



Справочный материал

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

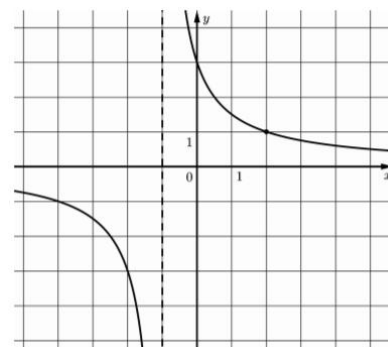
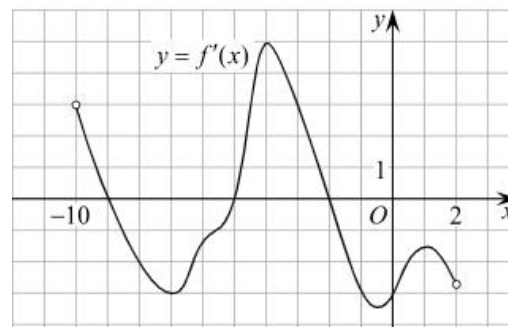
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

- Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Боковая сторона треугольника равна 11. Найдите площадь этого треугольника.
- Даны векторы $\vec{a} \{-5; 2\}$ и $\vec{b} \{4; x\}$. Известно, что они ортогональны. Найдите x .
- Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.
- В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме "Неравенства". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме "Неравенства".
- Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.
- Решите уравнение $\sqrt{28 + 3x} = x$. Если корней окажется несколько, то в ответ запишите меньший из них.
- Найдите значение выражения $\frac{\log_{13} 2}{\log_{13} 3} + \log_3 13,5$
- На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.
- Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².
- Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.
- На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите при каком значении x значение функции равно 0,2.
- Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.





Часть 2

13. а) Решите уравнение $\sqrt{3} \cos 2x = 3 - 3(\sin x + \cos x)^2$
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объем пирамиды, если $HA = \sqrt{7}$; $HC = 5$.
15. Решите неравенство $\log_7 \left(2 + \frac{2}{x}\right) - \log_7(x + 3) \leq \log_7 \frac{6+x}{x^2}$
16. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.
Если ежегодно выплачивать по 58564 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106964 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .
17. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Отрезок AN пересекает окружность в точке K , а луч MK пересекает основание AD в точке L .
а) Докажите, что треугольник AKL подобен треугольнику MAL .
б) Найдите отношение $AL:LD$.
18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
- $$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2) \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$
- имеет ровно два различных решения.
19. В наборе 70 гирек массой 1, 2, ..., 70 граммов. Их разложили на две кучки так, что в каждой кучке есть хотя бы одна гирька. Потом из второй кучки переложили одну гирьку в первую кучку. В результате средняя масса гирек в первой кучке увеличилась ровно на один грамм.
а) Могла ли первая кучка (до перекладывания) состоять из гирек с весами 11 г, 15 г, 19 г?
б) Мог ли средний вес гирек в первой кучке до перекладывания равняться 9,5 грамма?
в) Какое максимальное количество гирек могло быть первоначально в первой кучке?



Ответы: (май 2024)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30,25	10	12	0,6	0,488	7	3	5	90	7	14	12

13. Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}$.

14. Ответ: $\frac{32\sqrt{7}}{7}$

15. Ответ: $x \in [-2; -1) \cup (0; 9]$

16. Ответ: 10

17. Ответ: 1; 3

18. Ответ: $a \in (1; 25]$

19. Ответ: а) нет; б) нет; в) 45