



ДВИ МГУ по математике 2024. 4 поток

1. Дана функция $f(x) = \frac{(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2 - x^2}$. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее числа $f(2024)$.
2. Вычислите сумму $\frac{11}{1+2} + \frac{11}{1+2+3} + \frac{11}{1+2+3+4} + \dots + \frac{11}{1+2+\dots+10}$.
3. Решите неравенство $\log_9(x + \frac{1}{3}) - \log_3(x - \frac{1}{3}) \geq 1$.
4. Решите уравнение $\cos 2x + \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}{2} = 1$.
5. В окружности Ω вписан четырёхугольник $ABCD$. На стороне BC отмечена точка E таким образом, что $CD = CE = 1$ и $\angle AED = 30^\circ$. Найдите радиус окружности Ω , если известно, что $\angle ACD = 25^\circ$ и $\angle ACB = 75^\circ$.
6. Многочлен $f(x)$ второй степени имеет действительные коэффициенты. Попарно различные действительные числа a, b, c удовлетворяют условиям $f(a) = bc$, $f(b) = ca$, $f(c) = ab$. Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{f(a+b+c)},$$

при условии, что $f(a+b+c) \neq 0$.

7. Дан куб со стороной 1, основаниями $ABCD$, $A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA' , BB' , CC' и DD' . На рёбрах $A'B'$, $B'B$, BC , CD , DD' , $D'A'$ отмечены точки K , L , M , N , O , P соответственно. Найдите отношение, в котором плоскость KMO делит объём куба, если известно, что $\angle A'AK = \angle LAK$, $\angle BAM = \angle NAM$, $\angle DAO = \angle PAO$ и что $A'K + LB = BM + ND = DO + PA' = \frac{5}{4}$.