XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2024

4 февраля

10 класс

1. Сверхновая SN 1987A достигла максимума блеска 15 мая 1987 года. Невооруженным глазом звезда перестала быть видна 4 февраля 1988 года, а в телескоп с диаметром объектива 6 см ее стало невозможно увидеть к 21 апреля 1989 года. Считая, что падение светимости сверхновой со временем происходило экспоненциально, определите видимую звездную величину SN 1987A в момент максимума.

Решение:

Диаметр зрачка примем равным $d = 6$ мм, а проницающую способность невооруженного глаза $m_0 = 6^m$. Тогда наилучшая (равнозрачковая) проницающая способность телескопа:

$$m = 6 \ + 5 \lg \frac{6 \text{ см}}{6 \text{ мм}} = 11^m.$$

С 4 февраля 1988 г. по 21 апреля 1989 г. прошло $366 + 24 + 31 + 21 = 442$ дня, в течение которых звездная величина сверхновой увеличилась на 5^m, а с 15 мая 1987 г. по 4 февраля 1988 г. прошло $16 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 4 \ = 265$ дней.

Так как падение светимости сверхновой происходило экспоненциально, ее звездная величина линейно увеличивалась со временем (звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности). Поэтому за 265 дней изменение звездной величины составило

$$\frac{265}{442} \cdot 5^m = 3^m.$$

Таким образом, получаем, что в максимуме блеска видимая звездная величина сверхновой равнялась $+3^m$, что вполне соответствует реальности.

Комментарии к оцениванию:

Проницающая способность телескопа — 2 балла. Утверждение о том, что видимая звёздная величина линейно падает со временем — 1 балл. Интервал времени между моментом, когда сверхновая перестала быть видна невооруженным глазом, и моментом времени, когда ее невозможно стало увидеть в телескоп — 1 балл. Интервал времени между моментом максимума блеска и моментом, когда сверхновая перестала быть видна невооружённым глазом (или же моментом, когда сверхновая перестала быть видна в телескоп) — 1 балл. Получение изменения блеска — 2 балла. Итоговый ответ — 1 балл.

С.А.Русаков

2. Инопланетный астроном ведёт наблюдения за звездой, находящейся на расстоянии 2.2 пк от его звёздной системы. Масса звезды, вокруг которой вращается планета астронома, равна 2 массам Солнца. При этом аберрационное смещение наблюдаемой звезды постоянно по величине и ровно в пять раз меньше параллактического (также постоянного по величине). Найдите радиус орбиты планеты, на которой живет инопланетный астроном.

Решение:

Аберрационное и параллактическое смещения звезды постоянны по величине, а это значит, что звезда находится в полюсе эклиптики планеты астронома.

Параллактическое смещение звезды равно a/r, где a — радиус орбиты планеты, r — расстояние до звезды. Аберрационное смещение равно v/c, где v — орбитальная скорость планеты, c — скорость света.

По условию $5\frac{v}{c} = \frac{a}{r}$, а орбитальная скорость планеты

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}},$$

где G — гравитационная постоянная, а $M_\odot$ — масса Солнца. Тогда

$$\frac{5}{c}\sqrt{\frac{2GM_\odot}{a}} = \frac{a}{r}.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{25}{c^2} \cdot \frac{2GM_\odot}{a} = \frac{a^2}{r^2},$$

откуда получим

$$\frac{50GM_\odot}{c^2} = \frac{a^3}{r^2}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot GM_\odot r^2}{c^2}}.$$

Для вычислений удобно перейти в систему единиц «масса Солнца – астрономическая единица – год». В этой системе $G = 4\,\pi^2$ (что легко вычислить для системы Солнце–Земля из III закона Кеплера), 1 пк $= 2 \ \ \cdot 10^5$ а.е., а скорость света, которая примерно в 10^4 раз больше орбитальной скорости Земли, тем самым с хорошей точностью равна $2\pi \cdot 10^4$ а.е./год. Тогда

$$a = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 4\,\pi^2 \cdot 4 \ \ \cdot 2.2^2 \cdot 10^{10}}{4\pi^2 \cdot 10^8}} \approx \sqrt[3]{97 \cdot 10^3}.$$

Кубический корень из 97 можно оценить как 4.5, поэтому получаем $a \approx 45$ а.е.

Комментарии к оцениванию:

Для решения задачи существенно, что наблюдаемые одновременно значения аберрационного и параллактического смещения являются максимально возможными, что достижимо только в том случае, если наблюдаемая звезда находится в полюсе эклиптики для наблюдателя. Использование этого факта без обоснования (или неправильное обоснование) при прочих равных снижает оценку на 2 балла.

Г.И.Зайков

3. Во время выхода в открытый космос из МКС 2 ноября 2023 года астронавт Жасмин Могбели упустила сумку с инструментами. Как сообщили журналисты, период обращения сумки вокруг Земли оказался меньше орбитального периода МКС на 3 минуты. Оцените минимальную скорость, с которой Ж. Могбели должна была оттолкнуть от себя сумку, если верить журналистам.

Решение:

Поскольку орбитальный период сумки уменьшился, уменьшиться должна была и полуось ее орбиты. Воспользовавшись известным соотношением между орбитальной скоростью v, большой полуосью орбиты a и расстоянием до притягивающего центра r

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

можно сделать не менее широко известный вывод, что для получения требуемого результата орбитальную скорость сумки в точке, где она была потеряна, надо насколько возможно уменьшить. Наиболее эффективный способ сделать это — толкнуть сумку строго назад по отношению к направлению движения МКС по орбите, поэтому минимально возможная скорость будет достигаться именно в этом случае.

Сделаем еще одно допущение. Мы ничего (или почти ничего) не знаем и о массе сумки, и о массе самой Жасмин Могбели, поэтому предположим, что сумка имеет пренебрежимо малую массу по сравнению с массой астронавта (и понадеемся, что она на нас за это не обидится). В этом случае искомая относительная скорость сумки и астронавта совпадет со скоростью сумки относительно МКС. Можно также заметить, что масса астронавта, по-видимому, все же превышает массу сумки хотя бы на порядок, а тогда и результат в рамках предыдущего предположения мы получим по крайней мере с 10% точностью, что вполне устроит нас в оценочной задаче.

Далее можно действовать несколькими различными способами, продемонстрируем один, требующий сравнительно больших знаний математики, но сильно упрощающий вычисления. Найдем малое изменение орбитальной скорости на том же расстоянии r при малом изменении большой полуоси a, для чего вычислим дифференциалы левой и правой частей соотношения выше. Получим

$$2v\,dv = \frac{GM}{a^2}\,da.$$

Учтем, что МКС летает по круговой орбите, для которой $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, поэтому

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\,\frac{da}{a}.$$

Тем самым мы нашли связь между относительным изменением орбитальной скорости и относительным изменением большой полуоси.

Теперь запишем III закон Кеплера в форме

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3$$

и аналогичным образом найдем малое изменение орбитального периода P при малом изменении большой полуоси. При вычислении дифференциалов обеих частей равенства получим

$$2P\,dP = 3\cdot\frac{4\pi^2}{GM}\cdot a^2\,da,$$

разделив это выражение на предыдущее, найдем

$$2\,\frac{dP}{P} = 3\,\frac{da}{a}$$

и

$$\frac{da}{a} = \frac{2}{3}\,\frac{dP}{P}.$$

Заметим, кстати, что конкретные значения постоянных коэффициентов нам в итоге не понадобились — при вычислении относительных изменений они сократились.

Объединив два соотношения для относительных изменений, получаем важный промежуточный результат:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\frac{dP}{P}.$$

Осталось каким-либо образом оценить орбитальный период МКС P и ее орбитальную скорость v, изменения по сравнению с которыми нас интересуют. Можно вспомнить, что высота полета МКС составляет около 400 км и честно вычислить обе требуемых величины, можно сказать, что для оценки нас вполне устроят значения, соответствующие спутнику, движущемуся по поверхности Земли (а они обычно известны сразу — 84 минуты и 8 км/с). Проще всего принять в качестве оценки периода МКС $P = 90$ минутам («округлив» 84 минуты вверх и удачно попав при этом в точное значение), а орбитальную скорость принять равной 8 км/с или немного меньше (аккуратный подсчет даст 7.6 км/с и для оценки разница малосущественна). Тогда из сообщения журналистов следует, что $dP/P = 1/30$, поэтому $dv/v = 1/90$, и тем самым скорость dv, с которой нужно было толкать сумку, составляет около 90 м/с (что явно нереально, даже если Жасмин Могбели попыталась бы сделать это намеренно — мировой рекорд скорости при толкании ядра составляет около 15 м/с). Это и есть итоговый ответ задачи.

Заметим, что без дифференциалов можно было и обойтись: те же формулы позволяют на каждой стадии решения получить и абсолютные, и относительные изменения «в лоб», однако это делает решение существенно более трудоемким в вычислительном плане. Более интеллектуальный вариант — вычисление только относительных изменений с аккуратным пренебрежением малыми поправками — по сути дела будет представлять собой то же решение с дифференциалами, но без упоминания соответствующего названия.

Комментарии к оцениванию:

«Вычислительная» часть задачи стоит 4 балла, поэтому при неаккуратном (но все же дающем правдоподобный результат) счете можно было получить максимум 5 баллов (4 за формульное решение и 1 — за какое-то вычисление ответа). Получение ответа только в формульном виде без попыток его вычислить оценивалось максимум 4 баллами.

Если участник явно или неявно считает орбиту сумки круговой, но при этом никак не обосновывает подобное предположение, оценка (при прочих равных) снижается на 3 балла.

Заведомо нелепые ответы и промежуточные результаты (скорость броска превышает вторую космическую, период обращения сумки превышает возраст Вселенной, большая полуось орбиты МКС больше аналогичного параметра орбиты Луны, сумка движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом, большим единицы, МКС является геостационарным спутником с периодом обращения 1 час, радиус орбиты МКС составляет 300 км и т.п. (увы, все приведенные примеры реально встречались в работах) приводили к снижению оценки на 4–5 баллов (что, как правило, делало оценку за задачу нулевой).

П.А.Тараканов

4. Любитель астрономии решил сфотографировать различные объекты глубокого космоса со своего городского балкона. Для начала он сделал пробные снимки яркого объекта и снял галактику M 51 («Водоворот», видимая звездная величина $+8^m$, угловые размеры $13' \times 12'$). В результате обработки снимков выяснилось, что для того, чтобы увидеть галактику на снимке, ему необходимо было сделать и сложить 20 кадров. Какое минимальное количество кадров надо будет сделать при наблюдении водородной туманности NGC 7000 («Северная Америка», видимая звездная величина $+4^m$, угловые размеры $120' \times 100'$), чтобы увидеть ее на снимке? Оба объекта снимались в одних и тех же условиях с одинаковыми параметрами камеры и полностью помещались на снимок.

Решение:

Определим поверхностную яркость каждого из объектов, то есть звездную величину, приходящуюся на одну квадратную угловую минуту (обозначив a и b угловые размеры объекта):

$$m_{\mathrm{M\,51}} - m_1 = -2.5\lg(a_1 \cdot b_1),$$

откуда

$$m_1 = 2.5\lg(12 \cdot 13) + m_{\mathrm{M\,51}} \approx 2.5 \cdot 2.2 + 8 \ = 13^m.5.$$

Тут мы использовали следующую оценку:

$$\lg 1.2 = \frac{\ln 1.2}{\ln 10} = \frac{\ln(1+0.2)}{2.3} \approx \frac{0.2}{2.3} \approx 0.09$$

и

$$\lg 1.3 = \frac{\ln 1.3}{\ln 10} = \frac{\ln(1+0.3)}{2.3} \approx \frac{0.3}{2.3} \approx 0.13,$$

поэтому

$$\lg(12 \cdot 13) = \lg(10 \cdot 10) + \lg 1.2 + \lg 1.3 = 2 \ + 0.09 + 0.13 \approx 2.2.$$

Аналогично

$$m_{\mathrm{NGC\,7000}} - m_2 = -2.5\lg(a_2 \cdot b_2)$$

и

$$m_2 = 2.5\lg(120 \cdot 100) + m_{\mathrm{NGC\,7000}} \approx 2.5 \cdot (4 \ + 0.09) + 4 \ = 14^m.2.$$

Разница составляет $0^m.7$ на одну квадратную минуту.

Для того, чтобы увидеть туманность, надо собрать ту же самую энергию в расчете на одну квадратную минуту, поэтому число кадров для нее

$$N_{\mathrm{NGC\,7000}} = N_{\mathrm{M\,51}} \cdot 10^{0.4 \cdot 0.7} \approx N_{\mathrm{M\,51}} \cdot 100^{0.14}.$$

Вычислим $100^{0.14}$, например, так. Это с хорошей точностью $100^{1/7}$, поэтому

$$100^{1/7} = \left(128 \cdot \frac{100}{128}\right)^{1/7} = 2 \ \cdot \left(1 - \frac{28}{128}\right)^{1/7} \approx 2 \ \cdot \left(1 - \frac{28}{7 \cdot 128}\right) = 2 \ \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) \approx 1.9.$$

Итого

$$N_{\mathrm{NGC\,7000}} = 20 \cdot 10^{0.28} \approx 20 \cdot 1.9 = 38.$$

Итак, чтобы увидеть на снимке «Северную Америку», надо сделать и сложить 38 кадров.

Однако стоит отметить еще одно обстоятельство. Наблюдения проводятся в городе, а городская засветка существенно сильнее мешает наблюдать сравнительно более красные водородные туманности, чем спиральные галактики. Поэтому полученная оценка — это оценка снизу, реальное число кадров может оказаться больше.

Комментарии к оцениванию:

От 6 до 8 баллов: верно решена задача, получен ответ в пределах $30 \div 60$ кадров, при этом рассуждения корректны, округление в пределах разумного. Выбор между 6 или 7 баллами определялся аккуратностью округления при вычислениях.

$4 \div 5$ баллов — ход решения правильный, но получен ответ с небольшим количеством кадров, если при этом из решения было видно, что поверхностная яркость «Северной Америки» меньше, чем у «Водоворота». В ином случае (а также в случае очевидных арифметических ошибок) выставлялось не более 4 баллов.

3 балла: выполнено сравнение площадей и звездных величин, есть заготовки для дальнейшего решения. Оценка снижалась, если $\frac{8^m}{4^m} = 2$.

Н.А.Ионова

5. Астрономами был открыт одиночный объект GPM J1839–10, который на протяжении трех десятков лет испускает пятиминутные узконаправленные радиосигналы с периодом 22 минуты. Оцените размеры излучающей области.

Решение:

Столь четкое сохранение периода на протяжении длительного времени говорит нам о том, что излучающая область находится на чем-то, что имеет период вращения, равный 22 минутам. Что это может быть за объект? Попробуем оценить его плотность, считая, что $T = 22$ минуты — это минимально возможный период обращения материальной точки около такого объекта (фактически — предельный период цельности тела для данного радиуса):

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4\pi^2}{\frac{4}{3}\pi G T^2} = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3\pi}{6.67 \times 10^{-11} \cdot (22 \cdot 60)^2} \approx 8 \ \times 10^4 \text{ кг/м}^3.$$

Из III закона Кеплера (R — максимальный радиус тела, G — гравитационная постоянная, M — масса тела) мы смогли получить оценку снизу на плотность ρ этого объекта.

Столь высокую плотность (почти в 4 раза больше, чем плотность осмия 22.6 т/м^3) не имеет ни одно из веществ на Земле. Характерные плотности обычных звезд еще меньше. Значит, речь в задаче идет о компактном объекте: либо о белом карлике (характерная плотность 5×10^8 кг/м^3, характерный радиус 10^4 км), либо о нейтронной звезде (10^{18} кг/м^3, 10 км).

За пять минут этот объект успевает повернуться на $2\pi \cdot 5/22 = 1.4$ радиана (около 80°). Отсюда характерный размер (если источник на экваторе) излучающей области будет порядка либо 14 тысяч км (в случае белого карлика), либо 14 км (в случае нейтронной звезды).

Комментарии к оцениванию:

Компактная природа объекта с объяснением: 3 балла. Предположение о параметрах подходящих объектов: 3 балла (2 балла за параметры белого карлика и еще 1 балл за параметры нейтронной звезды — при условии, что оценки параметров правильны). Вычисление области излучения: 2 балла. Учет только пульсаров: не более 5 баллов суммарно.

В.В.Григорьев