

ВАРИАНТ 246

1. Найдите наименьшее целое число, превосходящее число  $\log_2(3 + 2\sqrt{2}) - \log_2(1 + \sqrt{2})$ .

2. Найдите количество всех упорядоченных четвёрок чисел  $a, b, c, d$ , таких что числа  $a^2 - ab + b^2$ ,  $b^2 - bc + c^2$ ,  $c^2 - cd + d^2$  равны друг другу, если известно, что каждое из чисел  $a, b, c, d$  равно либо 1, либо 2, либо 3, а число  $a$  является среди них наибольшим.

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}(2x-5) + \log_{4x^2-20x+25}(x^2-2x+1) - \log_{2x-5}(4x^2-20x+25) \leq 0.$$

4. Решите уравнение  $\operatorname{tg} x - 4 \sin x = \sqrt{3}$ .

5. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  является тупым. На стороне  $BC$  отмечена точка  $D$  таким образом, что  $AC = CD$ . При этом окружность, описанная около треугольника  $ACD$ , касается прямой  $AB$  в точке  $A$ . На прямой  $AD$  отмечена точка  $E$  таким образом, что  $CE = EA = AB$ . Найдите отношение  $BC : AB$ .

6. Многочлен  $f(x) = x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + 81$  с действительными  $a$  и  $b$  допускает разложение

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)$$

с некоторыми действительными  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Найдите все возможные значения  $f(5)$ .

7. Расстояние от середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды до боковой грани равно  $\sqrt{2}$ , а до бокового ребра —  $\sqrt{3}$ . Найдите объём пирамиды.

ВАРИАНТ 247

1. Найдите целое число, задаваемое выражением  $16^{(1+\sin(\pi/3))(1-\cos(\pi/6))}$ .
2. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что число  $a + 2b$  делится на 5, а число  $a + 5b$  делится на 2. Найдите наименьшее значение суммы  $a + b$ .
3. Решите неравенство  $\log_x \log_7 (7^{2x} - 20) \geq 1$ .
4. Решите уравнение  $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$ .
5. На биссектрисе  $AL$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$ . Пусть  $A', B', C'$  — точки пересечения окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , с прямыми  $AM, BM, CM$  соответственно, отличные от точек  $A, B, C$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $AB$  и  $A'C'$  и пусть  $Q$  — точка пересечения отрезков  $AC$  и  $A'B'$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $APQ$ , если известно, что  $BC : PQ = 3$ .
6. Действительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношениям

$$a + b + c = 4 \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 8.$$

Найдите наибольшее возможное значение  $c$ .

7. Дан куб  $ABCD A' B' C' D'$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA', BB', CC', DD'$ . На рёбрах  $A'B', BC, CD, A'D'$  отмечены соответственно точки  $K, L, M, N$ , так что  $A'K = BL$  и  $A'N = DM$ . Найдите все возможные значения угла между прямыми пересечения плоскости  $A'BD$  с плоскостями  $AKM$  и  $ANL$ .