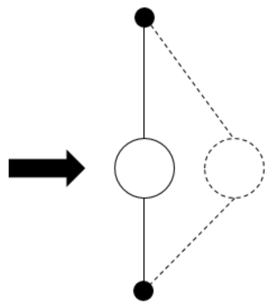
Ответ:

$$\alpha \approx 1{,}23.$$

Критерии

1. Верно найдена масса воздуха, проходящая через ветрогенератор за единицу времени. (+ 1 балл)
2. Верно найдена кинетическая энергия воздуха. (+ 1 балл)
3. Верно найдена мощность, вырабатываемая турбиной. (+ 1 балл)
4. Верно найдена мощность, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню. (+ 1 балл)
5. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Задача 3. Боксёрский тренировочный мяч, имеющий массу m, закреплён между двумя одинаковыми эластичными резинками длиной l, как показано на рисунке. Каждая резинка обладает такой жёсткостью k, что при приложении силы, равной mg, длина резинки увеличивается до $2l$. Верхняя и нижняя резинки закреплены к потолку и полу соответственно в помещении высотой $4l$. Сначала мячу придают небольшое вертикальное смещение и отпускают. После затухания колебаний мячу аналогично придают небольшое горизонтальное смещение и отпускают. Найдите отношение периода вертикальных колебаний к периоду горизонтальных колебаний. Радиус мяча $r \ll l$. Для малых углов α при расчётах принять $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.



Возможное решение

1) Для начала найдем равновесное положение мяча. Пусть индекс 1 относится к резинке, соединяющей мяч с потолком, а индекс 2 – к резинке, соединяющей мяч с полом. Тогда x_1, x_2 – соответствующие растяжения резинок в положении равновесия, для которых верно равенство

$$x_1 + x_2 + 2l = 4l \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 2l.$$

2) Запишем силы, действующие на мяч в положении равновесия и найдем растяжения резинок, учитывая, что $k \cdot (2l - l) = mg$ из условия задачи.

$$T_1 = T_2 + mg,$$

$$kx_1 = kx_2 + mg,$$

$$k \cdot 2l - kx_2 = kx_2 + mg,$$

$$2mg - mg = 2kx_2.$$

$$\text{Так как } k = \frac{mg}{l} \quad \Rightarrow \quad 2kx_2 = 2\frac{mg}{l}x_2 \quad \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{2}l.$$

3) Теперь придадим мячу небольшое вертикальное смещение y. Для определенности выберем направление смещения. Пусть мяч смещают вниз. Запишем действующие на мяч силы:

$$ma = -k(\frac{3}{2}l + y) + k(\frac{l}{2} - y) + mg,$$

$$ma = -kl - 2ky + mg.$$

Поскольку $kl = mg$, получим

$$ma = -2ky.$$

Тогда по аналогии вывода периода колебаний пружинного маятника найдем период вертикальных колебаний мяча:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

4) Теперь рассмотрим горизонтальные колебания при небольшом отклонении мяча в этой плоскости. Обозначим силу, действующую на мяч со стороны резинок, за F. Угол между отклоненной после растяжения верхней резинкой и вертикалью обозначим за θ, а угол между отклоненной после растяжения нижней резинкой и вертикалью – за φ. Длины растянутых верхней и нижней резинок – L_1 и L_2 соответственно. Поскольку в положении равновесия длины резинок, закрепленных к потолку и полу, соответственно равны $5l/2$ и $3l/2$, то

$$L_1 = \frac{5l}{2\cos\theta}, \quad L_2 = \frac{3l}{2\cos\varphi}.$$

5) Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось примет вид:

$$F = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\varphi,$$

$$F = k\left(\frac{5l}{2\cos\theta} - l\right)\sin\theta + k\left(\frac{3l}{2\cos\varphi} - l\right)\sin\varphi,$$

$$F = kl\left(\frac{5}{2}\operatorname{tg}\theta - \sin\theta + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\varphi - \sin\varphi\right).$$

Воспользуемся приближением для малых углов $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, подставляя значения $\operatorname{tg}\theta = \frac{2x}{5l}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2x}{3l}$, где x – смещение мяча по горизонтали (общий катет в прямоугольных треугольниках с гипотенузами L_1, L_2 и катетами $5l/2$, $3l/2$ соответственно). После подстановки и упрощения выражения получим:

$$F = \frac{14}{15}kx.$$

6) Аналогично вертикальным колебаниям, получим период горизонтальных колебаний:

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{15m}{14k}}.$$

Отсюда искомое отношение периода вертикальных колебаний к периоду горизонтальных колебаний равно

$$\frac{T'}{T''} = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0{,}68.$$

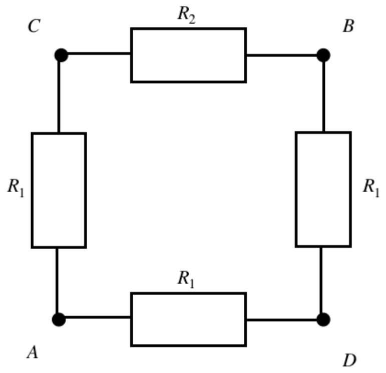
Ответ:

$$\frac{T'}{T''} = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0{,}68.$$

Критерии

1. Найдены растяжения резинок в состоянии покоя (+ 1 балл).
2. Верно записан закон Ньютона на вертикальную ось для случая вертикальных колебаний (+ 1 балл).
3. Верно найден период вертикальных колебаний (+ 1 балл).
4. Верно записан закон Ньютона в проекции на обе оси для случая горизонтальных колебаний (+ 1 балл).
5. Верно найден период горизонтальных колебаний (+ 1 балл).

Задача 4. Рассмотрите схему электрической цепи, изображенную на рисунке. Подключая клеммы источника постоянного напряжения к разным парам точек из набора $\{A, B, C, D\}$, можно получить три различных значения мощности тока в цепи. Известно, что значения двух наибольших мощностей относятся как $1 : 3$, причём сопротивление $R_1 > R_2$. Найдите отношение $\frac{R_1}{R_2}$ и определите, во сколько раз наибольшая возможная мощность больше наименьшей возможной мощности.



Возможное решение

1) Очевидно, что три возможных значения мощности получаются, например, при подключении к внешнему источнику через пары точек AB, BC и BD. Вычислим эти мощности по формуле:

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где U — значение внешнего напряжения, подаваемого на клеммы. Получаем:

$$P_{AB} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{2R_1(R_1 + R_2)},$$
$$P_{BC} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{3R_1 R_2},$$
$$P_{BD} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{R_1(2R_1 + R_2)}.$$

2) Чтобы воспользоваться данными из условия об отношениях напряжений, рассчитаем следующие отношения:

$$\frac{P_{AB}}{P_{BC}} = \frac{3R_2}{2R_1 + 2R_2},$$
$$\frac{P_{AB}}{P_{BD}} = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1 + 2R_2},$$
$$\frac{P_{BC}}{P_{BD}} = \frac{2R_1 + R_2}{3R_2}.$$

Из этих оношений и условия $R_1 > R_2$ можно сделать следующие выводы: $P_{BC} > P_{AB}$ из первого соотношения, $P_{BD} > P_{AB}$ из второго соотношения и $P_{BC} > P_{BD}$ из третьего соотношения. Таким образом:

$$P_{BC} > P_{BD} > P_{AB}.$$

Тогда по условию:

$$\frac{P_{BC}}{P_{BD}} = 3 = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{3},$$
$$\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2},$$
$$\frac{R_1}{R_2} = 4.$$

3) Теперь мы можем найти отношение наибольшей мощности к наименьшей мощности:

$$\frac{P_{BC}}{P_{AB}} = \frac{2R_1 + 2R_2}{3R_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

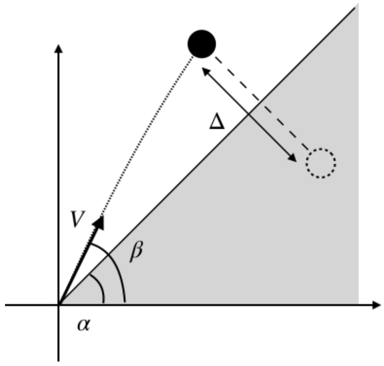
Ответ:

$$\frac{R_1}{R_2} = 4; \quad \text{наибольшая мощность относится к наименьшей мощности как } \frac{P_{BC}}{P_{AB}} = \frac{10}{3}.$$

Критерии

1. Верно записаны три возможных значения мощности. (+2 балла)
2. Верно записаны соотношения мощностей. (+1 балл)
3. Верно сделаны выводы о соотношении мощностей. (+1 балл)
4. Верно посчитаны соотношение сопротивлений,
   соотношение наибольшей и наименьшей мощностей. (+1 балл)

Задача 5. Зеркальная наклонная плоскость расположена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. В начальный момент времени из некоторой точки на наклонной плоскости выпускают снаряд со скоростью $v = 3$ м/с под углом $\beta = 60°$ к горизонту, как показано на рисунке. Найдите момент времени, когда расстояние между снарядом и его изображением в зеркале будет максимальным. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых.



Возможное решение

1) Выберем плоскость XY, соответствующую осям, изображенным в плоскости на рисунке. Точку старта снаряда примем за начало отсчета и запишем уравнения движения:

$$x = v_x t = vcos(\beta)t,$$

$$y = v_y t + \frac{gt^2}{2} = vsin(\beta)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда снаряд движется по кривой, соответствующей уравнению

$$y = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}.$$

2) Найдем точку пересечения снаряда с наклонной плоскостью (т.к. наклонная плоскость расположена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, она задаётся уравнением $y = x$), то есть точку приземления:

$$x = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2},$$

$$0 = tg(\beta) - 1 - \frac{g}{2}\frac{x_0}{v_x^2}, \text{ где } x = x_0 \text{ – искомая точка пересечения,}$$

$$x_0 = \frac{2(tg(\beta) - 1)v_x^2}{g}.$$

3) Для того, чтобы получить траекторию изображения снаряда в той же системе отсчета, нужно провести отражение исходной кривой относительно прямой $y = x$. Такое отражение можно осуществить, поменяв в уравнении исходной кривой x и y местами. Тогда кривая, вдоль которой двигается изображение, задается уравнениями:

$$x_{\text{c}} = y = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2},$$

$$y_{\text{c}} = x.$$

4) Найдем расстояние между изображением в зеркале и самим снарядом:

$$\Delta = \sqrt{(x_{\text{c}} - x)^2 + (y_{\text{c}} - y)^2},$$

$$\Delta = \sqrt{\left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right)^2 + \left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right)^2},$$

$$\Delta = \sqrt{2}\left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right).$$

Заметим, что кривая $\Delta(x)$ является параболой с ветвями вниз. Тогда максимальное значение $\Delta(x^\star)$ достигается в вершине параболы:

$$x^\star = \frac{(tg(\beta) - 1)v_x^2}{g}.$$

5) Заметим, что координата $x^\star$ меньше координаты x_0, в которой снаряд приземляется. Остается определить момент времени $t^\star$, когда расстояние между снарядом и его изображением в зеркале будет максимальным:

$$t^\star = \frac{x^\star}{v_x} = \frac{(tg(\beta) - 1)v_x}{g} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{20}\ \text{с} = 0{,}11\ \text{с}.$$

Ответ:

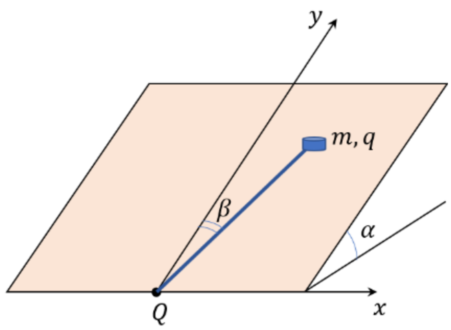
$$t^\star = 0{,}11\ \text{с}.$$

Критерии

1. Верно записана система уравнений для движения снаряда. (+1 балла)
2. Верно записана система уравнений для движения изображения снаряда. (+1 балл)
3. Верно найдена зависимость расстояния между снарядом и изображением от положения снаряда или от времени. (+1 балл)
4. Верно найдено значение координаты снаряда, при которой расстояние от снаряда до изображения максимально.(+1 балл)
5. Верно найден момент времени, в который расстояние между снарядом и изображением максимально. (+1 балл)

Задача 1. Система (см.рис.) состоит из двух одноименных точечных зарядов Q и q, соединенных непроводящим упругим жгутом жесткостью $\gamma = 1{,}0$ Н/м. Масса маленькой шайбы, несущей заряд q, равна $m = 0{,}20$ кг. Угол при вершине наклонной плоскости равен $\alpha = 30°$, коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Начальная длина жгута пренебрежимо мала ($l_0 \to 0$). В отсутствие силы тяжести расстояние между зарядами равно $r_0 = 10$ м. Считайте, что модуль силы тяжести намного меньше, чем модуль силы упругости или силы кулоновского взаимодействия в области зоны застоя. На какой максимальный угол $\beta_{\max}$ может отклониться жгут от оси Oy при условии, что шайба должна находиться в положении равновесия? Определите границы зоны застоя (области, в которой шайба, отпущенная без начальной скорости, продолжает покоиться) на плоскости xOy. Изобразите схематично эту область на плоскости xOy, отразив при построении основные особенности границы этой области.

Примечание: *при малых* $|x| \ll 1$ *справедлива приближенная формула:* $(1 \pm x)^\alpha \approx 1 \pm \alpha x$.



Возможное решение

1) В отсутствие силы тяжести и силы трения равновесное расстояние r_0 между двумя зарядами определится из условия равенства модулей силы упругости $F_{\text{упр}}$ жгута и силы кулоновского отталкивания $F_{\text{К}}$ зарядов:

$$\frac{kqQ}{r_0^2} = \gamma r_0.$$

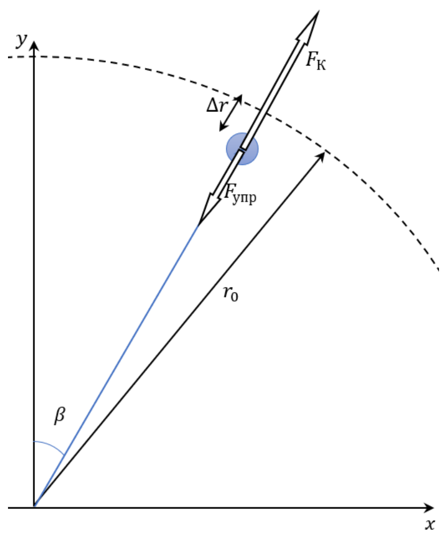


Рис. 1

Поскольку величина силы тяжести мала по сравнению с величинами $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$, то она смещает заряд q на расстояние $\Delta r = r - r_0$, при этом $|\Delta r| \ll r_0$. Определим, как изменяются силы $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$ при таком смещении:

$$F_{\text{К}}(\Delta r) = \frac{kqQ}{(r_0+\Delta r)^2} = \frac{kqQ}{r_0^2}\left(1+\frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-2} \approx \frac{kqQ}{r_0^2}\left(1-2\frac{\Delta r}{r_0}\right),$$
$$F_{\text{упр}}(\Delta r) = \gamma\left(r_0+\Delta r\right).$$

В таком случае проекция равнодействующей этих сил на радиальное направление равна

$$F_r(\Delta r) = F_{\text{К}}(\Delta r) - F_{\text{упр}}(\Delta r) = \frac{kqQ}{r_0^2}\left(1-2\frac{\Delta r}{r_0}\right) - \gamma\left(r_0+\Delta r\right) = -3\gamma\Delta r.$$

2) Рассмотрим проекции сил, приложенных к заряду q, покоящемуся на наклонной плоскости, на плоскость xOy :

1. $mg\sin\alpha$ — проекция силы тяжести;
2. $F_r(\Delta r)$ — равнодействующая $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{К}}$;
3. $F_{\text{Тр}} \le \mu mg\cos\alpha$ — сила трения покоя.

Граница зоны застоя, очевидно, определяется теми точками на плоскости xOy, в которых сила трения покоя достигает максимально возможного значения $F_{\text{тр max}} = \mu \text{mg} \cos\alpha$.

Изобразим векторную диаграмму сил, иллюстрирующую равновесие заряда. За основу векторной диаграммы возьмём $mg\sin\alpha$ – постоянный по величине и направлению вектор. Окружность радиуса $\mu mg\cos\alpha < mg\sin\alpha$ с центром в конце вектора $mg\sin\alpha$ — это множество точек, в которых может размещаться конец вектора, соответствующего силе трения покоя. Вектор, дополняющий диаграмму до треугольника, — это $F_r(\Delta r)$.

Направление вектора $F_r(\Delta r)$ задает угол β. Максимальный угол отклонения жгута $\beta_{\max}$ определяется из диаграммы, изображенной на рисунке:

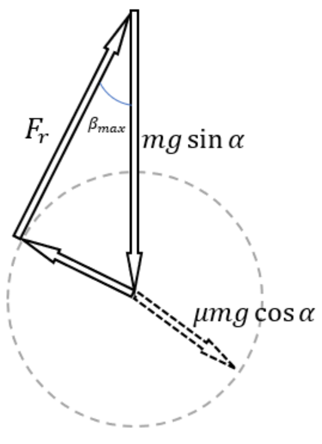


Рис. 2

$$\sin\beta_{\max} = \frac{\mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha} \quad \to \quad \beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 30°.$$

3) Величину $\Delta r\left(\beta_{\max}\right)$ определим, применив теорему Пифагора к векторному треугольнику:

$$(3\gamma\Delta r)^2 + (\mu mg\cos\alpha)^2 = (mg\sin\alpha)^2 \to \Delta r\left(\beta_{\max}\right) = -\frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Для углов $\beta < \beta_{\max}$ существует 2 варианта возможных взаимных расположений векторов при равновесии на границе зоны застоя:

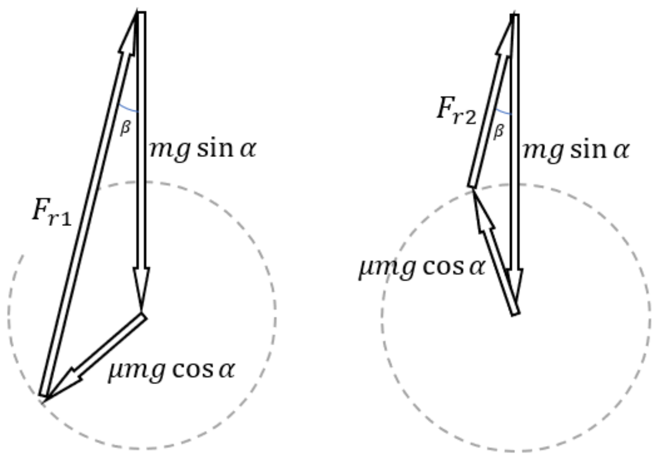


Рис. 3

По теореме косинусов (не забываем учесть, что $\Delta r < 0$):

$$(mg\sin\alpha)^2 + (3\gamma\Delta r)^2 + 6\gamma\Delta r mg\sin\alpha\cos\beta = (\mu mg\cos\alpha)^2.$$

Откуда получаем:

$$\Delta r_{1,2} = -\frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right),$$

$$r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right).$$

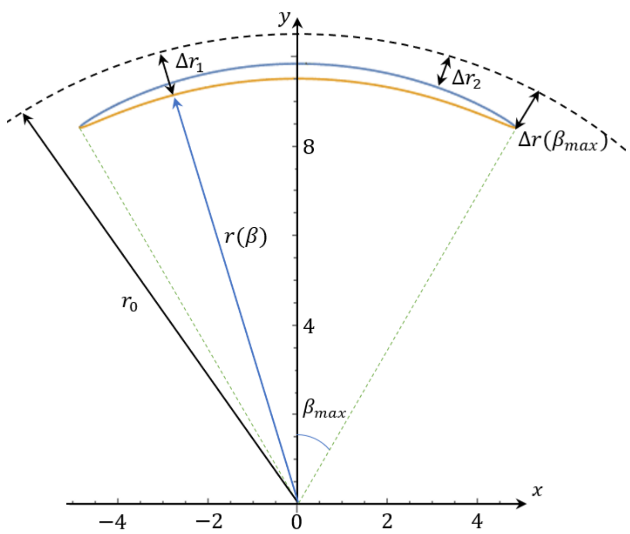


Рис. 4: Зона застоя.

Ответ:

$$\beta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 30^\circ; \quad r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right) \text{ (\textit{см. рис.4}).}$$

Критерии

1. Получено правильное выражение для равнодействующей сил упругости и Кулона в приближении малых отклонений от равновесного состояния (+1 балл).
2. Из корректных физических соображени получено, что $\beta_{\max} = 30^\circ$ (+1 балл).
3. Показано, что для углов $\beta < \beta_{max}$ существует 2 возможных варианта равновесия на границе зоны застоя (+1 балл).
4. Получены правильные выражения для $r_{1,2}(\beta)$, описывающие зону застоя (+1 балл).
5. Правильно изображена зона застоя, отмечены необходимые характерные особенности этой зоны (+1 балл).

Задача 2. Две маленькие шайбы массами m_1 и $m_2 = 2m_1$ находятся на оси Oy гладкой горизонтальной плоскости и связаны нерастяжимой легкой нитью длины l. Первой шайбе толчком сообщают скорость v_1, направленную перпендикулярно нити вдоль оси Ox.

На каком расстоянии L вдоль оси Ox от второй шайбы должна находиться шайба массы $m_3 = m_2$, чтобы произошло столкновение? Какими будут скорости каждой из шайб после подобного столкновения? Считайте, что высота третьей шайбы такова, что натянутая нить проходит над этой шайбой, не задевая её.

Возможное решение

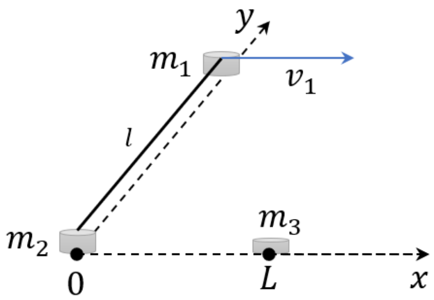


Рис. к задаче 2.

Движение шайб после приобретения первой шайбой 1 скорости v_0 в дальнейшем представляет из себя суперпозицию поступательного движения центра масс и вращательного движения шайб вокруг центра масс.

Скорость центра масс:

$$v_C = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{v_0}{3}.$$

Положение центра масс:

$$y_C = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \frac{l}{3} = const.$$

Перейдём в инерциальную систему отсчета, связанную с центром масс двух шайб. В этой системе отсчета связанные шайбы вращаются с угловой скоростью $\omega = \frac{v_c}{y_c} = \frac{v_0}{l}$, а третья шайба движется со скоростью, проекция которой $v_{3x} = -v_C$. Вид сверху:

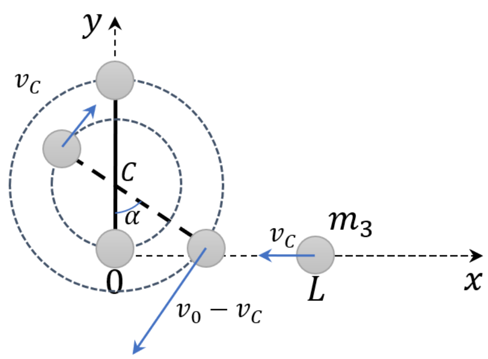


Рис. 1

Определим условия столкновения одной из связанных шайб с третьей. Столкновение шайбы массы m_2 с шайбой массы m_3 произойдёт в том случае, если связанные шайбы совершат целое число k оборотов, а третья шайба окажется в начале координат:

$$\begin{cases} \omega t = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ L + v_{3x} t = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдем

$$L_k = -\frac{v_{3x} 2\pi k}{\omega} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2\pi k l}{v_0} = \frac{2\pi m_1 l}{m_1 + m_2} k = \frac{2\pi}{3} lk, \ k \in \mathbb{N}.$$

В данном случае столкновения как такового не происходит, потому что относительная скорость шайб 2 и 3 в момент их встречи равна нулю, следовательно, при подобном касании скорости шайб не меняются. В лабораторной системе отсчета скорости после удара определяются выражениями:

$$\begin{cases} v_1 = v_0, \\ v_2 = 0, \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

Столкновение шайбы 1 и 3 происходит, если шайба 1 достигает точки на оси Ox в момент, когда там оказывается шайба 3.

Запишем зависимость координат шайбы 1 и 3 от времени в системе центра масс:

$$\begin{cases} y_1 = y_C + (l - y_C)\cos(\omega t), \\ x_1 = (l - y_C)\sin(\omega t), \\ x_3 = L + v_{3x} t. \end{cases}$$

Определим моменты времени, в которые может произойти удар, из условия $y_1 = 0$:

$$y_C + (l - y_C)\cos(\omega t) = 0,$$

$$\cos(\omega t) = -\frac{y_C}{(l - y_C)} = -\frac{m_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2\pi k}{\omega}, \ k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin(\omega t) = \pm\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}}.$$

Теперь определим, на каком расстоянии должна находиться шайба 3, чтобы произошел удар:

$$(l - y_C)\sin(\omega t) = L + v_{3x} t,$$

$$\pm\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}} = L_k - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\left(\pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{2\pi k}{\omega}\right).$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} L_k^+ = \frac{\sqrt{3}}{3} l + \frac{l}{3}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1\right), \ k_1 = 0, 1, 2, \ldots \\ L_k^- = -\frac{\sqrt{3}}{3} l + \frac{l}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_2\right), \ k_2 = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Комментарий*: решения со знаком «плюс» соответствуют столкновениям в положительной области оси Ox, со знаком «минус» – в отрицательной.*

Рассматривать столкновение шайб 1 и 3 удобнее в лабораторной системе отсчета, поскольку в ней шайба 3 покоится. В силу того, что шайбы очень маленькие, можем считать удар шайб центральным.

Удар в положительной области оси Ox:

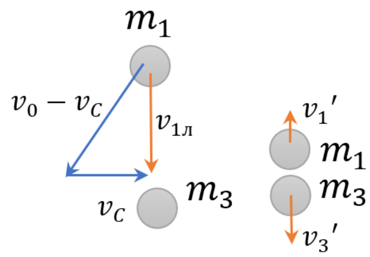


Рис. 2

Скорость шайбы 1 в лабораторной системе отсчета найдём по теореме косинусов:

$$v_1 = \sqrt{(v_0 - v_C)^2 + v_C^2 - 2v_c\,(v_0 - v_C)\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Заметим, что значения скоростей таковы, что треугольник, составленный из векторов скоростей является прямоугольным, т.е. вектор $\overrightarrow{v_1}$ направлен вертикально вниз.

Опишем соударение шайб 1 и 3 с использованием закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Учитывая тот факт, что удар центральный, закон сохранения импульса запишем сразу в проекции на направление движения первой шайбы:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_3 v_3', \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_3 v_3'^2}{2}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1' = v_1 \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_3} = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v_3' = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Направление скорости шайбы 1 меняется на противоположное, нить перестает быть натянута, значит скорость 2-ой шайбы больше не изменяется до тех пор, пока нить снова не натянется или не произойдет столкновение шайб 1 и 2.

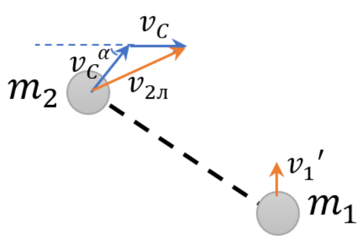


Рис. 3

Скорость шайбы 2 в лабораторной системе отсчета:

$$v_{2л} = \sqrt{v_C^2 + v_C^2 + 2v_C^2\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Удар в отрицательной области оси Ox :

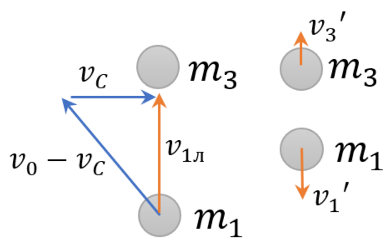


Рис. 4

Скорость шайбы 1 в лабораторной системе отсчета найдём по теореме косинусов:

$$v_1 = \sqrt{(v_0 - v_C)^2 + v_C^2 - 2v_C(v_0 - v_C)\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Заметим, что значения скоростей таковы, что треугольник, составленный из векторов скоростей является прямоугольным, т.е. вектор $\overrightarrow{v_1}$ направлен вертикально вниз.

В этом случае ситуация «симметричная»: вектор скорости $\overrightarrow{v_1}$ направлен вертикально вверх, выражения для законов сохранения энергии и импульса остаются такими же, модули скоростей после столкновения такие же, как и при ударе в положительной области оси Ox.

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v_3' = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Однако в подобном случае расчет конечных скоростей шайб 1 и 2 не является законченным:

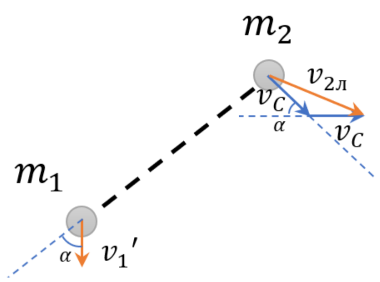


Рис. 5

Видим, что при дальнейшем движении нить должна была бы растянуться, что невозможно. Поскольку силы натяжения, действующие на шайбы, одинаковы по модулю и противоположны по направлению, выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, направленную вдоль нити. Компоненты импульса шайб, направленные перпендикулярно нити, не изменяются, так как нет сил, действующих на шайбы в направлении, перпендикулярном нити. Полная энергия системы также не изменяется.

$$\begin{cases} m_2 v_C \sin\alpha - m_1 v_1' \cos\alpha = m_1 v_{1\parallel} + m_2 v_{2\parallel}, \\ \frac{m_1(v_1'\cos\alpha)^2}{2} + \frac{m_2(v_C\sin\alpha)^2}{2} = \frac{m_1 v_{1\parallel}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2\parallel}^2}{2}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{1\parallel} = \frac{13\sqrt{3}v_0}{54}, \\ v_{2\parallel} = \frac{\sqrt{3}v_0}{54}. \end{cases}$$

Заметим на данном этапе, что после подобного взаимодействия нить перестает быть натянутой, следовательно скорости шайб 1 и 2 останутся постоянными до тех пор, пока нить снова не натянется.

С учетом того, что $v_{1\perp} = v_1'\sin\alpha = \frac{v_0}{6}$, $v_{2\perp} = v_C + v_C\cos\alpha = \frac{v_0}{2}$, получаем окончательно:

$$\begin{cases} v_1'' = \sqrt{v_{1\parallel}^2 + v_{1\perp}^2} = \frac{7\sqrt{3}v_0}{27}, \\ v_2'' = \sqrt{v_{2\parallel}^2 + v_{2\perp}^2} = \frac{\sqrt{183}v_0}{27}. \end{cases}$$

Ответ:

$$1)\text{При } L_k = \frac{2\pi}{3}lk,\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} v_1 = v_0, \\ v_2 = 0, \\ v_3 = 0. \end{cases}$$

$$2)\text{При } L_k^+ = \frac{\sqrt{3}}{3}l + \frac{l}{3}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1\right),\ k_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\sqrt{3}}{9}v_0, \\ v_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0, \\ v_3' = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

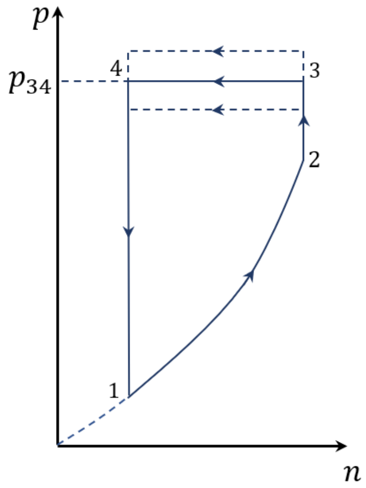
$$3)\text{При } L_k^- = -\frac{\sqrt{3}}{3}l + \frac{l}{3}\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1\right),\ k_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{cases} v_1'' = \frac{7\sqrt{3}v_0}{27}, \\ v_2'' = \frac{\sqrt{183}v_0}{27}, \\ v_3'' = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0. \end{cases}$$

Критерии

1. Описано движение шайб 1 и 2 в системе центра масс (+1 балл).
2. Правильно записано условие столкновения со 2-ой шайбой, верно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).
3. Получены выражения для начального расстояния, на котором расположена 3-я шайба, при которых реализуется столкновение с первой шайбой (+1 балл).
4. Корректно рассмотрен абсолютно упругий удар (ЗСИ, ЗСЭ) в положительной области; отмечено, что нить перестает быть натянутой; правильно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).
5. Корректно рассмотрен абсолютно упругий удар (ЗСИ, ЗСЭ) в отрицательной области; отмечено, что нить натягивается после удара и происходит «удар» шайб 1 и 2 о нить; правильно получены скорости трех шайб после этого столкновения (+1 балл).

Задача 3. На $(p;n)$-диаграмме, где n - концентрация газа, изображен циклический процесс, проводимый с $\nu = 1$ моль идеального одноатомного газа ($\gamma = 5/3$). Найдите отношение $V_{\max}/V_{\min}$ максимального объёма газа в данном процессе к минимальному, если известно, что участок 1-2 адиабатический, имеется возможность настраивать тепловой двигатель так, чтобы давление p_{34} на участке 3-4 менялось в широком диапазоне, а максимально возможный КПД данного циклического процесса равен $\eta_{\max} = 31\%$.



Возможное решение

Введем обозначения:

$$k = \frac{V_{\max}}{V_{\min}},$$
$$s = \frac{p_{34}}{p_1}.$$

Процесс 1–2 — адиабатический, уравнение этого процесса в координатах $(p;n)$ записывается в виде:

$$p = \alpha n^{\gamma},$$
$$\frac{n_2}{n_1} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = k^{\gamma}.$$

Рассчитаем КПД данного циклического процесса с использованием введенных обозначений. Отметим, что теплота подводилась на участках 2–3 — изохорный процесс и 3–4 — изобарный процесс.

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}\left(sp_1 - k^{\gamma}p_1\right)V_{\min}\,,$$
$$Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = \frac{5}{2}sp_1(k-1)V_{\min}\,.$$

Количество отведенной теплоты определим из участка 4–1 — изохорный процесс:

$$|Q_{41}| = \frac{3}{2}\left(sp_1 - p_1\right)kV_{\min}.$$

Отсюда КПД циклического процесса:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23} + Q_{34}} = 1 - \frac{\frac{3}{2}(s-1)k}{\frac{3}{2}\left(s - k^{\gamma}\right) + \frac{5}{2}(s(k-1))} = 1 - \frac{3(s-1)k}{3\left(s - k^{\gamma}\right) + 5(s(k-1))}.$$

Видим, что максимальный КПД реализуется при $s \to \infty$:

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{3k}{3 + 5(k-1)}.$$

Отсюда находим, что отношение максимального к минимальному объёму:

$$k = 3.$$

Ответ:

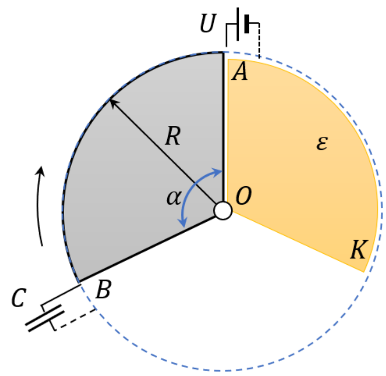
$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = 3.$$

Критерии

1. Правильно изображен график процеса в $(p; V)$–координатах (+1 балл).
2. Получены правильные выражения для теплот на каждом из участков циклического процесса (либо аналогичные, позволяющие найти эти теплоты) (+1 балл).
3. Получено правильное выражение для КПД циклического процесса (+1 балл).
4. Правильно записано условие максимальности КПД (+1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Задача 4. Электрогенератор состоит из двух параллельных металлических пластин, в виде двух секторов круга радиуса $R = 50$ см с центральным углом $\alpha = 120°$, закрепленных на непроводящем валу (обозначен O на рисунке) на расстоянии $d = 2{,}0$ см друг над другом. В точках A и B при помощи двух пар проводящих щёток (одна сверху, вторая снизу) подключены источник постоянного напряжения $U = 220$ В и изначально незаряженный конденсатор ёмкостью $C = 1{,}0$ мФ соответственно. В секторе AOK с центральным углом α расположен неподвижный слой диэлектрика толщины немного меньшей d, диэлектрическая проницаемость которого равна $\varepsilon = 6{,}5$. Двигатель вращает вал с пластинами, его мощность регулируется таким образом, чтобы вращение вала было равномерным. Период одного полного оборота генератора составляет $T = 10$ с.

Какой заряд q_1 передается конденсатору таким генератором за первый полный оборот из состояния, изображенного на рисунке? Какой максимальный заряд $q_{\max}$ может быть передан конденсатору в такой системе? Какова максимальная мощность $P_{\max}$ двигателя, приводящего пластины генератора во вращение?



Возможное решение

1. Определим ёмкость C_0 конденсатора, состоящего из двух пластин, закрепленных на валу:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d}.$$

При первом контакте с источником практически мгновенно заряд пластин становится равным:

$$q_0 = C_0 U.$$

В момент, когда диэлектрик заполняет всё пространство между пластинами, ёмкость становится равной:

$$C' = \varepsilon C_0.$$

Заряд, накапливаемый пластинами за время контакта с источником, определяется выражением:

$$q_0{}' = C'U = \varepsilon C_0 U.$$

Важно заметить, что диэлектрик остаётся неподвижен, то есть при прохождении следующей трети круга ёмкость конденсатора уменьшится до исходного значения C_0, но при отключенном источнике изменения заряда пластин не произойдёт.

При первом контакте с незаряженным конденсатором заряд перераспределяется в соответствии с законом сохранения электрического заряда и условием равенства потенциалов пластин:

$$\begin{cases} {q_0}' = q + q_1, \\ \frac{q}{C_0} = \frac{q_1}{C}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{C{q_0}'}{C + C_0} = \frac{\varepsilon C C_0 U}{C + C_0} = 0{,}17 \text{ мкКл} .$$

2. Процесс зарядки конденсатора C заканчивается тогда, когда напряжение между его обкладками становится равным напряжению между пластинами сразу после покидания пластинами диэлектрика:

$$U_{\max} = \frac{q_0}{C_0} = \varepsilon U.$$

Следовательно, максимальный заряд, накопленный на конденсаторе, равен:

$$q_{\max} = CU_{\max} = \varepsilon CU = 1{,}4 \text{ Кл}.$$

3. Для того, чтобы поддерживать угловую скорость вращения вала и пластин постоянной, двигатель работает с некоторой мощностью. Помимо этого источник напряжения также совершает работу по переносу заряда. Уравнение энергетического баланса в таком случае выглядит следующим образом:

$$Pdt + Udq = dW_c.$$

Разобьём один полный оборот на несколько этапов, чтобы понять, в какой момент мощность двигателя максимальна.

Этап 1. *Первый контакт пластин и источника напряжения при $t = 0$.*

Так как сопротивления элементов пренебрежимо малы, то зарядка пластин происходит практически мгновенно. Работа, совершенная источником в этот момент, равна $A_{\text{ист}} = q_0 U$, энергия, запасенная в пластинах, составляет $W_{C0} = \frac{q_0 U}{2}$. Важно отметить, что половина работы источника в таком случае всё равно выделяется в виде теплоты на пусть и малом, но тем не менее существующем, сопротивлении проводов. Также в момент подключения пластин генератора к щеткам мог образоваться газоразрядный канал - искра, на которую также расходуется энергия, так что энергетический баланс всё равно будет соблюден.

Этап 2. *Первая треть полного оборота, диэлектрик частично заполняет конденсатор, $t \in \left(0; \frac{1}{3}T\right)$.*

Ёмкость конденсатора возрастает при подключенном источнике напряжения, т.е. напряжение на пластинах поддерживается постоянным, заряд обкладок растёт.

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \omega t R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 (\alpha - \omega t) R^2}{2d}.$$

За малый промежуток времени емкость возрастает на величину:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \omega R^2}{2d} dt.$$

Заряд, прошедший через источник за это время:

$$dq = UdC.$$

Энергетический баланс на данном этапе:

$$P_{1/3}(t)dt + U^2 dC = \frac{U^2}{2} dC.$$

Отсюда мощность двигателя:

$$P_{1/3} = -\frac{U^2}{2}\frac{dC}{dt} = -\frac{U^2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{4d} = -4{,}6\ \text{мкВт}.$$

Видим, что мощность двигателя постоянна и отрицательна, двигателю приходится «притормаживать» пластины для поддержания равномерного вращения.

Этап 3. *Контакт с источником потерян, диэлектрик постепенно покидает пространство между пластинами,* $t \in \left[\frac{1}{3}T; \frac{2}{3}T\right)$.

На данном этапе ёмкость конденсатора уменьшается при отключенном источнике напряжения, работа двигателя расходуется на изменение энергии конденсатора.

Для удобства рассмотрения процесса введем переменную $\tau = t - \frac{T}{3}$, являющуюся временем, отсчитываемым от начала третьего этапа.

$$C(\tau) = \frac{\varepsilon_0\omega\tau R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon(\alpha-\omega\tau)R^2}{2d}.$$

Изменение емкости за малый промежуток времени $d\tau$:

$$dC = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{2d}d\tau.$$

Энергетический баланс на данном этапе:

$$P(\tau)d\tau = dW_C,$$

$$P(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{(\varepsilon C_0 U)^2}{2C^2}\frac{dC}{d\tau} = \frac{\left(\varepsilon\frac{\varepsilon_0\alpha R^2}{2d}U\right)^2}{2\left(\frac{\varepsilon_0\omega\tau R^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon(\alpha-\omega\tau)R^2}{2d}\right)^2}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{2d} =$$
$$= \frac{\varepsilon^2\alpha^2U^2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{4d}\frac{1}{(\varepsilon\alpha-(\varepsilon-1)\omega\tau)^2}.$$

Очевидно, что мощность двигателя должна быть максимальна в момент $\tau = \frac{T}{3}$, то есть в самом конце этапа 3.

$$P_{\max} = \frac{U^2\varepsilon_0\varepsilon^2(\varepsilon-1)\omega R^2}{4d} = \varepsilon^2\left|P_{1/3}\right| = 0{,}20\ \text{мВт}.$$

Этап 4. $t \in \left[\frac{2T}{3}; T\right]$.

Весь оставшийся промежуток времени мощность для поддержания вращения не нужна.

Ответ:

$$1) q_1 = 0{,}17\ \text{мкКл};\quad 2) q_{\max} = 1{,}4\ \text{Кл};\quad 3) P_{\max} = 0{,}20\ \text{мВт}.$$

Критерии

1. Получено правильное выражение и численное значение для заряда, переданного конденсатору за один полный оборот (+1 балл).

2. Получено правильное выражение и численнное значение для максимального заряда на конденсаторе (+1 балл).
3. Правильно записано условие энергетического баланса на каждом из промежутков периода (+1 балл).
4. Получены правильные выражения для механической мощности генератора на каждом из промежутков периода (+1 балл).
5. Получено правильное выражение и численное значение для максимальной механической мощности генератора (+1 балл).

Задача 5. При исследовании оптических свойств прозрачного шара радиуса R была получена зависимость угла отклонения $\theta(x)$ луча от своего первоначального направления. Измерения проводили во всем доступном диапазоне $x \in [0, R]$. Лаборант построил график этой зависимости, отложив по вертикали угол отклонения θ в градусах, а по горизонтали – расстояние x в см, однако вечером уборщица порвала его и выбросила. Наутро лаборант в ужасе обнаружил только два кусочка этого графика, а таблицу измерений так и не смог найти. Помогите лаборанту подготовить отчет по сохранившейся информации: определите показатель преломления n вещества шара, радиус R шара, расстояние l от центра шара до точки, в которой фокусируется пучок световых лучей, испущенный вдоль диаметра шара на малых расстояниях $x \ll R$.

Примечание: *при малых углах α [рад] $\ll 1$ справедлива формула $\sin\alpha \approx \alpha$ [рад].*

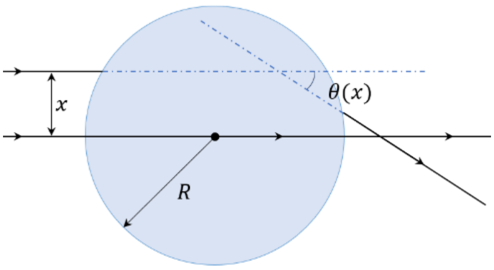


Рис. к задаче 5.

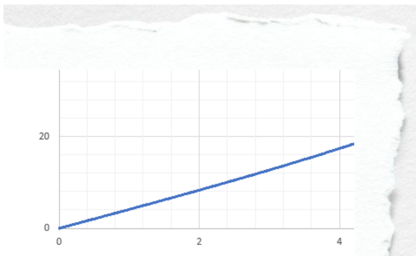


Рис.(a) Левый нижний угол

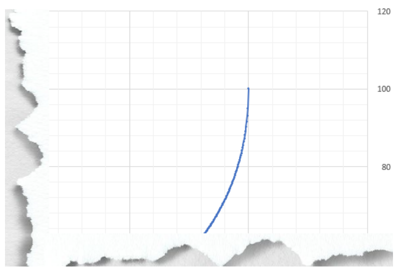


Рис.(b) Правый верхний угол

Возможное решение

Построим ход произвольного луча:

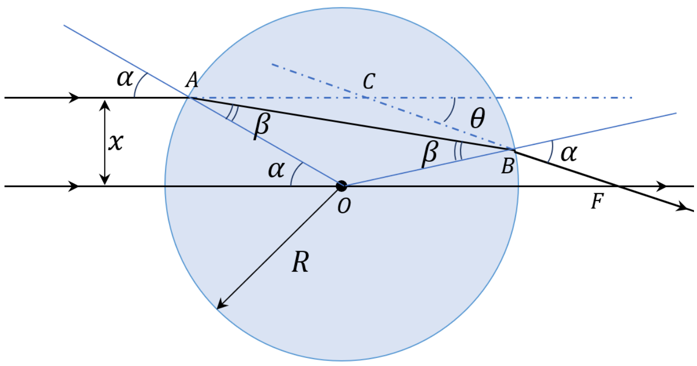


Рис. 1

В соответствии с законом преломления

$$\sin\alpha = n\sin\beta.$$

Из геометрических соображений:

$$\sin\alpha = \frac{x}{R}.$$

Заметим, что угол θ является внешним углом треугольника $\triangle ABC$, следовательно, он равен сумме двух несмежных с ним углов:

$$\theta(x) = \angle CAB + \angle CBA = 2(\alpha - \beta) = 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{x}{nR}\right)\right).$$

Рассмотрим внимательно имеющиеся у нас отрывки графиков. На одном из них мы видим верхнюю правую часть графика, а также значение максимального угла отклонения:

$$\theta_{\max} \approx 100^\circ.$$

Максимальный угол отклонения наблюдается в случае, если $x \to R$:

$$\theta_{\max} = \theta(x \to R) = 2\left(1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Определим из этого соотношения показатель преломления вещества прозрачного шара:

$$n = \frac{1}{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta_{\max}}{2}\right)} \approx 1{,}56.$$

Теперь рассмотрим часть графика, соответствующую малым $x \ll R$. Видим, что эта часть графика практических линейна, то есть зависимость $\theta(x)$ имеет вид:

$$\theta(x) = kx.$$

Угловой коэффициент найдём из графика:

$$k = 4{,}0\frac{^\circ}{\text{см}} = 0,070\frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

При малых x, угол α [рад] $\ll 1$, следовательно можно воспользоваться примечанием:

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{x}{R}.$$

В таком случае закон преломления запишется в виде $\alpha = n\beta$, при этом угол отлклонения луча:

$$\theta(x) = 2(\alpha - \beta) = \frac{2x}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to k = \frac{2}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда радиус шара:

$$R = \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 10 \text{ см}.$$

Для определения расстояния, на котором фокусируются лучи, отметим, что треугольник $\triangle OFC-$ равнобедренный.

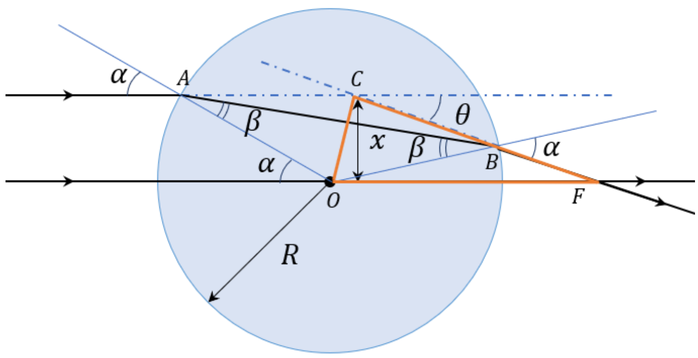


Рис. 2

В самом деле, CO является общей высотой равнобедренных треугольников $\triangle ACB$ и $\triangle AOB$, а следовательно и биссектрисой углов при вершинах этих треугольников. Отсюда

$$\angle OCF = \frac{1}{2}(\pi - 2(\alpha - \beta)) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta,$$
$$\angle COF = \pi - \angle CFO - \angle OCF = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta.$$

Высота $\triangle OFC$, опущенная из вершины C равна x, а боковые стороны равны $CF = OF = l$. Площадь этого треугольника:

$$S = \frac{1}{2}l^2 \sin\theta = \frac{1}{2}xl \to l = \frac{x}{\sin\theta} \approx \frac{x}{\theta}.$$

Подставляя выражение для θ, получаем:

$$l = \frac{x}{\frac{2x}{R}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{Rn}{2(n-1)} = 14 \text{ см}.$$

Отдельно стоит отметить, что полученное выражение справедливо только для случаев $n \leq 2$ (подумайте, почему?).

Альтернативный способ найти расстояние, на котором фокусируются лучи

Рассмотрим $\triangle OBF : \angle OBF = \pi - \alpha, \angle BFO = \theta, OB = R, OF = l$. По теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin(\pi - \alpha)}.$$

Подставим выражение для угла θ, воспользуемся формулой приведения $(\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha)$ и учтем, что углы малые и $\alpha = n\beta$.

$$\frac{R}{2(n\beta - \beta)} = \frac{l}{n\beta} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

Альтернативный способ №2 найти расстояние, на котором фокусируются лучи

Воспользуемся формулой «шлифовщика» или законом преломления на сферической поверхности. Параллельный пучок лучей соответствует бесконечно удаленному источнику. Преломление на первой сферической поверхности:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R}, \ a_1, \to \infty$$
$$b_1 = \frac{nR}{n-1}.$$

Вторая поверхность находится на расстоянии $2R$ от первой, поэтому $a_2 = -(b_1 - 2R)$. Знак «минус» соответствует сходящемуся пучку световых лучей, падающих на вторую поверхность.

Второе преломление:

$$\frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{-R} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{R(2-n)}{2(n-1)}.$$

Искомое расстояние:

$$l = b_2 + R = \frac{R(2-n)}{2(n-1)} + R = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

Ответ:

$$1) n \approx 1{,}56; \quad 2) R = 10 \text{ см}; \quad 3) l = 14 \text{ см}.$$

Критерии

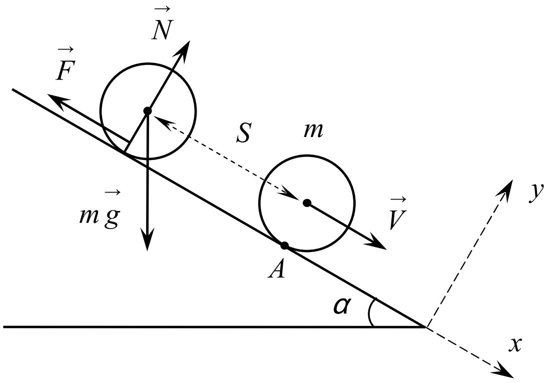
1. Правильно построен ход лучей в прозрачном шаре (+1 балл).
2. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численное значения для показателя преломления вещества шара (+1 балл).
3. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численное значения для радиуса шара (+1 балл).
4. Из корректных физических соображений правильно получено выражение и численное значения для фокусного расстояния в параксиальном приближении (+2 балла).

Задача 1. Тонкий обруч, масса которого равномерно распределена по его длине, поставили на шероховатую наклонную плоскость и отпустили без толчка. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$. Считая, что обруч скатывается без проскальзывания, найдите следующие величины:

1. Ускорение a центра обруча.
2. Минимальное значение коэффициента трения μ между обручем и плоскостью, при котором возможно движение без поскальзывания.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

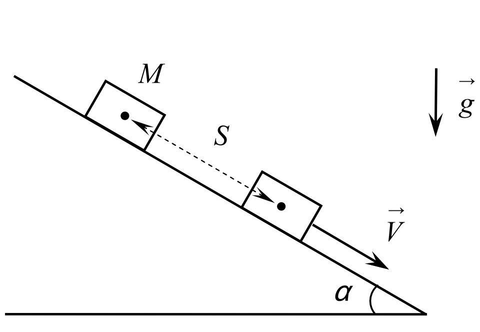
Возможное решение



1. Обозначим через m массу обруча. На обруч действуют сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила $\overrightarrow{N}$ нормальной реакции наклонной плоскости и сила трения $\overrightarrow{F}$. При движении без проскальзывания мгновенная скорость $\overrightarrow{V_A}$ точки A, в которой обруч касается плоскости, равна нулю. В этом случае $\overrightarrow{F}$ является силой трения покоя. Её мгновенная мощность, равная скаляльному произведению $\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{V_A}$ обращается в нуль. Поэтому сила $\overrightarrow{F}$ не совершает работу и механическая энергия обруча сохраняется. Сохранение механической энергии можно обосновать по-другому, сказав, что если в точке A нет проскальзывания, то там не выделяется тепло.

Пусть центр обруча прошёл расстояние S вдоль наклонной плоскости. Его перемещение по вертикали равно $H = S\sin\alpha$. Скорость центра в этот момент обозначим через V. Воспользуемся известным фактом, что кинетическая энергия обруча, катящегося без проскальзывания, равна mV^2. Элементарное доказательство этого утверждения приведено, например, на официальном сайте олимпиады "Курчатов" (заключительный этап 2022 года, задача 2 для 11 класса). По закону сохранения энергии имеем:

$$mgH = mV^2 \quad \longrightarrow \quad V^2 = g\,S\sin\alpha\,.$$



Рассмотрим теперь вспомогательную задачу. Брусок массой M соскальзывает из состояния покоя по гладкой плоскости, наклонённой к горизонту под углом α. Хорошо известно, что брусок движется с постоянным ускорением

$$a = g\,\sin\alpha\,.$$

Предположим, что брусок прошёл расстояние S вдоль наклонной плоскости, опустившись по вертикали на высоту $H = S\sin\alpha$ и разогнавшись до скорости V. Имеем:

$$MgH = \frac{MV^2}{2} \quad \longrightarrow \quad V^2 = 2gS\sin\alpha\,.$$

Как видно, выражение для квадрата скорости центра обруча получается отсюда заменой $g \to g/2$. Сделав такую замену в формуле для ускорения бруска, находим ускорение центра обруча:

$$a = \frac{g\,\sin\alpha}{2} = 2{,}5\ \text{м/с}^2\,.$$

Этот результат можно получить по-другому, воспользовавшись тем фактом, что линейная зависимость V^2 от S характерна для равноускоренного движения. Полагая $V = a\,t$ и $S = a\,t^2/2$, получаем:

$$a^2\,t^2 = \frac{a\,t^2}{2}\,g\,\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad a = \frac{g\,\sin\alpha}{2}\,.$$

2. Запишем для обруча уравнение второго закона Ньютона в системе отсчёта, связанной с наклонной плоскостью:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\,.$$

Направим ось x вдоль ускорения центра обруча, а ось y перпендикулярно плоскости вверх. В проекциях на эти оси имеем:

$$ma = mg\,\sin\alpha - F\,, \qquad 0 = N - mg\,\cos\alpha\,.$$

Выразим отсюда силы F и N:

$$F = mg\,\sin\alpha - ma = \frac{mg\,\sin\alpha}{2}\,, \qquad N = mg\,\cos\alpha\,.$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \le \mu N\,.$$

Отсюда получаем значения коэффициента трения, при которых обруч будет скатываться без проскальзывания:

$$\frac{mg\,\sin\alpha}{2} \le \mu mg\,\cos\alpha \quad \longrightarrow \quad \mu \ge \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\,.$$

Минимальное значение μ равно:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\,.$$

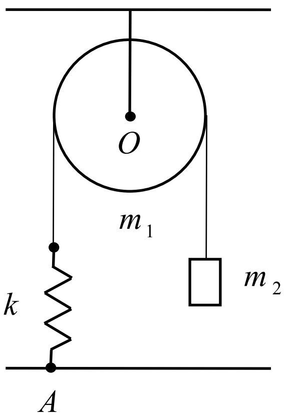
Ответ:

$$a = \frac{g\,\sin\alpha}{2} = 2{,}5\ \text{м/с}^2\,, \qquad \mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\,.$$

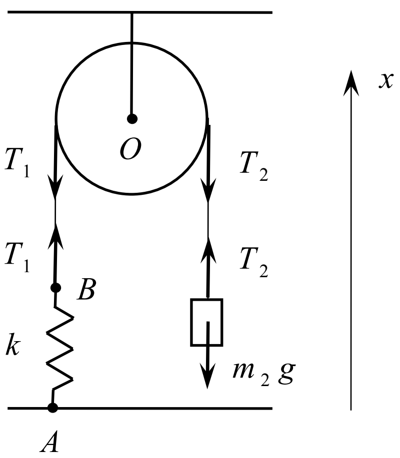
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие на обруч (+1 балл).
2. Дано обоснование сохранения механической энергии обруча (+1 балл).
3. Правильно записана кинетическая энергия обруча (+2 балла).
4. Правильно записан закон сохранения энергии (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона (+1 балл).
7. Правильно найдены силы трения и нормальной реакции (+1 балл).
8. Получено правильное неравенство для коэффициента трения (+1 балл).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для минимального коэффициента трения (+1 балл).

Задача 2. К потолку прикреплён блок в виде тонкого обруча с невесомыми спицами. Масса обруча $m_1 = 1{,}5$ кг равномерно распределена по его длине. Обруч может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Через обруч переброшена невесомая и нерастяжимая нить, к правому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Левый конец нити привязан к невесомой вертикальной пружине, закреплённой на полу в точке A. Жёсткость пружины $k = 50$ Н/м. Считая, что при движении нить не скользит по обручу, найдите период T малых вертикальных колебаний груза около положения равновесия.



Возможное решение



1. Найдём удлинение пружины x_p в положении равновесия. Обозначим через T_1 и T_2 силы натяжения левого и правого вертикальных участков нити. В положении равновесия имеем:

$$T_1 = k\,x_p\,, \qquad T_2 = m_2 g\,.$$

Так как обруч не вращается, $T_1 = T_2$. Получаем:

$$k\,x_p = m_2 g \quad\longrightarrow\quad x_p = \frac{m_2 g}{k}\,.$$

2. Выведем систему из положения равновесия. Например, сместим точку B, в которой нить прикреплена к пружине, вниз на расстояние x_0 и отпустим без толчка. Величина x_0 предполагается малой по сравнению с x_p, так что при дальнейшем движении пружина остаётся растянутой и силы натяжения нити не обращаются в нуль. Начальное удлинение пружины равно $(\,x_p - x_0\,)$. Потенциальную энергию груза в поле тяжести примем за нуль в положении равновесия. Учитывая, что при смещении точки B вниз на расстояние x_0 груз поднимается на такое же расстояние вверх, запишем начальную энергию системы:

$$E_0 = \frac{k\,(\,x_p - x_0\,)^2}{2} + m_2 g x_0 = \frac{k\,x_p^2}{2} - k\,x_p\,x_0 + \frac{k\,x_0^2}{2} + m_2 g x_0\,.$$

Здесь имеем:

$$-k\,x_p\,x_0 + m_2 g x_0 = -k\,\frac{m_2 g}{k}\,x_0 + m_2 g x_0 = 0\,.$$

Получаем:

$$E_0 = \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2}\,.$$

Запишем теперь энергию системы E в некотором произвольном положении. Направим ось x вертикально вверх и будем отсчитывать координату груза x от положения равновесия. Удлинение пружины равно $(\,x_p - x\,)$. Обозначим скорость груза через V. Поскольку нить не скользит по обручу, скорости всех его точек также равны V. Получаем:

$$E = \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{k\,(\,x_p - x\,)^2}{2} + m_2 g x = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} - k\,x_p\,x + \frac{k\,x^2}{2} + m_2 g x\,.$$

Здесь имеем:

$$-k\,x_p\,x + m_2 g x = -k\,\frac{m_2 g}{k}\,x + m_2 g x = 0\,.$$

Получаем:

$$E = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,.$$

Так как нить не скользит по обручу, механическая энергия системы сохраняется (не переходит в тепло):

$$E = E_0 \quad\longrightarrow\quad \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2}\,,$$

$$\frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,x_0^2}{2}\,.$$

Получившееся равенство выглядит как закон сохранения энергии для груза массой $M = m_1 + m_2$, колеблющегося на пружине жёсткости k. Величина x_0 играет роль начального смещения груза. Таким образом, можно утверждать, что в нашем случае период малых колебаний системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 1{,}3\ \text{с}\,.$$

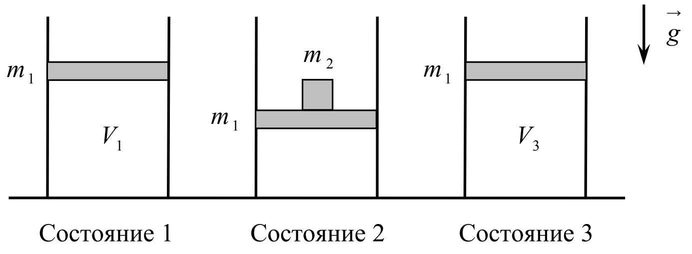
Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 1{,}3\ \text{с}\,.$$

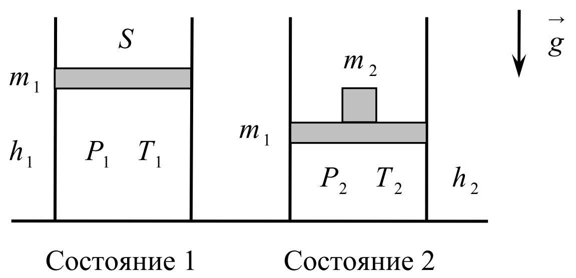
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие в положении равновесия (+1 балл).
2. Правильно найдено удлинение пружины в положении равновесия (+1 балл).
3. Правильно записана начальная энергия системы (+2 балла).
4. Правильно записана энергия в промежуточном состоянии (+2 балла).
5. Дано обоснование сохранения механической энергии системы (+1 балл).
6. Получено правильное уравнение баланса энергии для малых колебаний (+2 балла).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для периода колебаний (+1 балл).

Задача 3. В камере, откачанной до глубокого вакуума, расположен высокий вертикальный цилиндр, закрытый сверху поршнем массой m_1. Под поршнем, в объёме $V_1 = 5$ л, находится гелий. В начальном состоянии 1 давление гелия уравновешивает давление поршня. На поршень ставят груз массой m_2, и гелий переходит в новое равновесное состояние 2. После этого груз убирают, и гелий переходит в конечное равновесное состояние 3. Найдите разность $\Delta V = V_3 - V_1$, где V_3 — объём гелия в конечном состоянии. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, отношение масс груза и поршня $k = m_2 / m_1 = 0{,}1$.



Возможное решение



1. Рассмотрим переход газа из состояния 1 в состояние 2. Обозначим через P_1 и T_1 давление и температуру газа в состоянии 1, через P_2 и T_2 давление и температуру в состоянии 2. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V \,(\, T_2 - T_1 \,) + A_{12}\,,$$

ν — количество молей газа, C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A_{12} — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня с грузом:

$$(\, m_1 + m_2 \,)\, g \,(\, h_2 - h_1 \,) = A_{12}\,,$$

h_1 и h_2 — значения высоты поршня над дном цилиндра в состояниях 1 и 2. Обозначим через S площадь поршня и рассмотрим условия механического равновесия:

$$P_1 S = m_1 g\,, \qquad P_2 S = (\, m_1 + m_2 \,)\, g\,.$$

Запишем также уравнение состояния газа:

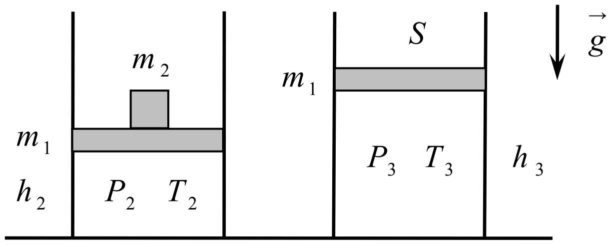
$$P_1 S\, h_1 = \nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_1 = m_1 g\, h_1\,,$$

$$P_2 S\, h_2 = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_2 = (\, m_1 + m_2 \,)\, g\, h_2\,,$$

R — универсальная газовая постоянная. Используя полученные соотношения, выразим h_2 через h_1:

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\, \nu R T_2 - \nu R T_1 \,) + (\, m_1 + m_2 \,)\, g \,(\, h_2 - h_1 \,)\,,$$

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,(\, m_1 + m_2 \,)\, g\, h_2 - m_1 g\, h_1 \,) + (\, m_1 + m_2 \,)\, g \,(\, h_2 - h_1 \,)\,.$$



После некоторых алгебраических преобразований получаем:

$$h_2 = \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) h_1 \,,$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении, $k = m_2/m_1$.

2. Рассмотрим переход газа из состояния 2 в состояние 3. Обозначим через P_3, T_3 и h_3 давление, температуру и высоту поршня над дном цилиндра в состоянии 3. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V\,(\,T_3 - T_2\,) + A_{23} \,,$$

A_{23} — работа газа. Уравнение баланса энергии для поршня:

$$m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,) = A_{23} \,,$$

Условие механического равновесия и уравнение состояния газа:

$$P_3 S = m_1 g \,, \qquad P_3 S\, h_3 = \nu R T_3 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_3 = m_1 g\, h_3 \,.$$

Выразим h_3 через h_2:

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,\nu R T_3 - \nu R T_2\,) + m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,) \,,$$

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,m_1 g\, h_3 - (\,m_1 + m_2\,)\, g\, h_2\,) + m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,) \,.$$

Отсюда получаем:

$$h_3 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) h_2 \,,$$

3. Используя полученные результаты, выразим h_3 через h_1:

$$h_3 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) h_2 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) \cdot \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) h_1 \,.$$

Полагая $V_1 = S\, h_1$ и $V_3 = S\, h_3$, находим относительное изменение объёма:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_3 - V_1}{V_1} = \frac{h_3 - h_1}{h_1} = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) \cdot \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) - 1 \,.$$

Упростим это выражение для одноатомного газа. В этом случае $C_V/C_P = 3/5$. Получаем:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \left(1 + \frac{3\,k}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3\,k}{5\,(\,1+k\,)}\right) - 1 \,.$$

Окончательно:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{6\,k^2}{25\,(\,1+k\,)} \quad \longrightarrow \quad \Delta V = \frac{6\,k^2\, V_1}{25\,(\,1+k\,)} = 11 \text{ см}^3 \,.$$

В заключение отметим, что, строго говоря, в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку переходы между состояниями 1, 2 и 3 являются необратимыми. Использование уравнения адиабаты даёт $\Delta V = 0$. Реально эта разность отлична от нуля, хотя и мала по сравнению с начальным объёмом V_1. Малость ΔV обусловлена малостью отношения масс груза и поршня.

Ответ:

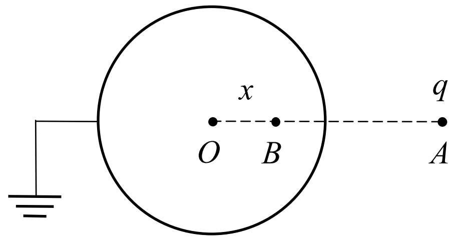
$$\Delta V = \frac{6\,k^2\, V_1}{25\,(\,1+k\,)} = 11 \text{ см}^3 \,.$$

Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода 1–2 (+1 балл).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня с грузом (+1 балл).
3. Правильно записаны условия механического равновесия и уравнение состояния для состояний 1 и 2 (+1 балл).
4. Правильно найдена высота поршня в состоянии 2 (+1 балл).
5. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода 2–3 (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
7. Правильно записаны условие механического равновесия и уравнение состояния для состояния 3 (+1 балл).
8. Правильно найдена высота поршня в состоянии 3 (+2 балла).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для разности объёмов (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар с центром в точке O и радиусом $R = 2$ см заземлён. На расстоянии $L = 4$ см от центра шара, в точке A, расположен точечный заряд $q = 40$ нКл.

1. Найдите заряд шара Q. Числовой ответ выразите в нанокулонах.
2. Заряд Q, распределённый по поверхности шара, можно заменить точечным зарядом той же величины, расположенным в некоторой точке B, лежащей внутри шара на отрезке OA. Найдите расстояние $x = OB$ исходя из условия, что потенциал электрического поля, создаваемого точечными зарядами q и Q, расположенными в точках A и B, обращается в нуль в любой точке поверхности шара.
3. Используя результаты предыдущих пунктов, найдите силу F, действующую со стороны шара на заряд q. Числовой ответ выразите в миллиньютонах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9{\cdot}10^9$ м/Ф.



Возможное решение

1. Индуцированный заряд Q распределён по поверхности шара. Для того чтобы найти его, рассмотрим потенциал в центре шара O:

$$\varphi_0 = k\,\frac{q}{L} + \varphi'_0\,,$$

φ'_0 — потенциал электрического поля, создаваемого индуцированным зарядом. Разобьём поверхность шара на малые элементы и перенумеруем их индексом i. Заряд элемента с номером i обозначим через ΔQ_i. Сумма всех таких зарядов равна заряду шара:

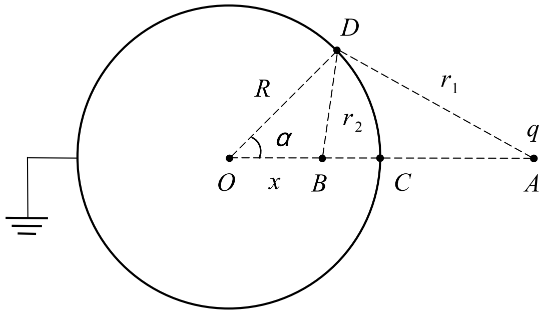
$$\sum_i \Delta Q_i = Q\,.$$

Учитывая, что все элементы находятся на расстоянии R от центра шара, получаем:

$$\varphi'_0 = \sum_i k\,\frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R}\sum_i \Delta Q_i = k\,\frac{Q}{R}\,, \qquad \varphi_0 = k\,\frac{q}{L} + k\,\frac{Q}{R}\,.$$

Приравнивая потенциал φ_0 нулю, находим заряд шара:

$$\varphi_0 = 0 \quad\longrightarrow\quad Q = -\frac{qR}{L} = -20 \text{ нКл}\,.$$



2. Поместим заряд Q в точку B и найдём расстояние x, рассмотрев сначала простейшую точку C, в которой отрезок OA пересекает поверхность шара. Потенциал электрического поля в этой точке равен:

$$\varphi_C = k\,\frac{q}{L-R} + k\,\frac{Q}{R-x} = k\,q\left(\frac{1}{L-R} - \frac{R}{L\,(R-x)}\right).$$

Приравнивая φ_C нулю, получаем:

$$\varphi_C = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L-R} = \frac{R}{L\,(\,R-x\,)}\,, \qquad LR - Lx = LR - R^2\,, \qquad x = \frac{R^2}{L}\,.$$

Покажем теперь, что найденное значение x обеспечивает равенство нулю потенциала в любой точке поверхности шара. Возьмём произвольную точку D на поверхности. Обозначим через α угол между радиусом OD и отрезком OA, через r_1 и r_2 длины отрезков AD и BD. По теореме косинусов имеем:

$$r_1^2 = L^2 + R^2 - 2LR\cos\alpha\,,$$

$$r_2^2 = R^2 + x^2 - 2R\,x\cos\alpha = R^2 + \frac{R^4}{L^2} - 2R\cdot\frac{R^2}{L}\cdot\cos\alpha = \frac{R^2}{L^2}\,(\,L^2 + R^2 - 2LR\cos\alpha\,)\,,$$

$$r_2^2 = \frac{R^2}{L^2}\,r_1^2 \quad \longrightarrow \quad r_2 = \frac{R}{L}\,r_1\,.$$

Потенциал электрического поля в точке D равен:

$$\varphi_D = k\,\frac{q}{r_1} + k\,\frac{Q}{r_2} = k\,\frac{q}{r_1} - k\,\frac{qR}{L}\cdot\frac{L}{R\,r_1} = k\,\frac{q}{r_1} - k\,\frac{q}{r_1} = 0\,.$$

Таким образом,

$$x = \frac{R^2}{L} = 1\ \text{см}\,.$$

3. Поместив заряд Q в точку B, находим абсолютную величину силы F, с которой шар притягивает заряд q:

$$F = \frac{k\,|\,Q\,|\,q}{(\,L-x\,)^2} = \frac{k\,R\,q^2}{L\,(\,L-(\,R^2/L\,)\,)^2} = \frac{k\,q^2R\,L}{(\,L^2-R^2\,)^2} = 8\ \text{мН}\,.$$

Ответ:

$$Q = -\frac{qR}{L} = -20\ \text{нКл}\,, \qquad x = \frac{R^2}{L} = 1\ \text{см}\,, \qquad F = \frac{k\,q^2R\,L}{(\,L^2-R^2\,)^2} = 8\ \text{мН}\,.$$

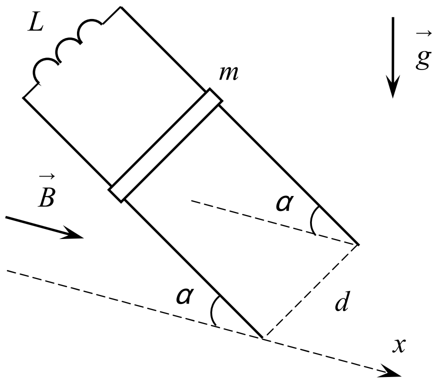
Критерии

1. Правильно записан потенциал в центре шара (+2 балла).
2. Указано, что потенциал заземлённого шара равен нулю (+1 балл).
3. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда шара (+1 балл).
4. Доказано существование точки B, в которую можно стянуть заряд шара (+4 балла).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для расстояния x (+1 балл).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы F (+1 балл).

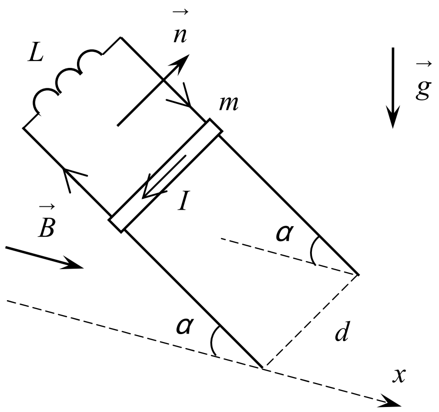
Задача 5. Два параллельных гладких металлических рельса, расстояние между которыми $d =$ 20 см, установлены под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и находятся в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, направленной горизонтально вдоль оси x. Сверху рельсы соединены проводом через катушку с индуктивностью $L = 5$ мГн. На рельсы кладут горизонтальную планку массой $m = 20$ г и отпускают её без толчка. Найдите следующие величины:

1. Силу тока I, текущего через планку в момент её отрыва от рельсов.
2. Расстояние S, пройденное планкой вдоль рельсов к моменту отрыва.
3. Скорость планки V в момент отрыва.

Сопротиление всех проводников не учитывайте. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Направим единичный вектор нормали $\overrightarrow{n}$ к плоскости контура вверх. Положительное направление обхода контура связано с направлением $\overrightarrow{n}$ правилом буравчика (против часовой стрелки, если смотреть сверху). Обозначим через $\overrightarrow{V}$ мгновенную скорость планки. За малое время Δt планка проходит вдоль рельсов расстояние $\Delta S = V \Delta t$. Приращение магнитного потока через площадь контура равно:

$$\Delta \Phi = \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{n}\,d\,\Delta S = B\,V d\,\sin\alpha\,\Delta t\,.$$

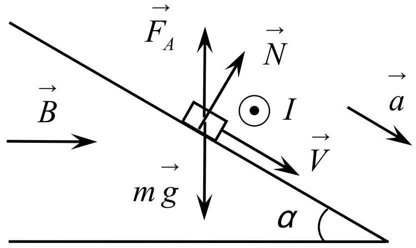
ЭДС индукции, возникающая в контуре:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -B\,V d\,\sin\alpha\,.$$

Знак минус означает, что ЭДС индукции действует в направлении, противоположном положительному направлению обхода, то есть по часовой стрелке, если смотреть сверху. В том же направлении течёт ток.

На планку действуют сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила Ампера $\overrightarrow{F_A}$, направленная вертикально вверх, и сила $\overrightarrow{N}$, равная сумме двух нормальных реакций со стороны рельсов. Обозначим через $\overrightarrow{a}$ ускорение планки и запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{N}\,.$$



Проецируя на направление вектора $\vec{N}$, получаем:

$$0 = -mg\cos\alpha + F_A\cos\alpha + N \quad \longrightarrow \quad N = (\,mg - F_A\,)\cos\alpha\,.$$

Сила Ампера равна:

$$F_A = B\,Id\,,$$

I — мгновенное значение силы тока. При движении планки её скорость возрастает. Вслед за ней растут ЭДС индукции, сила тока и сила Ампера. Сила N при этом уменньшается и в некоторый момент времени обращается в нуль. В этот момент планка отрывается от рельсов. Полагая $N = 0$, находим силу тока в момент отрыва:

$$N = 0 \quad \longrightarrow \quad F_A = mg\,, \quad B\,Id = mg \quad \longrightarrow \quad I = \frac{mg}{B\,d} = 2\ \text{А}\,.$$

2. Помимо ЭДС индукции, возникающей в движущейся планке, в катушке действует ЭДС самоиндукции. Если не учитывать сопротивление контура, то эти ЭДС следует приравнять друг другу:

$$|\,\varepsilon\,| = L\,\frac{\Delta\,I}{\Delta\,t} \quad \longrightarrow \quad B\,Vd\,\sin\alpha = L\,\frac{\Delta\,I}{\Delta\,t}\,.$$

Здесь $\Delta\,I$ — приращение силы тока за малое время $\Delta\,t$. Перепишем это равенство так:

$$B\cdot(\,V\Delta\,t\,)\cdot d\,\sin\alpha = L\Delta\,I\,, \qquad B\cdot\Delta\,S\cdot d\,\sin\alpha = L\Delta\,I\,.$$

Суммируя такие равенства по всем малым промежуткам времени до момента отрыва и учитывая, что в начале движения сила тока равнялась нулю, получаем:

$$B\,Sd\,\sin\alpha = L\,I \quad \longrightarrow \quad S = \frac{L\,I}{B\,d\,\sin\alpha} = \frac{mgL}{(\,B\,d\,)^2\,\sin\alpha} = 20\ \text{см}\,.$$

3. Запишем уравнение баланса энергии в контуре:

$$\frac{L\,I^2}{2} = A_1\,,$$

A_1 — работа ЭДС индукции. Для планки имеем:

$$\frac{mV^2}{2} - mgh = A_2\,,$$

V — скорость планки при отрыве, $h = S\sin\alpha$, A_2 — работа силы Ампера. Сложим эти равенства:

$$\frac{L\,I^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - mg\,S\sin\alpha = A_1 + A_2\,.$$

Покажем, что сумма работ A_1 и A_2 равна нулю:

$$A_1 + A_2 = 0\,.$$

Для этого рассмотрим элементарные работы за малое время $\Delta\,t$. За это время в направлении действия ЭДС индукции по контуру протекает заряд $\Delta\,q = I\Delta\,t$. Элементарная работа ЭДС индукции равна:

$$\delta\,A_1 = |\,\varepsilon\,|\,\Delta\,q = B\,Vd\,\sin\alpha\,I\,\Delta\,t\,.$$

Для элементарной работы силы Ампера имеем:

$$\delta A_2 = F_A \cdot \Delta S \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = -B I d \cdot V \Delta t \cdot \sin\alpha\,.$$

Как видно, сумма элементарных работ равна нулю:

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0\,.$$

Отсюда следует равенство нулю суммы полных работ $A_1 + A_2$. В принципе, этот результат можно обосновать по–другому, сказав, что ЭДС индукции и сила Ампера возникают вследствие действия силы Лоренца на свободные носители заряда в движушейся планке. Поскольку сила Лоренца не совершает работу, сумма работ ЭДС индукции и силы Ампера должна равняться нулю. Так или иначе, получаем закон сохранения энергии для системы, состоящей из движущейся планки и катушки индуктивности:

$$\frac{L I^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - mg S \sin\alpha = 0\,.$$

Отсюда находим скорость планки в момент отрыва:

$$\frac{mV^2}{2} = mg S \sin\alpha - \frac{L I^2}{2} = mg \cdot \frac{mgL}{(B d)^2 \sin\alpha} \cdot \sin\alpha - \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{mg}{B d}\right)^2 = \frac{L}{2}\left(\frac{mg}{B d}\right)^2\,,$$

$$V = \frac{g\sqrt{mL}}{B d} = 1 \text{ м/с}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{mg}{B d} = 2 \text{ А}\,, \qquad S = \frac{mgL}{(B d)^2 \sin\alpha} = 20 \text{ см}\,, \qquad V = \frac{g\sqrt{mL}}{B d} = 1 \text{ м/с}\,.$$

Критерии

1. Правильно найдены величина и направление ЭДС индукции (+1 балл).
2. Правильно указаны силы, действующие на планку, и записано уравнение второго закона Ньютона (+1 балл).
3. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока при отрыве (+1 балл).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для расстояния, пройденного планкой до отрыва (+3 балла).
5. Дано обоснование сохранения энергии для системы, состоящей из планки и катушки индуктивности (+3 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для скорости планки при отрыве (+1 балл).

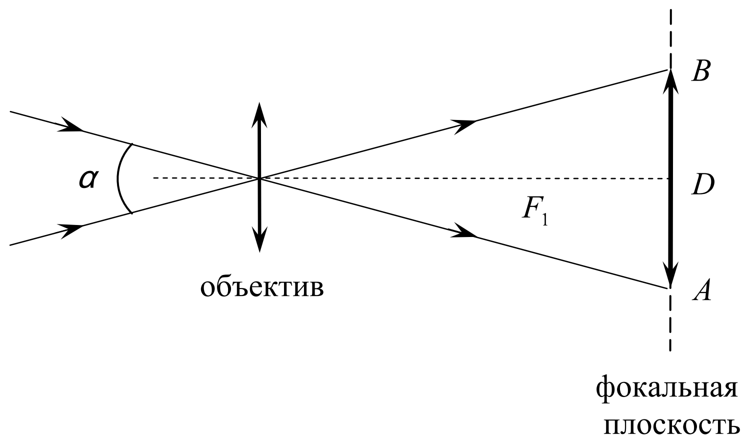
Задача 6. Простейший телескоп–рефрактор, собранный по схеме Кеплера, состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 90$ см, и окуляра — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 3$ см. Главные оптические оси линз совпадают. Рассматривая в телескоп очень далёкий объект (например, планету), наблюдатель видит увеличенное перевёрнутое изображение. Сначала планету изучает близорукий наблюдатель. При этом его глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d_1 = 15$ см. Затем его сменяет дальнозоркий наблюдатель, глаз которого аккомодируется на расстояние наилучшего зрения $d_2 = 45$ см. Найдите следующие величины:

1. Расстояние x, на которое дальнозоркий наблюдатель должен передвинуть окуляр. Числовой ответ выразите в миллиметрах и округлите до целого значения.
2. Разность $\Delta k = k_1 - k_2$, где k_1 и k_2 — угловые увеличения для близорукого и дальнозоркого наблюдателей. Угловое увеличение $k = \beta/\alpha$, где β — угол, под которым наблюдатель видит объект в телескоп, α — угол, под которым он видит тот же объект невооружённым глазом.

Считайте, что в обоих случаях глаз наблюдателя расположен вплотную к окуляру и все углы малы.

Подсказка: объектив телескопа строит изображение планеты в фокальной плоскости, а наблюдатель рассматривает это изображение в окуляр как в лупу.

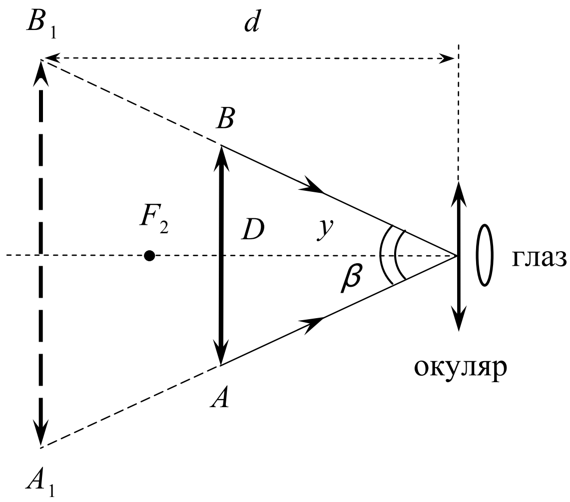
Возможное решение



1. Так как планета является протяжённым источником света, мысленно разобьём её видимую поверхность на малые элементы, каждый из которых будем считать светящейся точкой. Поскольку планета находится очень далеко, можно считать, что от каждой точки её поверхности в объектив идёт параллельный пучок лучей. Объектив собирает каждый такой пучок в точку, лежащую в фокальной плоскости. Эти точки образуют первичное изображение планеты в виде некоторого круга. Для каждого параллельного пучка достаточно рассмотреть один луч, идущий без преломления через оптический центр объектива. На рисунке показаны два таких луча, идущие от верхнего и нижнего краёв планеты. Угол α между этими лучами есть угловой диаметр планеты. Изображения краёв получаются в точках A и B, в которых лучи пересекают фокальную плоскость. Точка A — изображение вехнего края, точка B — нижнего. Таким образом, объектив строит действительное перевёрнутое изображение планеты. Найдём его диаметр D, равный длине отрезка AB. Используя малость угла α, получаем:

$$\frac{D}{2} = F_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx F_1 \cdot \frac{\alpha}{2} \quad \longrightarrow \quad D = F_1\,\alpha\,.$$

2. Первичное изображение играет роль источника света для наблюдателя, который рассматривает его в окуляр как в лупу. При этом окуляр располагается на расстоянии $y < F_2$ от первичного изображения и строит мнимое изображение, которое также имеет форму круга. На рисунке диаметр этого круга показан пунктирным отрезком A_1B_1. Точки A_1 и B_1 являются мнимыми изображениями точек A и B и лежат на продолжениях вспомогательных лучей, проведённых из A и B через оптический центр окуляра. Свет, выходящий из окуляра и попадающий в глаз наблюдателя, устроен так, как будто он испускается предметом, совпадающим с мнимым изображением. Если считать, что глаз расположен вплотную к окуляру, то расстояние от мнимого изображения до окуляра равно расстоянию наилучшего зрения d. Таким образом, при наблюдении в телескоп наблюдатель видит перевёрнутое изображение планеты под углом зрения β.



Найдём расстояние y, угол β и угловое увеличение телескопа k. По формуле линзы, записанной для окуляра, получаем:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{d}\,, \qquad y = \frac{d\,F_2}{d + F_2}\,.$$

Для малого угла β имеем:

$$\frac{\beta}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{D}{2\,y} \quad \longrightarrow \quad \beta = \frac{D}{y} = F_1\,\alpha\left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{d}\right)\,.$$

Угловое увеличение равно:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d}\,.$$

3. Для близорукого и дальнозоркого наблюдателей имеем:

$$y_1 = \frac{d_1 F_2}{d_1 + F_2}\,, \qquad y_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 + F_2}\,;$$

$$k_1 = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d_1}\,, \qquad k_2 = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d_2}\,.$$

Из формулы

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{d}$$

следует, что при увеличении d расстояние y также увеличивается. Поэтому $y_2 > y_1$. Это означает, что дальнозоркий наблюдатель должен выдвинуть окуляр на расстояние

$$x = y_2 - y_1 = \frac{d_2 F_2}{d_2 + F_2} - \frac{d_1 F_2}{d_1 + F_2} = \frac{F_2^2\,(\,d_2 - d_1\,)}{(\,d_1 + F_2\,)\,(\,d_2 + F_2\,)} = 3\ \text{мм}\,.$$

Разность угловых увеличений равна:

$$\Delta\,k = k_1 - k_2 = \frac{F_1}{d_1} - \frac{F_1}{d_2} = 4\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{F_2^2\,(\,d_2 - d_1\,)}{(\,d_1 + F_2\,)\,(\,d_2 + F_2\,)} = 3\ \text{мм}\,,$$

$$\Delta\,k = \frac{F_1}{d_1} - \frac{F_1}{d_2} = 4\,.$$

Критерии

1. Правильно найден диаметр первичного изображения (+1 балл).
2. Правильно указано положение окуляра (+1 балл).
3. Правильно указано положение мнимого изображения (+1 балл).
4. Правильно записана формула линзы для окуляра (+1 балл).
5. Правильно найдено расстояние от первичного изображения до окуляра (+1 балл).
6. Правильно найден угол зрения, под которым наблюдатель видит мнимое изображение (+2 балла).
7. Правильно найдено угловое увеличение телескопа (+1 балл).
8. Получены правильные буквенный и числовой ответы для смещения окуляра x (+1 балл).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для разности увеличений (+1 балл).