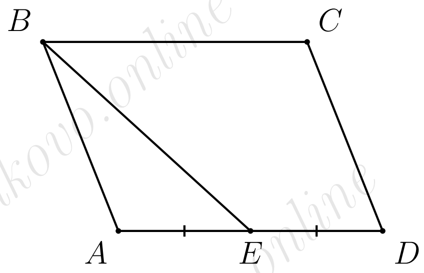
Решения задач резервного ЕГЭ 2024

Содержание

Часть 1

№1.1 *(Дальний восток)*

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 60. Точка E — середина стороны AD. Найдите площадь треугольника ABE.



Ответ

15

Решение

Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$ из точки B на сторону AD. Тогда

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = 2AE \cdot h.$$

С другой стороны

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot h = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{60}{4} = 15$$

№2.1 *(Дальний восток)*

Даны векторы $\vec{a}(3;4)$ и $\vec{b}(5;2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ

10

Решение

Найдем координаты вектора $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$:

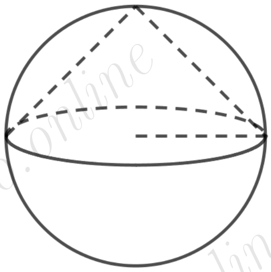
$$\vec{r}\,((3+5);(4+2)) = \vec{r}(8;6)$$

Тогда длина вектора $\vec{r}$ равна

$$\sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10.$$

№3.1 *(Дальний восток)*

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 48. Найдите объём конуса.



Ответ

12

Решение

Поскольку радиус основания конуса равен радиусу шара, это значит, что основанием конуса служит большой круг шара, то есть круг, который содержит в себе центр шара. Таким образом, высота такого конуса так же равна радиусу шара R. По формуле объёма конуса получим

$$V_{\text{конус}} = \frac{1}{3}\pi R^3$$

При этом объём шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, то есть в 4 раза больше:

$$V_{\text{конус}} = \frac{V_{\text{шар}}}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

№4.1 *(Дальний восток)*

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 8 спортсменов из Швеции, 12 из Норвегии, 7 из Аргентины и 5 из Австралии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает первым, окажется из Швеции.

Ответ

0,25

Решение

Общее количество спортсменов, принимающих участие в соревнованиях, равно

$$8 + 12 + 7 + 5 = 32$$

Первым мог выступать только один из 32 спортсменов, и все спортсмены с одинаковыми вероятностями могли выступать первыми.

Тогда вероятность того, что первым будет выступать спортсмен из Швеции, равна

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

№5.1 *(Дальний восток)*

В коробке 9 синих, 6 красных и 10 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ

0,18

Решение

Будем считать, что фломастеры выбираются по очереди, тогда нам подходят два случая.

1. Сначала оказался выбран красный фломастер, а затем синий. Вероятность первым выбрать красный равна $\frac{6}{25}$, а выбрать вторым синий при условии, что первым был выбран красный, равна $\frac{9}{24}$ (в знаменателе 24, так как после первого выбора фломастеров стало на 1 меньше). Итого
$$p_{\text{КС}} = \frac{6}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{6 \cdot 9}{25 \cdot 24} = \frac{9}{25 \cdot 4} = 0{,}9$$
2. Сначала оказался выбран синий фломастер, а затем красный. Вероятность первым выбрать синий равна $\frac{9}{25}$, а выбрать вторым красный при условии, что первым был выбран синий, равна $\frac{6}{24}$ (в знаменателе 24, так как после первого выбора фломастеров стало на 1 меньше). Итого
$$p_{\text{СК}} = \frac{9}{25} \cdot \frac{6}{24} = \frac{9 \cdot 6}{25 \cdot 24} = \frac{9}{25 \cdot 4} = 0{,}9$$

Сложив вероятности интересующих нас случаев, получаем 0,18.

№6.1 *(Дальний восток)*

Решите уравнение $\log_2(2 - x) = \log_2 11$.

Ответ

-9

Решение

$$\log_2(2 - x) = \log_2 11$$
$$2 - x = 11$$
$$x = -9$$

№7.1 *(Дальний восток)*

Найдите значение выражения $\left(\sqrt{63} - \sqrt{28}\right) \cdot \sqrt{7}$.

Ответ

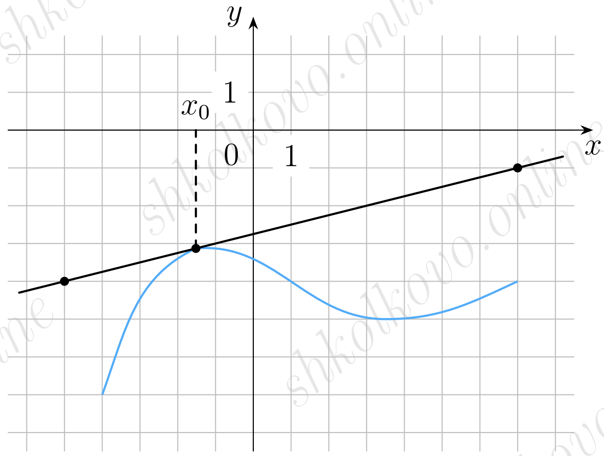
7

Решение

$$\left(\sqrt{63}-\sqrt{28}\right)\cdot\sqrt{7}=\left(\sqrt{9\cdot 7}-\sqrt{4\cdot 7}\right)\cdot\sqrt{7}=\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7$$

№8.1 *(Дальний восток)*

На рисунке изображёны график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

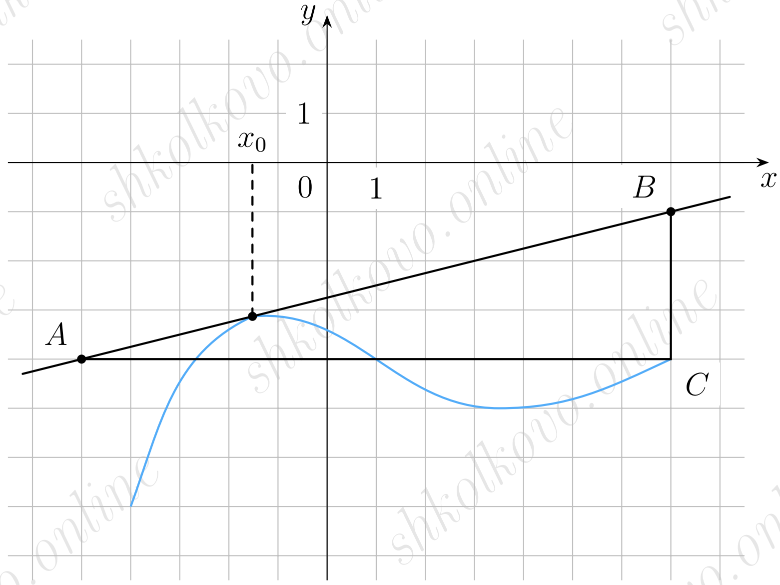


Ответ

0,25

Решение

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$:



Так как $f'(x_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс, то имеем:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

№9.1 *(Дальний восток)*

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 96 мг. Период его полураспада составляет 3 мин.

Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг.

Ответ

15

Решение

Подставим известные значения в формулу:

$$3 = 96 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

$$2^{-\frac{t}{3}} = \frac{1}{32}$$

$$2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-5}$$

$$t = 15$$

№10.1 *(Дальний восток)*

На изготовление 39 деталей первый рабочий затрачивает на 10 часов меньше чем второй рабочий на изготовление 104 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Ответ

8

Решение

Пусть второй рабочий делает x деталей в час. Тогда первый делает $x+5$ деталей в час. Тогда по условию

$$\frac{39}{x+5} + 10 = \frac{104}{x}$$

$$\frac{39x + 10x(x+5) - 104(x+5)}{x(x+5)} = 0$$

$$\frac{39x + 10x^2 + 50x - 104x - 104 \cdot 5}{x(x+5)} = 0$$

$$\frac{10x^2 - 15x - 104 \cdot 5}{x(x+5)} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 104}{x(x+5)} = 0$$

Решим уравнение

$$2x^2 - 3x - 104 = 0$$

$$D = 9 + 832 = 841 = 29^2$$

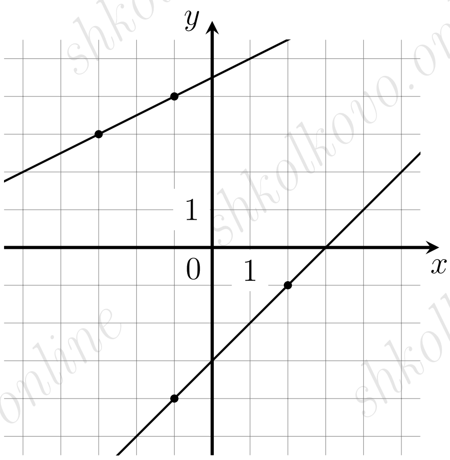
$$x = \frac{3 \pm 29}{4}$$

$$\left[\begin{aligned} &x = -6{,}5 \\ &x = 8 \end{aligned}\right.$$

По смыслу задачи $x > 0$, поэтому $x = 8$.

№11.1 *(Дальний восток)*

На рисунке изображены графики двух функций вида $y = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Найдите x_0.



Ответ

15

Решение

Пусть $y = k_1x + b_1$ — уравнение первой прямой, $y = k_2x + b_2$ — уравнение второй прямой.

Заметим, что первая прямая проходит через точки $(-1; 4)$ и $(-3; 3)$. Если прямая проходит через точку на плоскости, то координаты этой точки обращают уравнение этой прямой в верное равенство. Тогда получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 4 = k_1 \cdot (-1) + b_1 \\ 3 = k_1 \cdot (-3) + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -k_1 + b_1 \\ 1 = 2k_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 4 + k_1 \\ k_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{9}{2} \\ k_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой имеет вид

$$y = \frac{x + 9}{2}$$

Вторая прямая проходит через точки $(2;-1)$ и $(-1;-4)$. Следовательно, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -1 = k_2 \cdot 2 + b_2 \\ -4 = k_2 \cdot (-1) + b_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 = 2k_2 + b_2 \\ 3 = 3k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = -(2k_2 + 1) \\ k_2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_2 = -3 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Значит, уравнение второй прямой имеет вид

$$y = x - 3$$

Обе прямые проходят через точку $A(x_0; y_0)$ по условию, тогда имеем систему:

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{x_0 + 9}{2} \\ y_0 = x_0 - 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 - 3 = \frac{x_0 + 9}{2}$$

$$2x_0 - 6 = x_0 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 15$$

№12.1 *(Дальний восток)*

Найдите точку максимума функции $y = (10x - 3)\cos x - 10\sin x + 11$ на интервале $(0; 2\pi)$.

Ответ

0,3

Решение

Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = (10x - 3)' \cos x + (10x - 3) \cdot (\cos x)' - 10(\sin x)' =$$

$$= 10\cos x - (10x - 3)\sin x - 10\cos x = -(10x - 3)\sin x$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 10x - 3 = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0{,}3 \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков, учитывая, что в промежуток $(0; 2\pi)$ попадают нули производной $x = 0{,}3$ и $x = \pi$

Следовательно, $x = 0{,}3$ является точкой максимума на указанном промежутке, так как в этой точке производная меняет знак с «+» на «-» при проходе слева направо.

Задача №13. Уравнение

№13.1 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ

а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{7\pi}{3}$

Решение

а)

$$3\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\frac{3\left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} - \frac{5\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{3 - 3\cos^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\cos^2 x} = 0$$

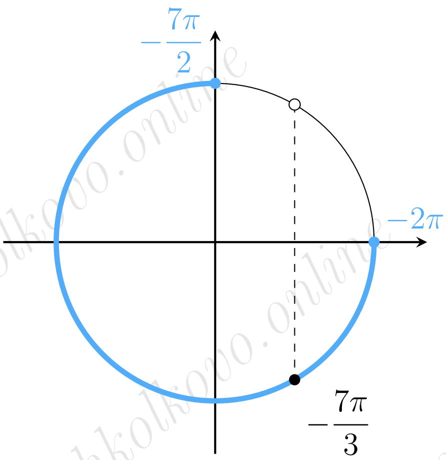
$$\frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 3)}{\cos^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &2\cos x = 1 \\ &\cos x = -3 \end{aligned}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$ лежит точка $-\frac{7\pi}{3}$.

№13.2 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ

а) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) -2π

Решение

а)

$$7\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$$

$$\frac{7\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{7 - 7\cos^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{6\cos^2 x + \cos x - 7}{\cos^2 x} = 0$$

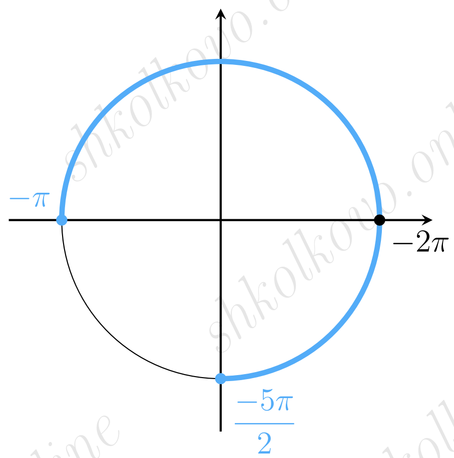
$$\frac{6(\cos x - 1)(6\cos x + 7)}{\cos^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\cos x = 1 \\ &\cos x = \frac{7}{6} \end{aligned}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ лежит точка -2π.

№13.3 *(Дальний восток)*

а) Решите уравнение $5\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) 3π

Решение

а)

$$5\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$$

$$\frac{5\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$$

$$\frac{5\left(1 - \cos^2 x\right)}{\cos^2 x} + \frac{3\cos x}{\cos^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{5-5\cos^2 x+3\cos x+3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$\frac{2\cos^2 x-3\cos x-5}{\cos^2 x}=0$$

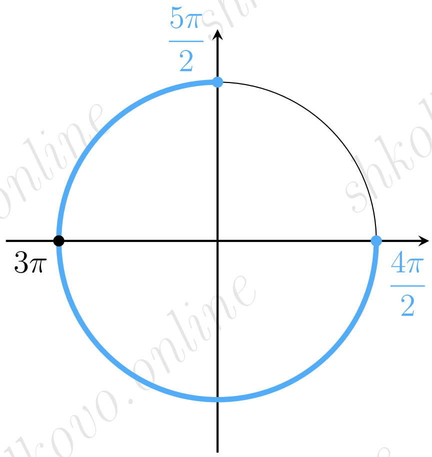
$$\frac{(2\cos x-5)(\cos x+1)}{\cos^2 x}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&\cos x=2{,}5\\&\cos x=-1\end{aligned}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}$$

$$\cos x=-1$$

$$x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$ лежит точка 3π.

№13.4 *(Центр)*

а) Решите уравнение $2\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{5}{\cos x}+4=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{10\pi}{3}$

Решение

а)

$$2\operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0$$

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0$$

$$\frac{2\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x} + \frac{5\cos x}{\cos^2 x} + \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{2-2\cos^2 x + 5\cos x + 4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{2\cos^2 x + 5\cos x + 2}{\cos^2 x} = 0$$

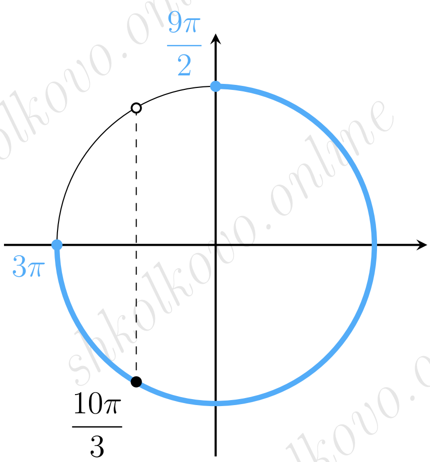
$$\frac{2(\cos x + 2)(\cos x + 0.5)}{\cos^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\cos x = -2 \\ &\cos x = -0{,}5 \end{aligned}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos x = -0{,}5$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ лежит точка $\frac{10\pi}{3}$.

Задача №14. Стереометрия

№14.1 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 24$ и $BC = 4\sqrt{2}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 7$, $SB = 25$ и $SD = 9$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Ответ

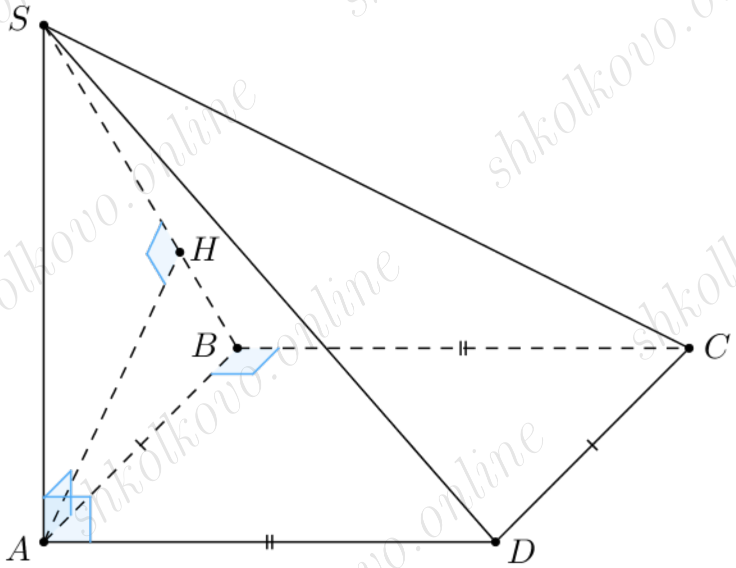
б) 6,72

Решение

а) Рассмотрим треугольники SAB и SAD. В них

$$SB^2 = 625 = 576 + 49 = AB^2 + SA^2$$
$$SD^2 = 81 = 32 + 49 = BC^2 + SA^2 = AD^2 + SA^2$$

Таким образом, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники SAB и SAD прямоугольные, следовательно, $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, значит, $SA \perp (ABD)$.



б) Проведем высоту AH в треугольнике SAB.

Заметим, что $BC \perp SA$, так как $SA \perp (ABD)$, и $BC \perp AB$, так как $ABCD$ — прямоугольник. Тогда $BC \perp (SAB)$.

Значит, $BC \perp AH$. Также $AH \perp SB$. Тогда $AH \perp (SBC)$. Таким образом, AH — расстояние от A до (SBC).

В прямоугольном треугольнике SAB :

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6{,}72$$

№14.2 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$ и $SD = \sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Ответ

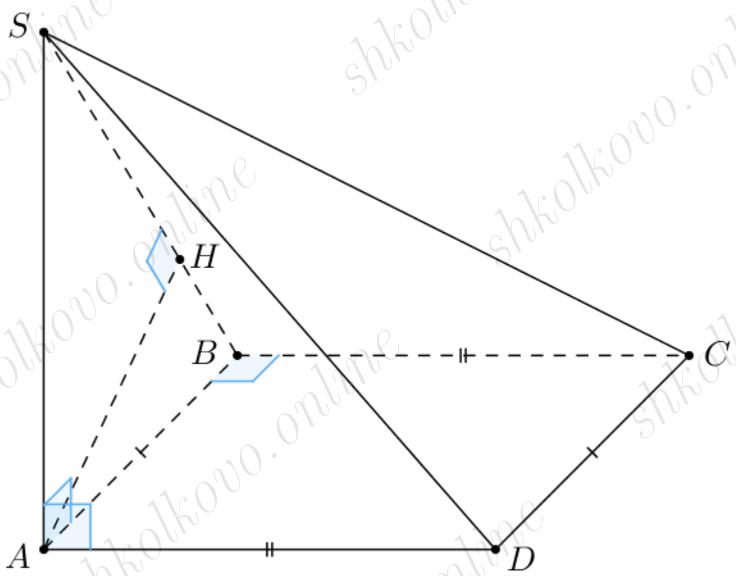
б) $\dfrac{\sqrt{105}}{6}$

Решение

а) Рассмотрим треугольники SAB и SAD. В них

$$SB^2 = 12 = 5 + 7 = AB^2 + SA^2$$
$$SD^2 = 11 = 4 + 7 = BC^2 + SA^2 = AD^2 + SA^2$$

Таким образом, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники SAB и SAD прямоугольные, следовательно, $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, значит, $SA \perp (ABD)$.



б) Проведем высоту AH в треугольнике SAB.

Заметим, что $BC \perp SA$, так как $SA \perp (ABD)$, и $BC \perp AB$, так как $ABCD$ — прямоугольник. Тогда $BC \perp (SAB)$.

Значит, $BC \perp AH$. Также $AH \perp SB$. Тогда $AH \perp (SBC)$. Таким образом, AH — расстояние от A до (SBC).

В прямоугольном треугольнике SAB :

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

№14.3 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$ и $SD = 10$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Ответ

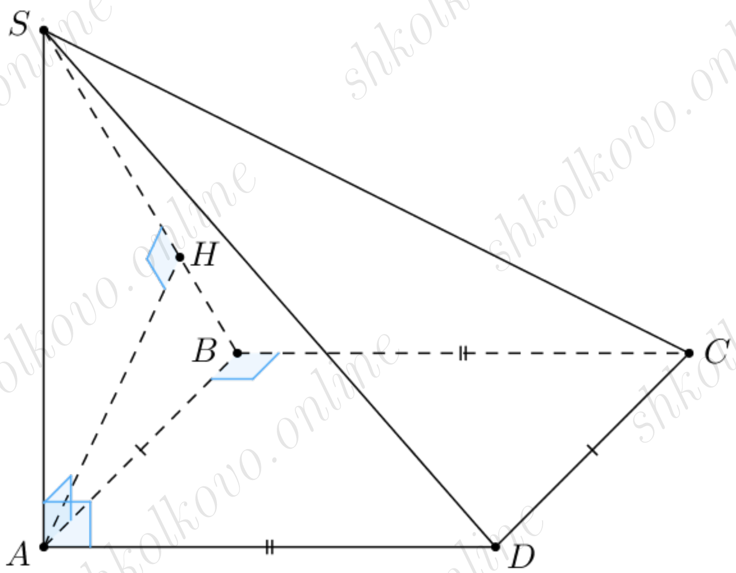
б) $\dfrac{60}{13}$

Решение

а) Рассмотрим треугольники SAB и SAD. В них

$$SB^2 = 169 = 144 + 25 = AB^2 + SA^2$$
$$SD^2 = 100 = 75 + 25 = BC^2 + SA^2 = AD^2 + SA^2$$

Таким образом, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники SAB и SAD прямоугольные, следовательно, $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$, значит, $SA \perp (ABD)$.



б) Проведем высоту AH в треугольнике SAB.

Заметим, что $BC \perp SA$, так как $SA \perp (ABD)$, и $BC \perp AB$, так как $ABCD$ — прямоугольник. Тогда $BC \perp (SAB)$.

Значит, $BC \perp AH$. Также $AH \perp SB$. Тогда $AH \perp (SBC)$. Таким образом, AH — расстояние от A до (SBC).

В прямоугольном треугольнике SAB :

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$$

№14.4 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = \sqrt{15}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 15$, $SB = 17$ и $SD = 4\sqrt{15}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости (SBC).

№14.5 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 24$ и $BC = 7$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{51}$, $SB = \sqrt{627}$ и $SD = 10$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

№14.6 *(Дальний восток)*

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 9$ и $SD = 10\sqrt{2}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Задача №15. Неравенство

№15.1 *(Дальний восток)*

Решите неравенство

$$\frac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)} \geqslant 1.$$

Ответ

$\left(\frac{27}{5}; \frac{11}{2}\right] \cup (6; +\infty)$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x-27>0, \\ x-5>0, \\ \log_5(x-5)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{27}{5}, \\ x>5, \\ x-5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{27}{5}, \\ x\neq 6 \end{cases}$$

Итоговая ОДЗ:

$$x \in \left(\frac{27}{5}; 6\right) \cup (6; +\infty).$$

Переходим к решению неравенства на ОДЗ. Перенесем единицу в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)} - 1 \geqslant 0$$

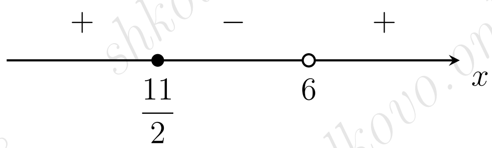
$$\frac{\log_5(5x-27)-\log_5(x-5)}{\log_5(x-5)} \geqslant 0$$

Воспользуемся методом рационализации для логарифмической функции:

$$\frac{(5-1)\left((5x-27)-(x-5)\right)}{(5-1)(x-5-1)} \geqslant 0$$

$$\frac{4x-22}{x-6} \geqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



С учетом ОДЗ:

$$x \in \left(\frac{27}{5}; \frac{11}{2}\right] \cup (6; +\infty).$$

№15.2 *(Центр)*

Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_2(x+6)}\leqslant 0.$$

Ответ

$x\in(-6;-5)\cup[3;3{,}5)\cup(5;5{,}5]$

Решение

ОДЗ:

$$\begin{cases}2x^2-17x+35>0,\\ x+6>0,\\ \log_2(x+6)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(2x-7)(x-5)>0,\\ x>-6,\\ x+6\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>5\\ x<3{,}5\end{array}\right.\\ x>-6x\neq -5\end{cases}$$

Итоговая ОДЗ:

$$x\in(-6;-5)\cup(-5;3{,}5)\cup(5;+\infty)$$

Переходим к решению неравенства на ОДЗ:

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-1}{\log_2(x+6)}\leqslant 0$$

$$\frac{\log_2\left(2x^2-17x+35\right)-\log_2 2}{\log_2(x+6)}\leqslant 0$$

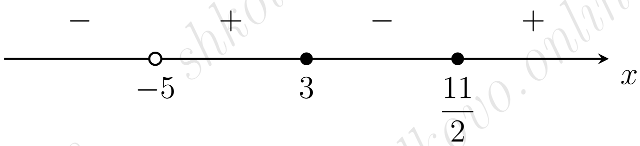
Воспользуемся методом рационализации для логарифмической функции:

$$\frac{(2-1)\left(\left(2x^2-17x+35\right)-2\right)}{(2-1)(x+6-1)}\leqslant 0$$

$$\frac{2x^2-17x+33}{x+5}\leqslant 0$$

$$\frac{(2x-11)(x-3)}{x+5}\leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Значит, без учета ОДЗ

$$x\in(-\infty;-5)\cup[3;5{,}5].$$

С учетом ОДЗ:

$$x\in(-6;-5)\cup[3;3{,}5)\cup(5;5{,}5].$$

№15.3 *(Центр)*

Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)} \leqslant 0.$$

Задача №16. Экономическая

№16.1 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на срок в 29 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если сумма общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2,32 млн рублей?

Ответ

1,45 млн рублей

Решение

Из условия следует, что кредит должен выплачиваться дифференцированными платежами. Пусть в банке взято S рублей в кредит. Обозначим величину $0{,}04 = p$, так как кредит берется под 4%. Тогда можно составить таблицу:

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Платеж
1	S	$S + pS$	$pS + \frac{1}{29}S$
2	$\frac{28}{29}S$	$\frac{28}{29}S + p \cdot \frac{28}{29}S$	$p \cdot \frac{28}{29}S + \frac{1}{29}S$
...	...	...	...
29	$\frac{1}{29}S$	$\frac{1}{29}S + p \cdot \frac{1}{29}S$	$p \cdot \frac{1}{29}S + \frac{1}{29}S$

Найдем сумму платежей. Он составляют арифметическую прогрессию, поэтому

$$\left(pS + \frac{1}{29}S\right) + \left(p \cdot \frac{28}{29}S + \frac{1}{29}S\right) + \dots + \left(p \cdot \frac{1}{29}S + \frac{1}{29}S\right) =$$

$$= pS \cdot \left(1 + \frac{28}{29} + \dots + \frac{1}{29}\right) + S = pS \cdot \frac{1 + \frac{1}{29}}{2} \cdot 29 + S =$$

$$= pS \cdot 15 + S = \frac{4}{100}S \cdot 15 + S = \frac{3}{5}S + S = \frac{8}{5}S$$

По условию

$$\frac{8}{5}S = 2{,}32 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2{,}32 \cdot 5}{8} = 1{,}45$$

Значит, в кредит планируется взять 1,45 млн рублей.

№16.2 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на срок в 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если сумма общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1,3 млн рублей?

Ответ

1 млн рублей

Решение

Из условия следует, что кредит должен выплачиваться дифференцированными платежами.

Пусть в банке взято S рублей в кредит. Обозначим величину $0{,}04 = p$, так как кредит берется под 4%. Тогда можно составить таблицу:

Месяц	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Платеж
1	S	$S + pS$	$pS + \frac{1}{14}S$
2	$\frac{13}{14}S$	$\frac{13}{14}S + p \cdot \frac{13}{14}S$	$p \cdot \frac{13}{14}S + \frac{1}{14}S$
...	...	...	...
14	$\frac{1}{14}S$	$\frac{1}{14}S + p \cdot \frac{1}{14}S$	$p \cdot \frac{1}{14}S + \frac{1}{14}S$

Найдем сумму платежей. Он составляют арифметическую прогрессию, поэтому

$$\left(pS + \frac{1}{14}S\right) + \left(p \cdot \frac{13}{14}S + \frac{1}{14}S\right) + \dots + \left(p \cdot \frac{1}{14}S + \frac{1}{14}S\right) =$$

$$= pS \cdot \left(1 + \frac{13}{14} + \dots + \frac{1}{14}\right) + S = pS \cdot \frac{1 + \frac{1}{14}}{2} \cdot 14 + S =$$

$$= pS \cdot 7{,}5 + S = \frac{4}{100}S \cdot 7{,}5 + S = \frac{3}{10}S + S = \frac{13}{10}S$$

По условию

$$\frac{13}{10}S = 1{,}3 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1{,}3 \cdot 10}{13} = 1$$

Значит, в кредит планируется взять 1 млн рублей.

№16.3 *(Дальний восток)*

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на срок в 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если сумма общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1,8 млн рублей?

№16.4 *(Центр)*

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 27 млн. рублей?

№16.5 *(Центр)*

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 27 млн. рублей?

№16.6 *(Центр)*

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн. рублей?

Задача №17. Планиметрия

№17.1 *(Дальний восток)*

Дана трапеция $ABCD$ с боковой стороной AB, которая перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опущен перпендикуляр AH. На стороне AB взята точка E так, что прямые CE и CD перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

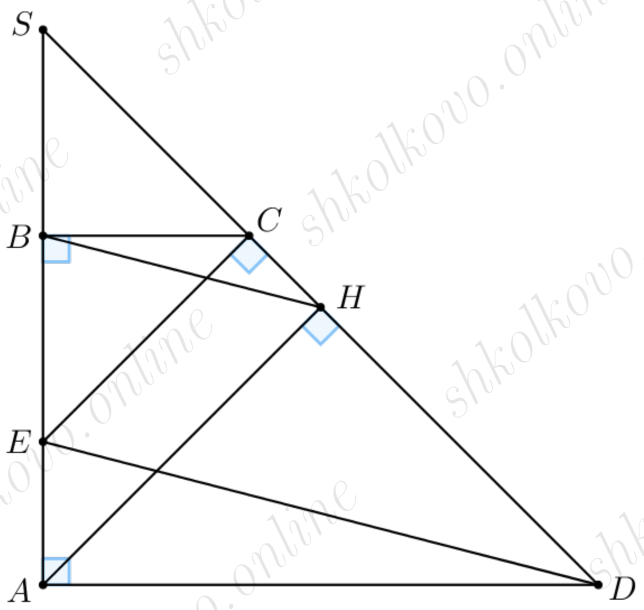
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 135°$.

Ответ

б) $1 : 2$

Решение

а) Пусть BC — меньшее основание и прямые AB и CD пересекаются в точке S.



По условию $EC \perp SD$ и $AH \perp CD$, значит, $EC \parallel AH$. Тогда прямоугольные треугольники SCE, SHA, SBC и SAD подобны по двум углам (есть общий угол и прямой), следовательно,

$$\frac{SC}{SE} = \frac{SH}{SA} = \frac{SB}{SC} = \frac{SA}{SD}.$$

С другой стороны, четырехугольник $AECD$ вписанный, поэтому можно считать, что SA и SD — секущие его описанной окружности, следовательно,

$$SC \cdot SD = SE \cdot SA \quad \Rightarrow \quad \frac{SC}{SE} = \frac{SA}{SD}.$$

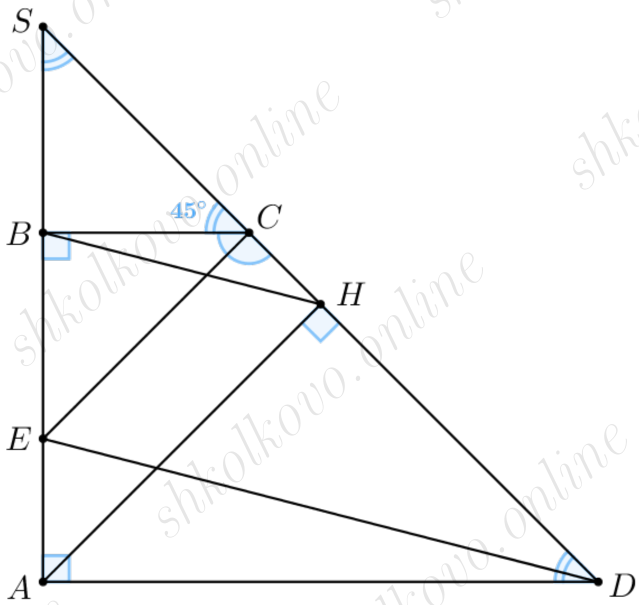
Тогда

$$\frac{SB}{SE} = \frac{SB}{SC} \cdot \frac{SC}{SE} = \frac{SH}{SA} \cdot \frac{SA}{SD} = \frac{SH}{SD}.$$

Значит, $\triangle SBH \sim \triangle SED$ по отношению сторон и углу между ними. Тогда $BH \parallel ED$.

б) Так как $\triangle SBH \sim \triangle SED$,

$$\frac{BH}{ED} = \frac{SH}{SD}.$$



Заметим, что если $\angle BCD = 135°$, то смежный ему $\angle BCS = 45°$. Тогда в треугольнике SBC

$$\angle BSC = 180° - \angle SBC - \angle SCB = 45°.$$

Тогда в треугольнике SAD

$$\angle SDA = 180° - \angle SAD - \angle ASD = 45°.$$

Следовательно, треугольник SAD равнобедренный с основанием AD. Тогда AH — высота и медиана, следовательно, $SD = 2SH$. Значит,

$$\frac{BH}{ED} = \frac{SH}{SD} = \frac{1}{2}.$$

№17.2 *(Дальний восток)*

Дана трапеция $ABCD$ с боковой стороной AB, которая перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опущен перпендикуляр AH. На стороне AB взята точка E так, что прямые CE и CD перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

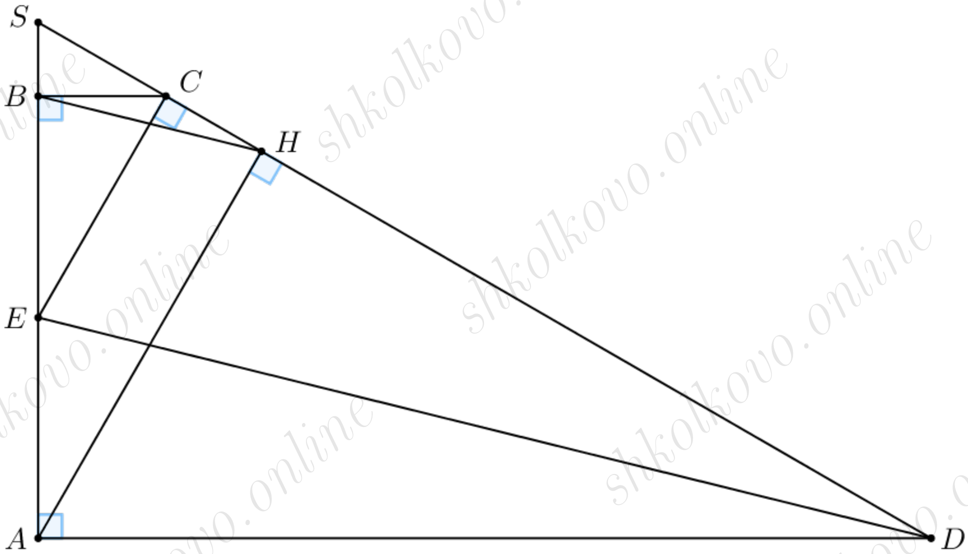
б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 150°$.

Ответ

б) 1 : 4

Решение

а) Пусть BC — меньшее основание и прямые AB и CD пересекаются в точке S.



По условию $EC \perp SD$ и $AH \perp CD$, значит, $EC \parallel AH$. Тогда прямоугольные треугольники SCE, SHA, SBC и SAD подобны по двум углам (есть общий угол и прямой), следовательно,

$$\frac{SC}{SE} = \frac{SH}{SA} = \frac{SB}{SC} = \frac{SA}{SD}.$$

С другой стороны, четырехугольник $AECD$ вписанный, поэтому можно считать, что SA и SD — секущие его описанной окружности, следовательно,

$$SC \cdot SD = SE \cdot SA \quad \Rightarrow \quad \frac{SC}{SE} = \frac{SA}{SD}.$$

Тогда

$$\frac{SB}{SE} = \frac{SB}{SC} \cdot \frac{SC}{SE} = \frac{SH}{SA} \cdot \frac{SA}{SD} = \frac{SH}{SD}$$

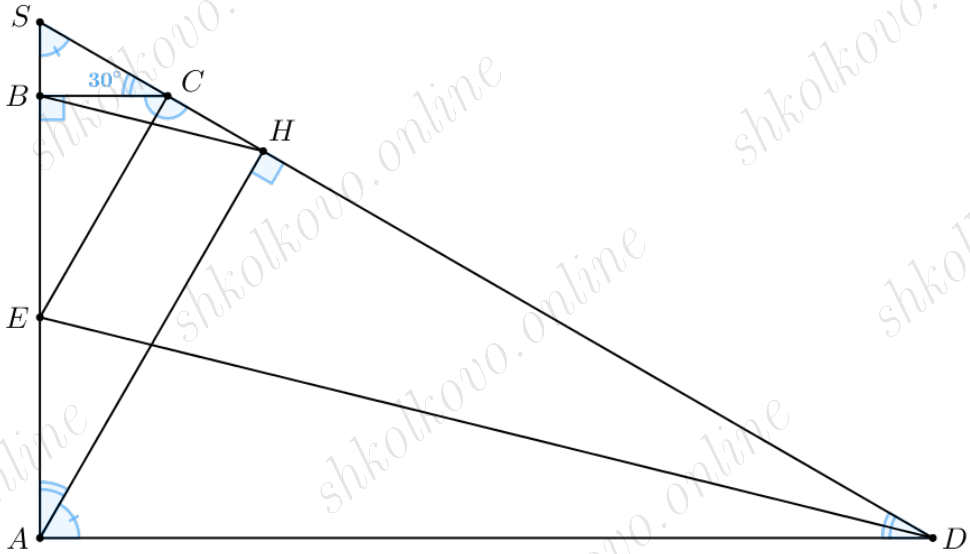
Значит, $\triangle SBH \sim \triangle SED$ по отношению сторон и углу между ними. Тогда $BH \parallel ED$.

б) Так как $\triangle SBH \sim \triangle SED$,

$$\frac{BH}{ED} = \frac{SH}{SD}.$$

Заметим, что если $\angle BCD = 150^\circ$, то смежный ему $\angle BCS = 30^\circ$. Тогда в треугольнике SBC

$$\angle BSC = 180^\circ - \angle SBC - \angle SCB = 60^\circ.$$



Тогда в треугольнике SAD

$$\angle SDA = 180^\circ - \angle SAD - \angle ASD = 30^\circ.$$

Следовательно, треугольник SAD прямоугольный с углом $\angle SDA = 30^\circ$, тогда AH делит треугольник ASD на два прямоугольных подобных ему треугольника AHS и AHD. Тогда из подобия треугольников AHS и DAS :

$$\cos\angle HSA = \frac{SH}{SA} = \frac{SA}{SD}$$

Тогда

$$\frac{BH}{ED} = \frac{SH}{SD} = \frac{SH}{SA}\cdot\frac{SA}{SD} = \cos^2\angle HSA = \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}.$$

№17.3 *(Дальний восток)*

Дана трапеция $ABCD$ с боковой стороной AB, которая перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опущен перпендикуляр AH. На стороне AB взята точка E так, что прямые CE и CD перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120°$.

№17.4 *(Центр)*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 30°$.

№17.5 *(Центр)*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 60°$.

№17.6 *(Центр)*

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 45°$.

Задача №18. Параметр

№18.1 *(Дальний восток)*
Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-5\cdot(|x+2|+|x-a|)+3a(5-3a)=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ
$\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup(1;+\infty)$

Решение
1) Сделаем замену $t=|x+2|+|x-a|$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2-5t+3a(5-3a)=0.$$

Получили квадратное уравнение. Для того, чтобы изначальное уравнение относительно x имело решения, полученное уравнение относительно t должно иметь решения, то есть его дискриминант должен быть неотрицательным. Найдем дискриминант:

$$D=25-60a+36a^2=(6a-5)^2\geqslant 0.$$

Таким образом, дискриминант для любого a будет неотрицательным. Имеем корни:

$$t_1=\frac{5+6a-5}{2}=3a \qquad \text{и} \qquad t_2=\frac{5-6a+5}{2}=5-3a.$$

2) Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности:

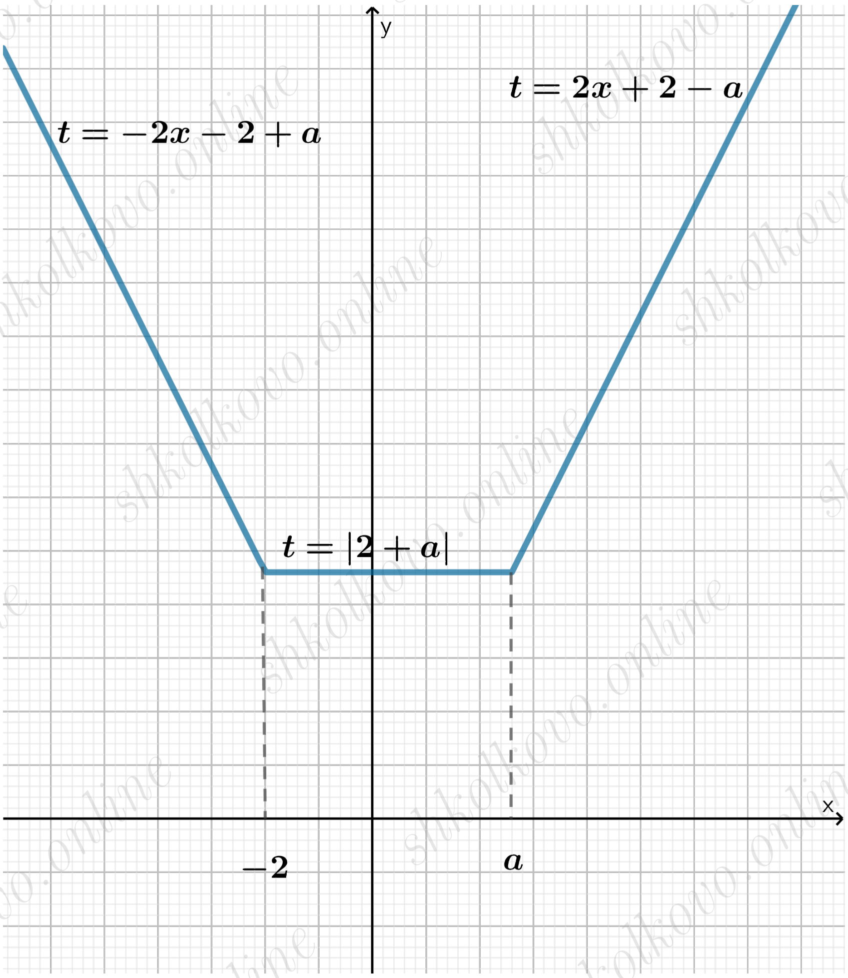
$$\left[\begin{array}{l}|x+2|+|x-a|=3a\\|x+2|+|x-a|=5-3a\end{array}\right.$$

Оба уравнения в данной совокупности имеют вид:

$$|x+2|+|x-a|=t,$$

где t – некоторое выражение, зависящее от a. Исследуем такое уравнение.

График функции $f(x)=|x+2|+|x-a|$ представляет собой корыто, ветви которого имеют наклон 2, а дно находится на высоте $|2+a|$:



(числа -2 и a могут быть поменяны местами)

Следовательно, при $t > |2+a|$ уравнение $t = f(x)$ имеет два решения, при $t = |2+a|$ имеет бесконечно много решений при $a \neq -2$ и одно решение при $a = -2$, при $t < |2+a|$ не имеет решений. Следовательно, если $t = 3a$ и $t = 5 - 3a$ — разные прямые, то необходимо

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a > |2+a| \\ 5-3a < |2+a| \end{cases} \\ \begin{cases} 3a < |2+a| \\ 5-3a > |2+a| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3a < 2+a < 3a \\ \left[\begin{array}{l} 2+a > 5-3a \\ 2+a < 3a-5 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2+a > 3a \\ 2+a < -3a \end{array}\right. \\ 3a-5 < 2+a < 5-3a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Если же прямые $t = 3a$ и $t = 5 - 3a$ совпадают, то $3a = 5 - 3a$, следовательно, $a = \dfrac{5}{6}$. Тогда

$$|2+a| = 2\frac{5}{6} > 2{,}5 = 3a,$$

поэтому при $a = \dfrac{5}{6}$ исходное уравнение не имеет корней.

№18.2 *(Центр)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(1-(x+a+1)^2\right)^3-\left(1-(x+a+1)^2\right)^2=2^{3|x-a|}-2^{2|x-a|}$$

имеет хотя бы один корень.

№18.3 *(Центр)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(1-(x-2a+1)^2\right)^3-\left(1-(x-2a+1)^2\right)^2=2^{3|x+2a|}-2^{2|x+2a|}$$

имеет хотя бы один корень.

№18.4 *(Центр)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(2+|x+a|)^3-(2+|x+a|)^2=\left(3-x^2-2ax-2a^2\right)^3-\left(3-x^2-2ax-2a^2\right)^2$$

имеет хотя бы один корень.

№18.5 *(Центр)*
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(3+2|x+a|)^3-(3+2|x+a|)^2=\left(7-x^2-2ax-2a^2\right)^3-\left(7-x^2-2ax-2a^2\right)^2$$

имеет хотя бы один корень.

Задача №19. Олимпиадная

№19.1 *(Дальний восток)*

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры, например, число 17 заменили на число 71.

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 1254

Решение

Пусть исходные n чисел равны $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\ldots$, $\overline{a_nb_n}$. Тогда их сумму можно вычислить так:

$$\begin{aligned} S_1 &= (10a_1 + b_1) + (10a_2 + b_2) + \ldots + (10a_n + b_n) = \\ &= 10\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 264 \end{aligned}$$

Меняем в их записи первую и вторую цифру местами, тогда сумма новых чисел равна

$$S_2 = 10\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Пусть

$$\begin{aligned} A &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ B &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \end{aligned}$$

а) Пусть сумма после операции увеличилась в 4 раза, тогда

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 10B + A = 4 \cdot 264 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 10B + A = 1056 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 10B + A - 10A - B = 1056 - 264 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 9B - 9A = 792 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ B = 88 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + 88 + A = 264 \\ B = 88 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11A = 176 \\ B = 88 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 16 \\ B = 104 \end{cases}$$

Из этих данных уже достаточно просто можно получить пример.

Рассуждения выше можно не писать в решении на экзамене. Они приведены для того, чтобы читатель понял логику построения примера.

Пусть всего 16 чисел, в них $a_1 = \dots = a_{16} = 1$. Пусть $b_1 = \dots = b_8 = 6$, $b_7 = \dots = b_{16} = 7$. Тогда

$$A = 16 \cdot 1 = 16$$
$$B = 8 \cdot (6 + 7) = 104$$

Таким образом,

$$S_1 = 10A + B = 160 + 104 = 264$$
$$S_2 = 10B + A = 1040 + 16 = 1056 = 4 \cdot 264$$

Итого, изначально на доске написали 8 чисел 16, 8 чисел 17.

б) Аналогично п. а) составим систему и решим её:

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 10B + A = 2 \cdot 264 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 10B + A = 528 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 2640 - 99A = 528 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 99A = 2112 \end{cases}$$

Полученная система не имеет целых решений, так как 2112 не делится на 99, поэтому условие п. б) невозможно.

в) Пусть сумма увеличилась в k раз. Тогда

$$\begin{cases} 10A + B = 264 \\ 10B + A = 264k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 10B + A = 264k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 2640 - 100A + A = 264k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 264 - 10A \\ 99A = 264(10 - k) \end{cases}$$

Заметим, что каждое из написанных чисел увеличилось не более, чем в $\frac{91}{19}$ раз, значит,

$$k \leqslant \frac{91}{19} < 10.$$

Преобразуем второе уравнение:

$$99A = 264(10 - k)$$
$$3A = 8(10 - k)$$
$$A = \frac{8(10 - k)}{3}$$

Тогда

$$A = \frac{8(10-k)}{3} \geqslant \frac{8}{3}\cdot\left(10 - \frac{91}{19}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{99}{19} = \frac{8\cdot 33}{19} = \frac{264}{19} = \frac{247+17}{19} = 13\frac{17}{19} > 13$$

Так как A — целое, то $A \geqslant 14$.
Заметим, что

$$k = \frac{80-3A}{8} \leqslant \frac{80-3\cdot 14}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Приведем пример изначальных чисел, при которых сумма увеличилась в $k = \dfrac{19}{4}$ раз, то есть стала равна

$$264k = 264\cdot\frac{19}{4} = 66\cdot 19 = 1254.$$

Мы выяснили, что $A = 14$. Тогда пусть изначально на доске было 14 чисел, при этом

$$a_1 = \dots = a_{14} = 1.$$

Тогда

$$B = 264 - 10A = 264 - 140 = 124.$$

Если взять $b_1 = b_2 = 8$, $b_3 = \dots = b_{14} = 9$, то действительно

$$B = 8\cdot 2 + 9\cdot 12 = 16 + 108 = 124.$$

Значит, если изначально на доске были написаны два числа 18 и двенадцать чисел 19, то после операции из условия сумма чисел на доске изменилась с 264 на 1254.

№19.2 *(Дальний восток)*

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 330. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры, например, число 17 заменили на число 71.

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 1518

Решение

Пусть исходные n чисел равны $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\ldots$, $\overline{a_nb_n}$. Тогда их сумму можно вычислить так:

$$S_1 = (10a_1 + b_1) + (10a_2 + b_2) + \ldots + (10a_n + b_n) =$$
$$= 10(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 330$$

Меняем в их записи первую и вторую цифру местами, тогда сумма новых чисел равна

$$S_2 = 10(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Пусть

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

а) Пусть сумма после операции увеличилась в 4 раза, тогда

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 10B + A = 4 \cdot 330 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 10B + A = 1320 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 10B + A - 10A - B = 1320 - 330 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 9B - 9A = 990 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ B = 110 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10A + 110 + A = 330 \\ B = 110 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11A = 220 \\ B = 110 + A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 20 \\ B = 130 \end{cases}$$

Из этих данных уже достаточно просто можно получить пример.

Рассуждения выше можно не писать в решении на экзамене. Они приведены для того, чтобы читатель понял логику построения примера.

Пусть всего 20 чисел, в них $a_1 = \dots = a_{20} = 1$. Пусть $b_1 = \dots = b_{10} = 6$, $b_{11} = \dots = b_{20} = 7$. Тогда

$$A = 20 \cdot 1 = 20$$
$$B = 10 \cdot (6 + 7) = 130$$

Таким образом,

$$S_1 = 10A + B = 200 + 130 = 330$$
$$S_2 = 10B + A = 1300 + 20 = 1320 = 4 \cdot 330$$

Итого, изначально на доске написали 10 чисел 16, 10 чисел 17.

б) Аналогично п. а) составим систему и решим её:

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 10B + A = 3 \cdot 330 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 10B + A = 990 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 3300 - 99A = 990 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 99A = 2310 \end{cases}$$

Полученная система не имеет целых решений, так как 2310 не делится на 99, поэтому условие п. б) невозможно.

в) Пусть сумма увеличилась в k раз. Тогда

$$\begin{cases} 10A + B = 330 \\ 10B + A = 330k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 10B + A = 330k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 3300 - 100A + A = 330k \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 330 - 10A \\ 99A = 330(10 - k) \end{cases}$$

Заметим, что каждое из написанных чисел увеличилось не более, чем в $\frac{91}{19}$ раз, значит,

$$k \leqslant \frac{91}{19} < 10.$$

Преобразуем второе уравнение:

$$99A = 330(10 - k)$$

$$3A = 10(10 - k)$$

$$A = \frac{10(10 - k)}{3}$$

Тогда

$$A = \frac{10(10-k)}{3} \geqslant \frac{10}{3} \cdot \left(10 - \frac{91}{19}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{99}{19} = \frac{10 \cdot 33}{19} = \frac{330}{19} = \frac{323+7}{19} = 17\frac{7}{19} > 17$$

Так как A — целое, то $A \geqslant 18$.
Заметим, что

$$k = \frac{100-3A}{10} \leqslant \frac{100 - 3 \cdot 18}{10} = \frac{46}{10} = \frac{23}{5}$$

Приведем пример изначальных чисел, при которых сумма увеличилась в $k = \frac{23}{5}$ раза, то есть стала равна

$$330k = 330 \cdot \frac{23}{5} = 66 \cdot 23 = 1518.$$

Мы выяснили, что $A = 18$. Тогда пусть изначально на доске было 18 чисел, при этом

$$a_1 = \cdots = a_{18} = 1.$$

Тогда

$$B = 330 - 10A = 330 - 180 = 150.$$

Если взять $b_1 = \cdots = b_{12} = 8$, $b_{13} = \cdots = b_{18} = 9$, то действительно

$$B = 8 \cdot 12 + 9 \cdot 6 = 96 + 54 = 150.$$

Значит, если изначально на доске были написаны двенадцать чисел 18 и шесть чисел 19, то после операции из условия сумма чисел на доске изменилась с 330 на 1518.

№19.3 *(Дальний восток)*

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2376. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры, например, число 17 заменили на число 71.

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 6 раз больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.