

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-24 г.г.
Заключительный этап **10 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа *Решения всех задач оцениваются из 7 баллов*

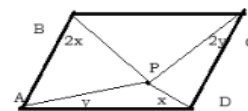
10.1. Найти все решения в действительных числах системы уравнений:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}. \end{cases}$$

10.2. У Васи есть набор из девяти единичных кубиков, у каждого из которых на всех шести гранях записаны в некотором порядке буквы М, А, Т, Е, И, К, по одной на каждой грани. Порядок букв на разных кубиках может отличаться. Кубики можно прикладывать друг к другу гранями, если на них написаны одинаковые буквы. Сможет ли Вася хоть для какого-то набора кубиков сложить из них параллелепипед высоты и ширины 1 и длины 9 так, чтобы на каждой его грани длины 9 были записаны буквы М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К в некотором порядке?

10.3. Пусть $A = \underbrace{44\dots44}_{2n}$ – натуральное число, записанное $2n$ четвёрками и $B = \underbrace{88\dots88}_n$ – натуральное число, записанное n восьмёрками, где n – произвольное натуральное число. Доказать, что число $A - B$ является точным квадратом (натурального числа).

10.4. Из шести пар братьев нужно составить три команды по 4 человека так, чтобы ни в одной команде не было никаких двух братьев. Сколькими различными способами это можно сделать? Спортсмены из разных пар не являются братьями.

10.5. В параллелограмме $ABCD$ выбрана точка P такая, что угол ABP вдвое больше угла ADP , а угол DCP вдвое больше угла DAP (см. рисунок). Доказать, что длины отрезков AB , BP и CP равны.



Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-24 г.г.
Заключительный этап **10 класс**
Время написания работы 4 астрономических часа *Решения всех задач оцениваются из 7 баллов*

10.1. Найти все решения в действительных числах системы уравнений:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}. \end{cases}$$

10.2. У Васи есть набор из девяти единичных кубиков, у каждого из которых на всех шести гранях записаны в некотором порядке буквы М, А, Т, Е, И, К, по одной на каждой грани. Порядок букв на разных кубиках может отличаться. Кубики можно прикладывать друг к другу гранями, если на них написаны одинаковые буквы. Сможет ли Вася хоть для какого-то набора кубиков сложить из них параллелепипед высоты и ширины 1 и длины 9 так, чтобы на каждой его грани длины 9 были записаны буквы М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К в некотором порядке?

10.3. Пусть $A = \underbrace{44\dots44}_{2n}$ – натуральное число, записанное $2n$ четвёрками и $B = \underbrace{88\dots88}_n$ – натуральное число, записанное n восьмёрками, где n – произвольное натуральное число. Доказать, что число $A - B$ является точным квадратом (натурального числа).

10.4. Из шести пар братьев нужно составить три команды по 4 человека так, чтобы ни в одной команде не было никаких двух братьев. Сколькими различными способами это можно сделать? Спортсмены из разных пар не являются братьями.

10.5. В параллелограмме $ABCD$ выбрана точка P такая, что угол ABP вдвое больше угла ADP , а угол DCP вдвое больше угла DAP (см. рисунок). Доказать, что длины отрезков AB , BP и CP равны.

