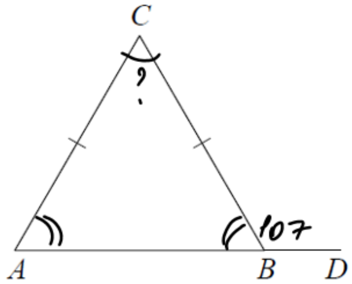
1 В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Внешний угол при вершине B равен 107°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



Отмечаем данные на чертеже. Находим угол при основании (180 – внешний) и вычисляем угол при вершине.

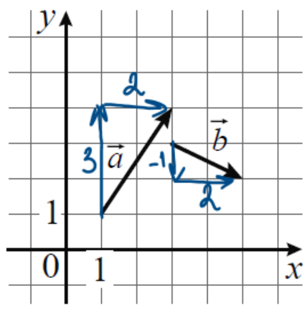
$\angle B = 180 - 107 = 73$

$\angle A = \angle B = 73$

$\angle C = \angle B_{вн} - \angle A = 107 - 73 = 34$

Ответ: 34

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



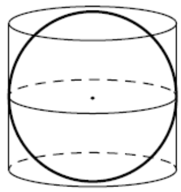
Определяем координаты каждого вектора и считаем скалярное произведение (сумма произведений координат векторов):

$\vec{a}\{2;3\}$; $\vec{b}\{2;-1\}$

$\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1$

Ответ: 1

3 Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 30. Найдите площадь поверхности шара.



Запишем формулы:

$S_ц = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$; $h = d_{шара}$; $r = r_{шара}$

$S_ц = 2\pi \cdot r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

$S_{шар} = 4\pi r^2$

Выражаем из площади поверхности цилиндра πr^2 и находим площадь поверхности шара.

$6\pi r^2 = 30 \Rightarrow \pi r^2 = 5$

$S_{шар} = 4\pi r^2 = 4 \cdot 5 = 20$

Ответ: 20

4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше четырёх задач, равна 0,73. Вероятность того, что А. верно решит больше трёх задач, равна 0,86. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 4 задачи.

Тут проще расписать:

«Больше 4 задач» — это 5, 6, 7 и т.д.

«Больше 3 задач» — это 4, 5, 6 и т.д.

Чтобы получить ровно 4 задачи нужно от «Больше 3 задач» отнять «Больше 4 задач»

$P = 0{,}86 - 0{,}73 = 0{,}13$

Ответ: 0,13

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 10».

Для подсчета вероятности такой задачи удобно составить табличку вариантов:

	Первый бросок						
Второй бросок		1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5					+	
	6						

Красным цветом я убрала неподходящие варианты (чтобы 6 не выпало). Их 11 штук. Остались подходящие варианты. Их 25 штук

Плюсиком я отметила вариант, где сумма равна 10. Он один.

$$P = \frac{\text{нужные варианты}}{\text{всего вариантов}} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

Ответ: 0,04

6 Найдите корень уравнения $3^{x-8} = \frac{1}{81}$.

$\frac{1}{81} = 81^{-1} = 3^{-4}$

$3^{x-8} = 3^{-4}$

$x - 8 = -4$

$x = 8 - 4$

$x = 4$

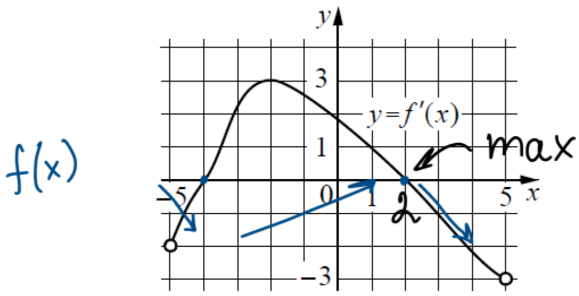
Ответ: 4

7 Найдите значение выражения $\log_2 56 - \log_2 7$.

$\log_2 56 - \log_2 7 = \log_2 \frac{56}{7} = \log_2 8 = 3$

Ответ: 3

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Точка максимума – по сути, переход от возрастания функции к убыванию. Определяем промежутки возрастания и убывания и точка максимума сразу видна = 2.

Ответ: 2

9 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1 км, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Подставляем в формулу и считаем.

$120=\sqrt{2\cdot 1a}$

$120^2=2a$

$a=\dfrac{120\cdot 120}{2}=120\cdot 60=7200$

Ответ: 7200

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 190-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 9 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, прибывшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Составим табличку:

	Скорость	Время	Расстояние
1 велосипедист	X ? больше	190/x меньше	190
2 велосипедист	X – 9 меньше	190/(x-9) больше	190
Разница		9	

Составляем уравнение:

$$\frac{190}{x-9} - \frac{190}{x} = 9 \quad \Big| \cdot x(x-9)$$

$$190x - 190(x-9) = 9x(x-9)$$

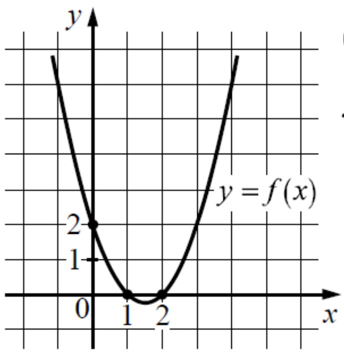
$$\cancel{190x} - \cancel{190x} + 9 \cdot 190 = 9x^2 - 81x \quad \Big| :9$$

$$x^2 - 9x - 190 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -190 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 19 \\ x_2 = -10 \end{matrix} \xRightarrow{D>0} x = 19$$

Ответ: 19

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



Восстанавливаем коэффициенты:

$c = 2 \quad (f(x) \cap Oy)$

Точки: $(1;0)$ и $(2;0)$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1 + b + 2 \quad | \cdot 2 \\ 0 = 4a + 2b + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 2b + 4 = 0 \\ 4a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Big| - \Rightarrow \begin{matrix} 2a - 2 = 0 \\ 2a = 2 \\ a = 1 \end{matrix}$$

$a + b + 2 = 0$

$1 + 2 + b = 0$

$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

Собираем $f(x)$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f(-2) = 4 + 6 + 2 = 12$

Ответ: 12

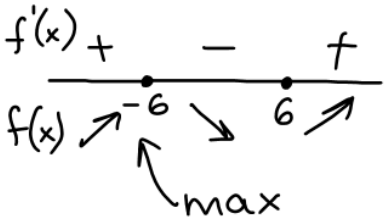
12 Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 23$.

$y' = 3x^2 - 108$

$3x^2 - 108 = 0$

$3x^2 = 108$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$



Ответ: - 6

13 а) Решите уравнение

$$2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

$2\cos x - \sqrt{3}\cdot(1-\cos^2 x) - 2\cos^3 x = 0$

$-2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$\cos^2 x(\sqrt{3} - 2\cos x) - 1(\sqrt{3} - 2\cos x) = 0$

$(\sqrt{3} - 2\cos x)(\cos^2 x - 1) = 0$

$\sqrt{3} - 2\cos x = 0$

$2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in Z$

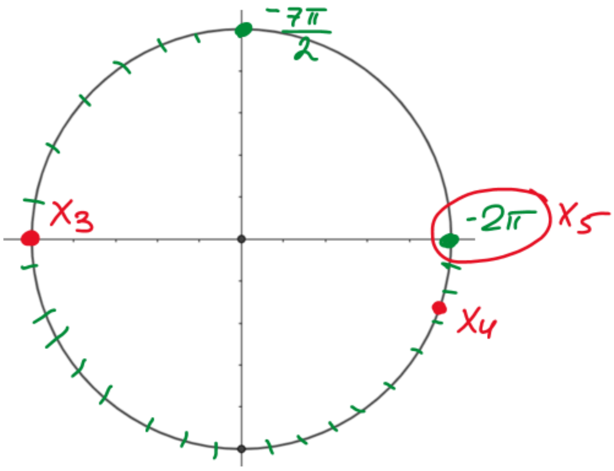
$\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm 1$

$x_2 = \pi n; n \in Z$

Смотрим промежуток. $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$x_3 = -3\pi$

$x_4 = -2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

$x_5 = -2\pi$

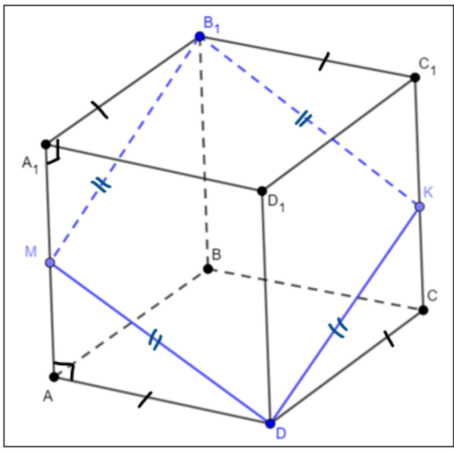
Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in Z$; $\pi n; n \in Z$

б) -3π; $-\frac{13\pi}{6}$; -2π

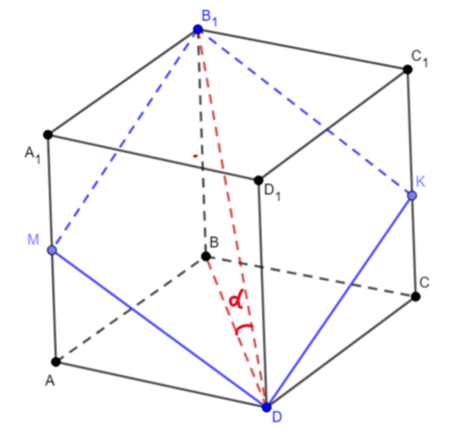
14 Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через вершины B_1 и D и пересекает рёбра AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что четырёхугольник MB_1KD — ромб.

а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1.

б) Найдите высоту призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если площадь её основания $ABCD$ равна 3, а площадь ромба MB_1KD равна 6.



Задача достаточно простая.
Рассмотрим треугольники ADM и MA_1B_1
Так как в сечении ромб, $B_1M = MD$
Так как призма правильная, в основаниях лежит квадрат => $AD = A_1B_1$
Так как призма правильная, она является прямой (углы между основаниями и боковыми гранями прямые).
Все. У нас прямоугольные треугольники с равными катетами и гипотенузой => треугольники равны, значит, $AM = A_1M$ => M – середина AA_1, что и требовалось доказать.



Б) Тоже простая задача.

В прошлых разборах я рассказывала о теореме о площади ортогональной проекции многоугольника: площадь проекции на плоскость равна площади многоугольника, умноженной на косинус угла между ними.

Собственно, начальный многоугольник – есть ромб, а его проекция – квадрат в основании. Выразим косинус угла между ними:

$$\cos\alpha = \frac{S_{проекции}}{S_{ромба}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{MB_1KD}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Рассмотрим треугольник B_1BD

BD – диагональ квадрата в основании.

$$BD = \sqrt{2\cdot S_{\square}} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$tg\,60^\circ = \frac{BB_1}{\sqrt{6}} \Rightarrow BB_1 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

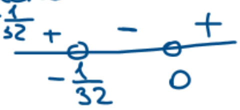
Ответ: $3\sqrt{2}$

15 Решите неравенство $\log_{11}\left(2x^2+1\right)+\log_{11}\left(\frac{1}{32x}+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{16}+1\right)$.

$$ОДЗ: \begin{cases} 2x^2+1>0 \quad (1) \\ \frac{1}{32x}+1>0 \quad (2) \\ \frac{x}{16}+1>0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) x - любое число

(2) $\frac{1+32x}{32x}>0$ $\to x=-\frac{1}{32}$, $\to x=0$



(3) $\frac{x}{16}+1>0 \Rightarrow x+16>0 \Rightarrow x>-16$

$$\Rightarrow x\in\left(-16;-\frac{1}{32}\right)\cup(0;+\infty)$$

Применяем свойства логарифмов (основания везде одинаковы) и уходим от логарифмов (11 больше 1 => знак неравенства не меняем)

$$\log_{11}\left((2x^2+1)\left(\frac{1}{32x}+1\right)\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{16}+1\right)$$

$$(2x^2+1)\left(\frac{1}{32x}+1\right)\geq\frac{x}{16}+1$$

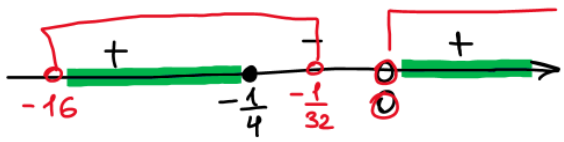
$$\frac{2x^2}{32x}+\frac{1}{32x}+2x^2+1\geq\frac{x}{16}+1$$

$$\cancel{\frac{x}{16}}+\frac{1}{32x}+2x^2+\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{16}}-\cancel{1}\geq 0$$

$$2x^2+\frac{1}{32x}\geq 0$$

$$\frac{64x^3+1}{32x} \geq 0 \quad \text{нули: } \begin{array}{l} 32x=0 \Rightarrow x=0 \\ 64x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-\frac{1}{64} \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Отмечаю промежутки на прямой + ОДЗ



Ответ: $\left(-16; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$

16 Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей.

Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Пусть на первом заводе работают суммарно x^2 часов в неделю, а на втором – y^2 часов в неделю.

Нужно найти максимум суммы $s = x + y$

Запишем уравнение:

$$\begin{cases} 200x^2+300y^2=1200000 \\ s=x+y \Rightarrow y=s-x \end{cases} \text{ подставляем}$$

$$200x^2+300(s-x)^2=1200000 \; |:100$$

$$2x^2+3(s^2-2sx+x^2)=12000$$

$$2x^2+3s^2-6sx+3x^2-12000=0$$

$$5x^2-6sx+3s^2-12000=0$$

Свели к виду квадратного уравнения. Выражаем дискриминант (так как 6 четно, я выражу четверть дискриминанта) и, чтобы уравнение имело решение, он должен быть неотрицателен.

$$\frac{D}{4} = (-3s)^2 - 5(3s^2 - 12000) = 9s^2 - 15s^2 + 60000 = 60000 - 6s^2$$

$$60000 - 6s^2 \geqslant 0$$

$$10000 - s^2 \geqslant 0$$

$$s^2 \leqslant 10000$$

$$|s| \leqslant 100 \Rightarrow -100 \leqslant s \leqslant 100$$

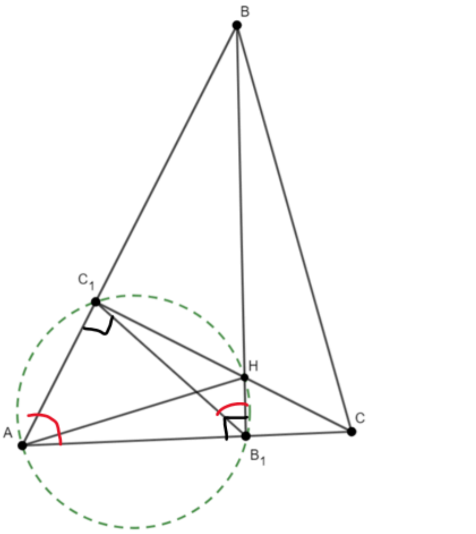
$$s_{max} = 100$$

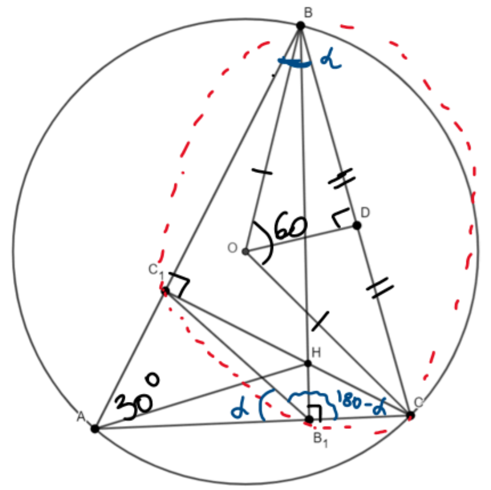
Ответ: 100

17 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC, если $B_1C_1 = 18$ и $\angle BAC = 30°$.

	Делаем чертеж. Опускаем высоты. Рассмотрим четырехугольник AC_1HB_1. Угол C_1 = углу B_1 = 90 градусов => сумма этих углов равна 180 градусов => сумма оставшихся углов A и H также равна 180 градусов => вокруг четырехугольника можно описать окружность. Получается, что искомые углы являются вписанными и опирающимися на одну дугу окружности => они равны, что и требовалось доказать



Начнем с углов

$\angle BOC = 2\cdot\angle BAC$ (центральный и вписанный углы)

$\angle BOC = 60^\circ$

$\triangle BOC$ – р/б $\triangle$-к с $\angle O = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BOC$ – р/ст $\triangle$-к.

Следующий важный факт – четырехугольник BC_1B_1C также вписан в окружность, BC – диаметр этой окружности.
Тогда если угол B = α, угол C_1B_1C = 180 – α. Угол AB_1C_1 смежный с ним равен α
Таким образом мы получаем, что треугольники AC_1B_1 и ABC подобны по двум углам.

$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; $\frac{AB_1}{AB} = \cos 30^\circ$ (из $\triangle ABB_1$)

$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{2B_1C_1}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 18}{\sqrt{3}}$

OD – высота р/ст $\triangle COB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\cdot 18}{\sqrt{3}} =$

$= 18.$

Ответ: 18

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{4x^2 - (4a+2)x + 2a}$$

на отрезке $[0;1]$ имеет ровно один корень.

Делаем равносильный переход.

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 4x^2 - (4a+2)x + 2a & (1) \\ x^2 - a^2 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^2 - a^2 \geq 0$

$(x-a)(x+a) \geq 0$

(1) $x^2 - a^2 = 4x^2 - (4a+2)x + 2a$

$3x^2 - (4a+2)x + a^2 + 2a = 0$

$3x^2 - 2(2a+1)x + a^2 + 2a = 0$

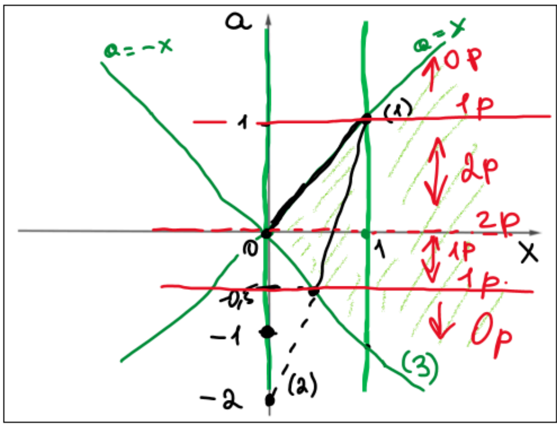
$\frac{D}{4} = (2a+1)^2 - 3(a^2+2a) = 4a^2 + 4a + 1 - 3a^2 - 6a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$x_1 = \frac{2a+1+a-1}{3} = \frac{3a}{3} = a$

$x_2 = \frac{2a+1-a+1}{3} = \frac{a+2}{3}$

Собираем все воедино и выражаем a(x), чтобы нарисовать графически.

$$\begin{cases} x = a \\ x = \dfrac{a+2}{3} \\ (x-a)(x+a) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x & (1) \\ a = 3x - 2 & (2) \\ (x-a)(x+a) \geq 0 & (3) \end{cases}$$



Поскольку нам нужен промежуток от 0 до 1, на нем и рассматриваем графики.
Сначала изображаю области.
Затем строю кусок (1), входящий в область.
И функцию (2). Для нее нужно просчитать, через какие точки она пройдет для существования внутри зеленой области.

$(2) \cap (3)$

$3x - 2 = -x$

$4x = 2$

$x = 0{,}5$

$a = -0{,}5$

Отмечаем подходящие границы

Собираем ответ:

$a \in [-0{,}5; 0) \cup \{1\}$

19 Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

Разберем условие.

Кратны 45 – значит, что делятся на 5 и на 9. То есть, последние цифры либо 0, либо 5 и сумма цифр делится на 9.

Посмотрим в принципе сумму всех цифр:

0 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 27

Значит, единственный вариант «разбития» этой суммы на две суммы, и чтобы обе делились на 9, только 9 и 18.

Обозначим x – четырехзначное число, а y – трехзначное число

А) Сумма чисел равна 2205. Подбираем.

$$\begin{array}{r} \overbrace{1\,9\,3\,5}^{18} \quad (x) \\ +\ \underbrace{2\,7\,0}_{9} \quad (y) \\ \hline 2\,2\,0\,5 \end{array}$$

$\cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}, 9$

Да, например, 1935 и 270

Б) Сумма равна 3435

Заметим, что x и y кратны 9. Что с их суммой?

$x = 9m$; $y = 9n$

$x + y = 9m + 9n = 9(m + n)$

То есть, сумма также кратна 9.

$3435 \Rightarrow 3 + 4 + 3 + 5 = 15$

15 не делится на 9 $\Rightarrow$ 3435 не делится на 9

Не может.

В) Соберем наибольший вариант: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} \underline{9}\ \underline{7}\ \underline{2}\ \underline{0} \\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{5} \end{array} \\
\hline
10035
\end{array}
$$

9 - самое большое $\rightarrow$ тысячи

7 $\rightarrow$ сотни

5 $\rightarrow$ в конце (:45)

0 $\rightarrow$ в конце (:45)

3 $\rightarrow$ в сотни.

2, 1 $\rightarrow$ в десятки.

Учитываем суммы 9 и 18

Ответ: а) может, б) не может, в) 10035