

Вариант № 1

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

-0,8

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

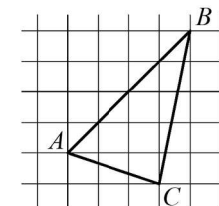
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 80, а отношение длин двух сторон равно 4 : 5.



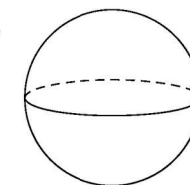
Ответ: _____.

- 2 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите скалярное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.



Ответ: _____.

- 3 Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 16. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: _____.

4 В сборнике билетов по географии 40 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме «Страны Европы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Европы».

Ответ: _____.

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 10».

Ответ: _____.

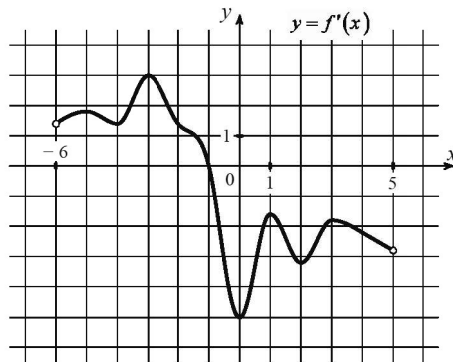
6 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{12-5x}} = \frac{1}{14}$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{6}{\sin^2 210^\circ + \cos^2(-30^\circ)}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-3x+2$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

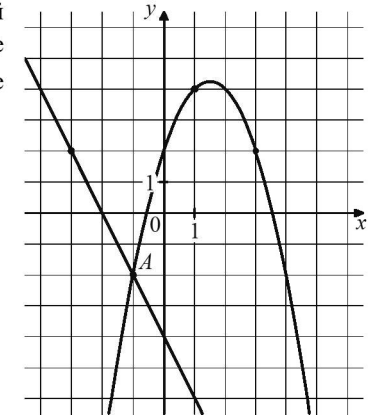
9 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 300 c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на одну пятнадцатую её часть. Ответ дайте в c^{-1} .

Ответ: _____.

10 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 240 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если к пристани В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = kx - 4$ и $g(x) = ax^2 + 3x + c$, которые пересекаются в точках А и В. Найдите ординату точки В.



Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2 - 18x + 85}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_5(2\cos^2 x + 7\cos x + 4) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 54, а боковое ребро SA равно 35. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды $SABC$.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды $SABC$ в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

15 Решите неравенство $\frac{208}{(3^{3-x^2}-1)^2} - \frac{34}{3^{3-x^2}-1} + 1 \geq 0$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 6 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо внести платёж в счёт погашения долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма платежей после полного его погашения равнялась 12,6 млн рублей?

17 В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность около треугольника ABC в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 11.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - 6x)^2 + \left(\frac{1}{3}a^2 - a + 6\right)(ax^2 - 6x) - \frac{1}{3}a^2(a - 6) = 0$$

имеет ровно два решения.

19 Кинотеатр проводит онлайн-опрос: какой из 126 выпшедших в этом году фильмов зрители считают лучшим. Каждый зритель голосует за один понравившийся ему фильм. Рейтингом каждого фильма является доля голосов зрителей, проголосовавших за этот фильм, выраженная в процентах, с округлением до целого числа. Например, если за фильм проголосовали 23,48 % зрителей, то его рейтинг равен 23, если за фильм проголосовали 23,51 % зрителей, то его рейтинг равен 24.

а) Пусть за первый час онлайн-опрос проголосовало 18 зрителей, и рейтинг фильма на первом месте стал равен 22. В начале второго часа Миша проголосовал за другой фильм, других голосований не было. Чему теперь равен рейтинг фильма на первом месте?

б) В итоговом поле показана сумма рейтингов всех фильмов. Петя проголосовал за некоторый фильм. Могла ли после этого сумма рейтингов всех фильмов в итоговом поле уменьшиться более чем на 100?

в) Какое наибольшее значение может быть показано в итоговом поле?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

4 В сборнике билетов по физике 40 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Термодинамика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Термодинамика».

Ответ: _____.

5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что пять очков не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 10».

Ответ: _____.

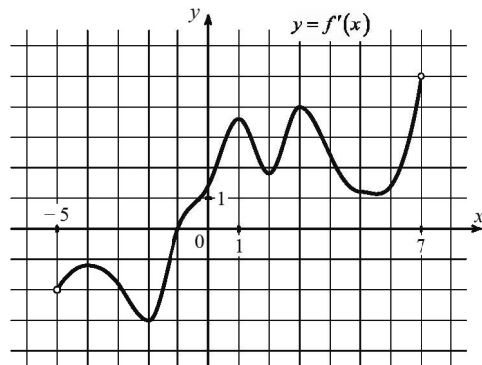
6 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{20-x}} = \frac{1}{5}$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{5}{\sin^2 225^\circ + \cos^2(-45^\circ)}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 3$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

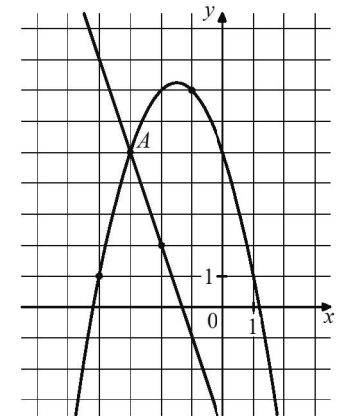
9 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в с^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 360 \text{ с}^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту Ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на одну пятнадцатую её часть. Ответ дайте в с^{-1} .

Ответ: _____.

10 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 120 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого, следом за ним, со скоростью на 2 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если к пристани В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = kx - 4$ и $g(x) = ax^2 - 3x + c$, которые пересекаются в точках А и В. Найдите ординату точки В.



Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2 - 16x + 67}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_9(2\sin^2 x - 3\sin x - 1) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 42, а боковое ребро SA равно 29. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды $SABC$.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды $SABC$ в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

15 Решите неравенство $\frac{160}{(3^{4-x^2}-1)^2} - \frac{82}{3^{4-x^2}-1} + 1 \geq 0$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо внести платёж в счёт погашения долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма платежей после полного его погашения равнялась 7,8 млн рублей?

17 В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность около треугольника ABC в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

а) Докажите, что $BM = CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 7.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - 4x)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - a + 4\right)(ax^2 - 4x) - \frac{1}{2}a^2(a - 4) = 0$$

имеет ровно два решения.

19 Кинотеатр проводит онлайн-опрос: какой из 132 вышедших в этом году фильмов зрители считают лучшим. Каждый зритель голосует за один понравившийся ему фильм. Рейтингом каждого фильма является доля голосов зрителей, проголосовавших за этот фильм, выраженная в процентах, с округлением до целого числа. Например, если за фильм проголосовали 20,48 % зрителей, то его рейтинг равен 20, если за фильм проголосовали 20,51 % зрителей, то его рейтинг равен 21.

а) Пусть за первый час проголосовал 21 зритель, и рейтинг фильма на первом месте стал равен 24. В начале второго часа Миша проголосовал за другой фильм. Чему теперь равен рейтинг фильма на первом месте?

б) В итоговом поле показана сумма рейтингов всех фильмов. Петя проголосовал за некоторый фильм. Могла ли после этого сумма рейтингов всех фильмов в итоговом поле уменьшиться более чем на 100?

в) Какое наибольшее значение может быть показано в итоговом поле?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.