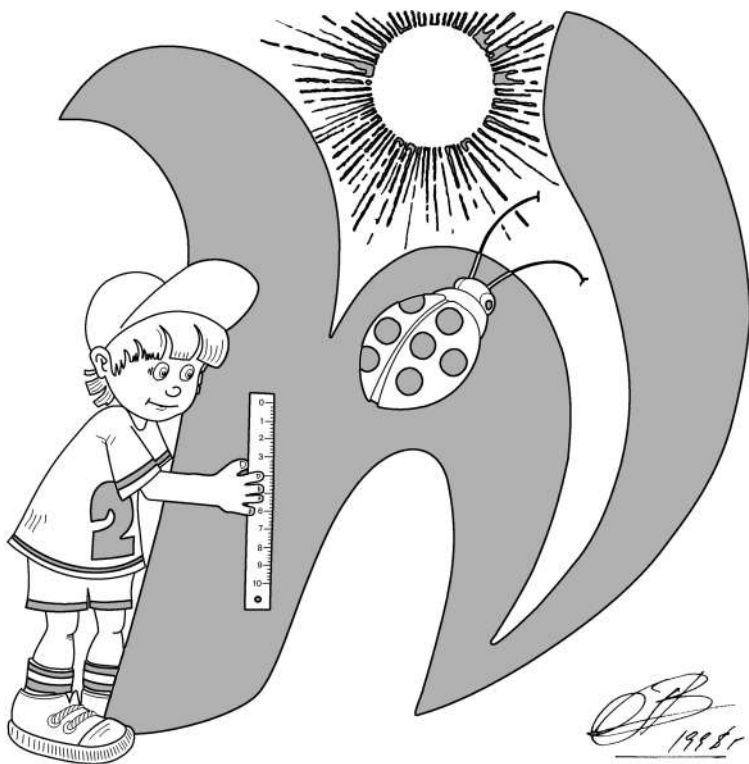


Министерство просвещения Российской Федерации  
Центральная предметно-методическая комиссия  
Всероссийской олимпиады школьников по физике

# LVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

## Заключительный этап

### Теоретический тур



Сириус, 2024 г.

Комплект задач подготовлен  
центральной предметно-методической комиссией  
Всероссийской олимпиады школьников по физике  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com)

## Авторы задач

### 9 класс

- **9-Т1.** Ольга Инишева, Андрей Уймин
- **9-Т2.** Андрей Жигар
- **9-Т3.** Денис Рубцов
- **9-Т4.** Антон Вергунов, Андрей Уймин
- **9-Т5.** Константин Парфёнов

### 10 класс

- **10-Т1.** Андрей Уймин
- **10-Т2.** Антон Вергунов, Андрей Уймин
- **10-Т3.** Александр Аполонский, Андрей Уймин
- **10-Т4.** Андрей Уймин
- **10-Т5.** Александр Аполонский

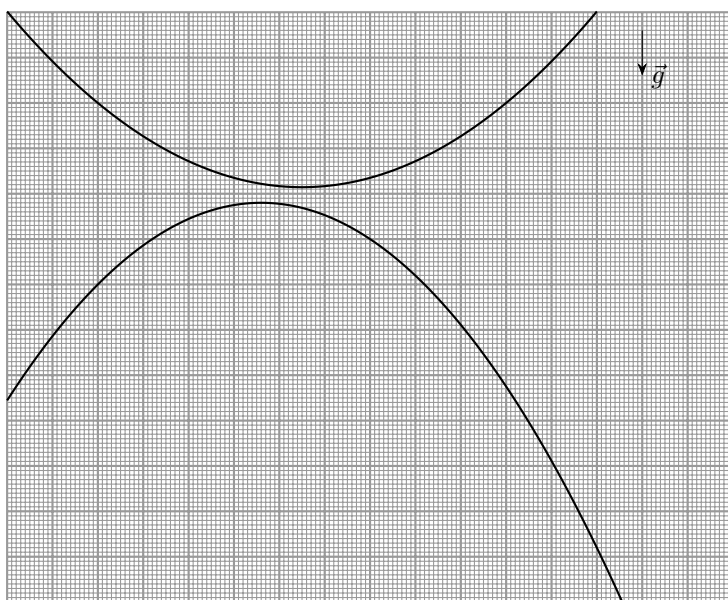
### 11 класс

- **11-Т1.** Александр Аполонский, Константин Парфёнов
- **11-Т2.** Александр Аполонский, Андрей Уймин
- **11-Т3.** Григорий Расторгуев
- **11-Т4.** Андрей Уймин
- **11-Т5.** Андрей Уймин

## 9 класс

### Задача №1. Ускоряющее зеркало

Экспериментатор Глюк держит в руках точечный источник света  $S$ , расположенный под горизонтальным плоским зеркалом, движущимся поступательно с постоянным вертикальным ускорением. Глюк бросил источник света под углом к горизонту и стал производить съёмку с помощью специальной видеокамеры. Проанализировав видеофрагмент в покадровом режиме, Глюк построил на листе масштабнo-координатной бумаги участки траекторий источника света  $S$  и его изображения в зеркале  $S^*$ .



Пользуясь приведённым рисунком, определите величину и направление ускорения  $\vec{a}$  зеркала.

Ускорение свободного падения  $g = 9,80 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха можно пренебречь, скорость света считайте бесконечной.

В бланках для оформления решений приведён рисунок с траекториями источника и изображения в увеличенном масштабе. Необходимые построения выполняйте на этом листе-бланке.

Обратите внимание, что методы нахождения величин, необходимых для решения, будут оцениваться в соответствии с точностью предложенного метода.

### Задача №2. Мощная задача

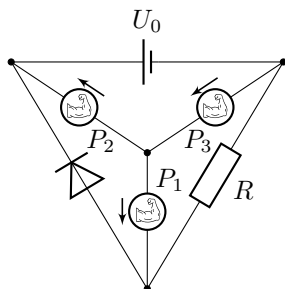


Рис. 1

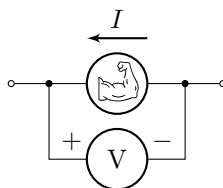


Рис. 2

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 1, состоит из идеального источника постоянного напряжения  $U_0 = 12$  В, резистора, идеального диода (напряжение открытия которого равно нулю) и трёх приборов, далее именуемых «источники постоянной мощности».

Обозначим за  $I$  силу электрического тока, протекающего через прибор. Принцип работы источника постоянной мощности таков:

1. при  $I = 1$  А =  $I_B$ , прибор работает как источник постоянной силы тока  $I_B = 1$  А, выдавая мощность не больше номинальной.
2. Прибор пропускает ток только в направлении, указанном стрелкой возле его обозначения на схеме. Сила тока не превосходит  $I_B$ .
3. При  $I \leq 1$  мА прибор работает как источник постоянного напряжения, выдавая мощность не больше номинальной и создавая напряжение, равное  $P/I_n$ , где  $P$  – номинальная мощность прибора, а  $I_n = 1$  мА.
4. При  $I_n < I < I_B$  мощность, выдаваемая прибором, постоянна и равна номинальной.
5. Под номинальной мощностью прибора понимается  $P = IU_V$ , где показания вольтметра  $U_V > 0$  (см. рисунок 2). **Обратите внимание на полярность подключения вольтметра!**

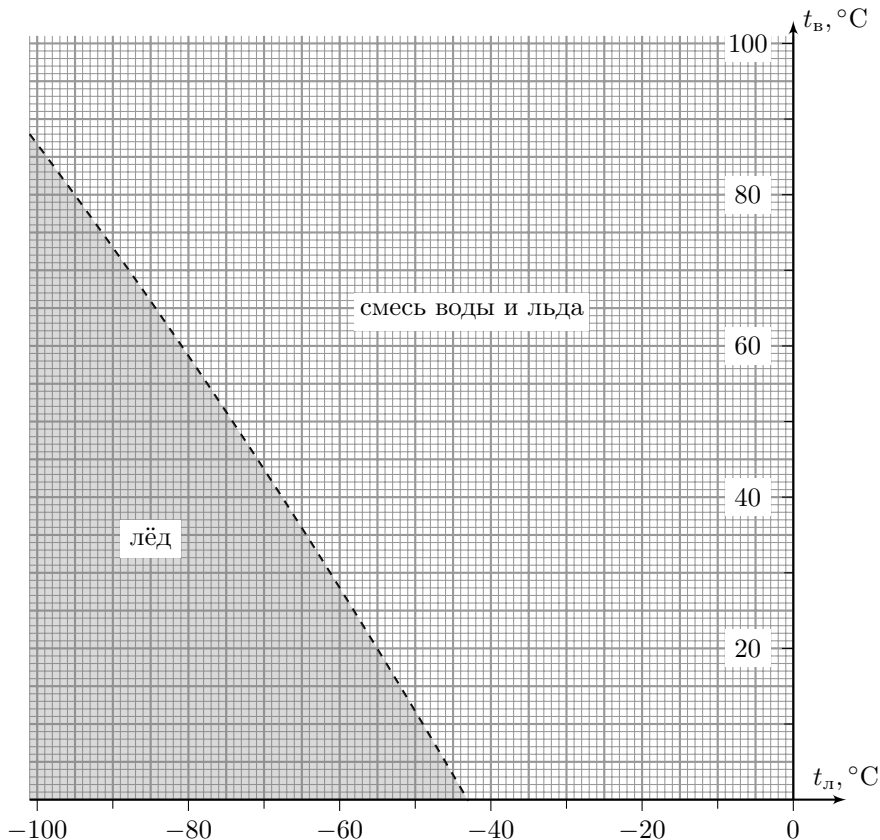
Номинальные мощности каждого источника:  $P_1 = 1$  Вт,  $P_2 = 2$  Вт и  $P_3 = 3$  Вт. Найдите значения сил токов, текущих во всех ветвях цепи, и сопротивление  $R$  резистора. Известно, что через резистор протекает ток силой  $I_R = 0,8$  А.

При решении используйте следующие обозначения:

- $I_i$  – сила электрического тока, протекающего через прибор  $P_i$ ;
- $I_D$  – через диод;
- $I_0$  – через источник постоянного напряжения;
- $I_R$  – через резистор.

### Задача №3. Нелинейная картина

В сосуд кладут кусок льда массой  $m_{\text{л}}$  и заливают порцией воды массой  $m_{\text{в}}$ . На диаграмме показаны области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда  $t_{\text{л}} \in [-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$  и температуры порции воды  $t_{\text{в}} \in [0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C}]$ .



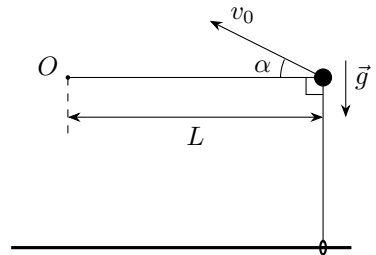
Известно, что в диапазоне  $[-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$  удельная теплоёмкость льда зависит от его температуры по закону:  $c_{\text{л}}(t_{\text{л}}) = c + \alpha t_{\text{л}}$ , где  $c = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $t_{\text{л}}$  — температура льда в градусах Цельсия, а  $\alpha$  — некоторая постоянная величина. Удельная теплоёмкость воды  $2c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , а удельная теплота плавления  $\lambda = 336 \text{ кДж}/\text{кг} = 2cT$ , где  $T = 80^\circ\text{C}$ . Теплоёмкостью сосуда и тепловыми потерями пренебречь.

1. Определите  $\alpha$  и  $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$ .

2. Качественно начертите аналогичную диаграмму конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда  $t_{\text{л}} \in [-100 \text{ }^\circ\text{C}; 0 \text{ }^\circ\text{C}]$  и температуры порции воды  $t_{\text{в}} \in [0 \text{ }^\circ\text{C}; 100 \text{ }^\circ\text{C}]$ , но при равных массах льда и воды  $m_{\text{л}} = m_{\text{в}}$ . Укажите на диаграмме характерные точки.

#### Задача №4. А когда не натянута?

Маленькое невесомое колечко может скользить без трения по длинной горизонтальной закреплённой спице. Один конец невесомой нерастяжимой нити прикреплён к кольцу, а другой закреплён в неподвижной точке  $O$  (см. рисунок). По нити без трения может перемещаться массивная бусинка. Изначально нить слегка натянута, при этом бусинка находится на одной горизонтали с точкой  $O$  и на одной вертикали с колечком. Длина горизонтального участка нити равна  $L$ .



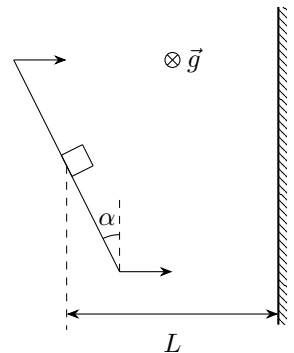
Бусинку толчком приводят в движение в вертикальной плоскости, содержащей нить. Сразу после толчка бусинка удаляется от спицы, а нить оказывается натянутой. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

1. Под каким углом  $\alpha$  к горизонту направлена скорость бусинки сразу после толчка?

2. При каких значениях начальной скорости  $v_0$  нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы?

#### Задача №5. Удаление со льда

Два одинаковых небольших тяжёлых ящика покоятся на горизонтальной поверхности льда. Оба ящика находятся на одинаковом расстоянии  $L = 0,8$  м от прямолинейного края ледяного поля. Уборщик, вооружённый длинным скребком (плоской прямоугольной пластиной с ручками), подъехал к первому ящику и прижал край скребка к одной из граней ящика. Для этого он развернул скребок так, что его край составил угол  $\alpha_1 = 10^\circ$  с краем поля. Затем он двигал скребок поступательно из состояния покоя с постоянным ускорением  $a$ , направленным перпендикулярно краю поля (см. рисунок). В результате ящик покинул поле за время  $t_1 = 2$  с. Потом уборщик подъехал ко второму ящику и, действуя аналогично, вывез и его за край поля. Он снова вёз скребок поступательно с тем же ускорением, но в этот раз край скребка составлял с краем поля угол  $\alpha_2 = 45^\circ$ . Известно, что коэффициент трения между льдом и обоими



ящиками равен  $\mu' = 1/24$ , а между скребком и обоими ящиками –  $\mu = 7/24$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Скребок всё время движения расположен вертикально, ящик от скребка не отрывается.

1. Определите ускорение  $a$  скребка.
2. Во сколько раз путь второго ящика до края поля был больше, чем у первого?
3. За какое время  $t_2$  второй ящик покинет лёд?
4. Во сколько раз сила трения между скребком и вторым ящиком больше, чем сила трения между скребком и первым ящиком?

## 10 класс

### Задача №1. Падение в бездну

Две противоположные стены глубокого ущелья представляют собой участки параллельных вертикальных плоскостей. Однажды в безветренный день экспериментатор Глюк и теоретик Баг расположились на краях различных стен ущелья (см. рис. 2). Линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с горизонтом угол  $\varphi = 30^\circ$ . Глюк и Баг бросали одинаковые шарики с одной и той же неизвестной начальной скоростью  $v_0$  относительно Земли, причём такой, что ни один брошенный шарик не достиг противоположной стены. Траектории шариков всегда лежали в вертикальной плоскости, содержащей Глюка и Бага. На движущийся шарик действует сила сопротивления воздуха, направленная против скорости движения шарика и прямо пропорциональная ей. Размерами Глюка и Бага можно пренебречь.

После множества проведённых экспериментов Глюк и Баг выяснили следующее:

- если шарик был брошен горизонтально, то он удалялся по горизонтали на расстояние  $S$  от бросающего (см. рис. 1);
- при одновременных бросках Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту соответственно (см. рис. 2) в установившемся режиме шарики движутся вдоль одной вертикальной прямой.

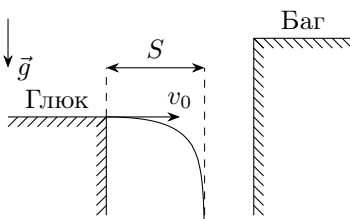


Рис. 1

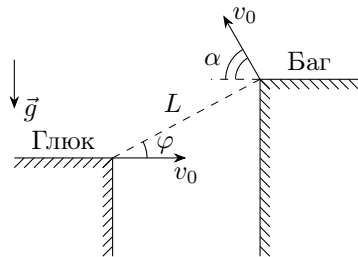


Рис. 2

*Примечание:* Приводить аналитические ответы, являющиеся функциями углов  $\alpha$  и  $\varphi$ , не обязательно.

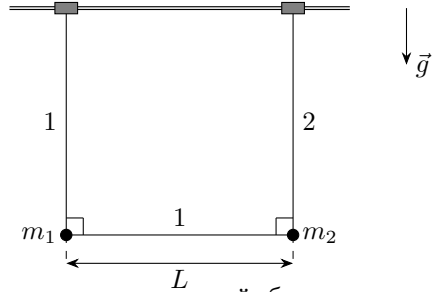
1. Определите расстояние  $L$  между Глюком и Багом (см. рис. 2).

2. Для одновременных бросков Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту соответственно, как показано на рис. 2, определите расстояние  $S_\infty$  между шариками в установившемся режиме, а также минимальное расстояние  $S_{min}$  между шариками в процессе движения.



### Задача №2. Столкновение на спице

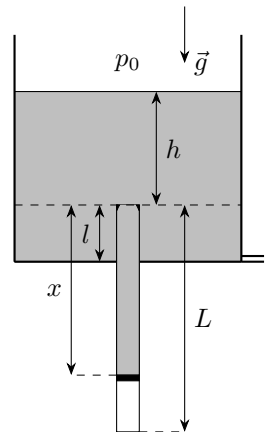
Два одинаковых маленьких невесомых коротких цилиндра могут без трения скользить по длинной закреплённой горизонтальной спице. Цилиндры соединены с невесомыми нерастяжимыми нитями 1 и 2, причём длина нити 1 на величину  $L$  больше длины нити 2 (см. рис). По нити 1 без трения может перемещаться маленькая бусинка массой  $m_1$ , а небольшой груз массой  $m_2$  прикреплен к концам обеих нитей. Изначально систему, состоящую из цилиндров, нитей, бусинки и груза удерживают в состоянии покоя таким образом, что спица и обе нити находятся в одной вертикальной плоскости, бусинка и груз расположены на одной горизонтали, при этом бусинка расположена на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 1, а груз расположен на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 2. Нити слегка натянуты. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считайте, что размеры цилиндров больше размеров бусинки и груза. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Систему отпускают.



1. Определите скорости  $v_1$  и  $v_2$  бусинки и груза соответственно прямо перед столкновением цилиндров.
2. Определите силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$  нитей 1 и 2 соответственно прямо перед столкновением цилиндров.

### Задача №3. Из архива ЦПМК

В архиве ЦПМК 2011 года была обнаружена задача, в которой описывалось довольно странное устройство для экспериментов с идеальным газом. Закрытая снизу тонкостенная цилиндрическая трубка длиной  $L$ , установленная вертикально, жёстко соединена с закреплённым цилиндрическим сосудом, ось которого также вертикальна, а диаметр во много раз превышает диаметр трубки (см. рис.). Верхняя часть трубки расположена на расстоянии  $l$  выше дна сосуда. В трубке без трения может перемещаться тонкий лёгкий герметичный поршень. Под поршнем находится воздух, который можно считать идеальным газом. В верхней части трубки расположены небольшие упоры, ограничивающие движение поршня вверх.



В стенке сосуда вблизи его дна проделано небольшое отверстие. С помощью тонкой трубочки через отверстие сосуд очень медленно

наполняют ртутью, а затем так же медленно понижают уровень ртути в сосуде до его дна.

Далее везде  $h$  обозначает уровень ртути в сосуде относительно верхней части трубки, а  $x$  – расстояние между поршнем и упорами. Считайте, что в процессе изменения уровня ртути в сосуде температура воздуха под поршнем и атмосферное давление остаются постоянными.

Параметры установки:  $L = 3,04$  м,  $l = 0,04$  м, атмосферное давление  $p_0$  равно гидростатическому давлению столба ртути высотой  $h_0 = p_0/\rho g = 0,76$  м, где  $\rho$  – плотность ртути, а  $g$  – ускорение свободного падения. Величины  $p_0$ ,  $\rho$  и  $g$  считайте неизвестными.

Во всех пунктах задачи приведите как аналитические выражения, так и численные значения для ответов.

Изначально ртути в сосуде и над поршнем нет, а давление воздуха под поршнем превышает величину атмосферного давления. В пунктах 1 – 3 считайте, что когда уровень ртути в сосуде достиг максимального значения  $h_{max} = 1,52$  м, расстояние между поршнем и упорами составило  $x_{max} = 2,28$  м.

1. Рассмотрим процесс повышения уровня ртути в сосуде. При каком значении уровня  $h_1$  ртути в сосуде поршень пришёл в движение?

2. Пусть уровень ртути в сосуде в процессе его повышения составил  $h_1 + \Delta h$ , где  $0 < \Delta h \ll h_1$ . Найдите возможные значения  $x_1$  между поршнем и упорами.

3. На каком расстоянии  $x_2$  до упоров будет находиться поршень, когда уровень ртути в сосуде понизится до его дна? Ответ обоснуйте.

4. Ртуть полностью откачали из сосуда и пространства над поршнем, после чего изменили количество воздуха под поршнем. Далее процессы повышения и понижения уровня в сосуде с помощью трубочки через отверстие повторили. Оказалось, что когда уровень ртути в сосуде достиг величины  $h_{max} = 1,52$  м, расстояние между поршнем и упорами составило  $x'_{max} = 1,52$  м. При каком значении уровня  $h_2$  ртути в сосуде в процессе его понижения поршень достигает упоров?

#### Задача №4. Полёты стержня

В распоряжении экспериментатора Глюка были закреплённая равномерно заряженная по поверхности зарядом  $Q$  непроводящая сфера радиусом  $R$  и **очень длинный** тонкий прямолинейный непроводящий стержень массой  $m$ , заряженный равномерно по длине с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Известно, что заряды стержня и сферы были одноимёнными.

В первой серии экспериментов Глюк помещал стержень на поверхность сферы таким образом, что стержень касался поверхности сферы своей серединой.

Сначала Глюк отпустил стержень из состояния покоя, и когда расстояние между центрами сферы и стержня достигло неизвестной величины  $l > R$ , стержень двигался со скоростью  $u_0 = \sqrt{Q\lambda/(2\pi\epsilon_0 m)}$  (см. рис. 1).

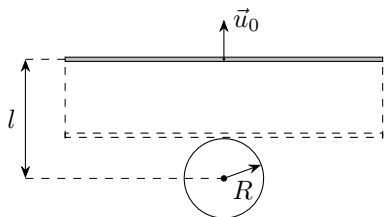


Рис. 1

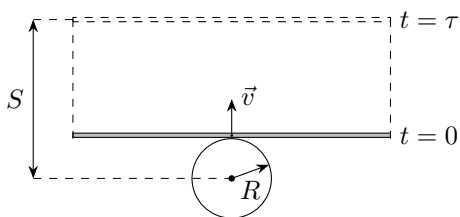


Рис. 2

Затем Глюк стал приводить стержень в движение так, что он начал поступательное движение с различными значениями начальной скорости  $v$  в направлении, перпендикулярном стержню и лежащем в плоскости, содержащей стержень и центр сферы. Глюк получил зависимость от начальной скорости  $v$  стержня времени  $\tau$ , прошедшего от момента старта, через которое расстояние между центрами сферы и стержня достигало неизвестной величины  $S > R$  (см. рис. 2). График полученной зависимости приведён ниже на рис. 3 в координатах  $y(x)$ , где  $y = \tau/\tau_0$ ,  $x = v/v_0$ , а величины  $\tau_0$  и  $v_0$  определяются выражениями:

$$\tau_0 = R\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 m}}.$$

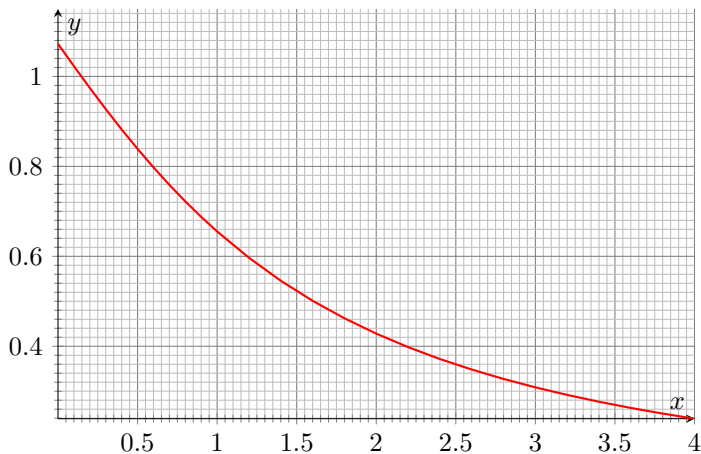


Рис. 3

Для второго эксперимента Глюк проделал в поверхности сферы небольшое отверстие, поместил конец  $A$  стержня внутри сферы таким образом, что он оказался в центре сферы (см. рис. 4) и отпустил стержень без начальной скорости. Трения между стержнем и отверстием нет.

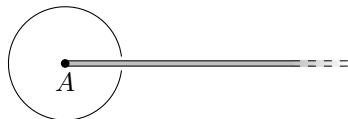


Рис. 4

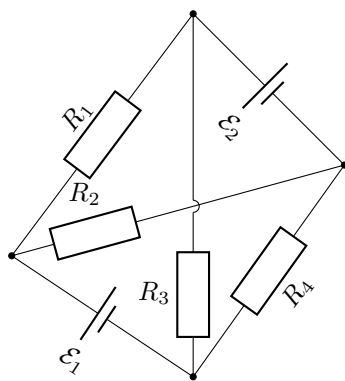
Во всех экспериментах стержни двигались поступательно. Силой сопротивления воздуха и гравитацией можно пренебречь. Величины  $S$  и  $l$  во много раз меньше длины стержня.

Для второго эксперимента определите:

1. время  $T_1$ , прошедшее от момента старта, через которое конец  $A$  стержня оказался на поверхности сферы, а также скорость стержня  $V_1$  в этот момент времени;
2. скорость  $V_2$  стержня в момент, когда его конец  $A$  находился на расстоянии  $l$  от центра сферы;
3. время  $T$ , прошедшее от момента старта, через которое конец  $A$  стержня оказался на расстоянии  $S$  от центра сферы.

### Задача №5. Электротетраэдр

Электрическая цепь представляет собой тетраэдр, в двух противоположных рёбрах которого находятся первый и второй идеальные источники постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  соответственно. В остальных рёбрах расположены четыре резистора  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  (см. рис.). Значения ЭДС источников и сопротивление одного из резисторов известны:  $\mathcal{E}_1 = 6$  В,  $\mathcal{E}_2 = 12$  В,  $R_2 = 3$  Ом. Величина силы тока через первый источник равна  $I_1 = 1$  А и не изменяется при смене полярности подключения этого источника. Величина силы тока через второй источник при указанной на рисунке полярности равна  $I_2 = 2$  А. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

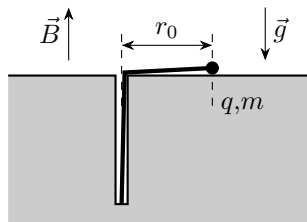


1. Чему будет равна величина силы тока через второй источник, если полярность первого источника изменить?
2. Найдите величину силы тока через второй источник, если: а) первый источник удалить из цепи; б) первый источник заменить переключкой с нулевым сопротивлением.
3. Чему равны сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_3$  и  $R_4$ ?

## 11 класс

### Задача №1. Две окружности

В толстой плите из непроводящего твёрдого материала перпендикулярно поверхности просверлено отверстие маленького диаметра, глубина которого меньше толщины плиты. К «дну» отверстия прикреплён один конец резинки с коэффициентом жёсткости  $k$ . Длина недеформированной резинки в точности равна глубине отверстия. На другом конце резинки прикреплена бусинка массы  $m$ , заряженная положительным зарядом  $q$ . Плита расположена горизонтально в поле тяжести. Поверхность плиты гладкая. Перпендикулярно поверхности плиты включено однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору ускорения свободного падения. Величина индукции магнитного поля равна  $B$ . Растягивая резинку, бусинку смещают по поверхности плиты на расстояние  $r_0$  от оси отверстия и отпускают, сообщив ей такую перпендикулярную резинке скорость, что бусинка движется по окружности.



1. Определите угловые скорости движения бусинки при вращении её по часовой стрелке и против часовой стрелки (если смотреть за её движением сверху).

Сила, действующая на бусинку, зависит и от ее координаты  $\vec{r}$ , и от ее скорости  $\vec{v}$  линейным образом. Поэтому, если есть два разных закона движения бусинки  $\vec{r}_1(t)$  и  $\vec{r}_2(t)$ , описывающие некоторые движения бусинки, то уравнение  $\vec{r}(t) = \alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t)$  при любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  правильно описывает закон физически реализуемого движения этой бусинки под действием таких же сил (ведь скорость и ускорение бусинки в любой момент времени будут описываться такими же комбинациями). Например, если бусинку из того же начального положения, что и в пункте 1, отпускают без начальной скорости, то закон ее движения можно найти как результат наложения («суперпозиции») законов вращений, изученных Вами в этом пункте.

2. На какое минимальное расстояние к оси отверстия приблизится бусинка после отпускания без начальной скорости с расстояния  $r_0$  от отверстия?

3. Через какое время  $\tau$  после отпускания бусинка вновь окажется на расстоянии  $r_0$  от оси отверстия?

4. Изобразите траекторию бусинки для случая  $q^2 B^2 / (mk) = 1/2$ . Через какое время после отпускания бусинка в первый раз окажется в исходной точке?

### Задача №2. Лепёшка из ртути

На верхнее горизонтальное основание сплошного кругового цилиндра с площадью поперечного сечения  $S$  аккуратно налили немного ртути. Краевой угол

смачивания материала, из которого изготовлен этот цилиндр, равен  $\theta$ . Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен  $\sigma$ , плотность ртути равна  $\rho$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считайте, что параметры  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $g$  и  $S$  удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll \sqrt{S}.$$

1. При каком минимальном значении объёма ртути  $V_0$  она целиком покроеет основание цилиндра?

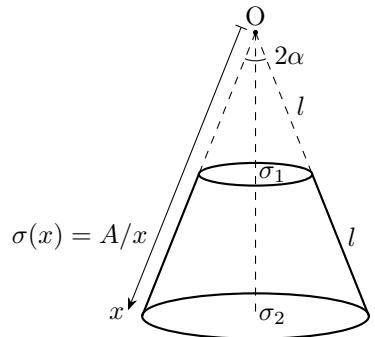
На основание цилиндра наливают ртуть объёмом  $V < V_0$ . Сверху аккуратно помещают второй цилиндр с таким же поперечным сечением, но изготовленный из другого материала, который полностью не смачивается ртутью. Считайте расположение цилиндров и ртути всё время осесимметричным.

2. При какой минимальной массе  $m_1$  верхнего цилиндра ртуть будет контактировать с основанием нижнего цилиндра по всей площади его поверхности?

3. При какой минимальной массе  $m_2$  верхнего цилиндра ртуть вытечет из зазора между цилиндрами? Считайте, что граница между основанием цилиндра и его боковой поверхностью является закруглённой (радиус закругления много меньше толщины слоя ртути) и выпуклой.

### Задача №3. Усечённый конус

Прямой сплошной непроводящий усечённый конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины  $O$  целого конуса как  $\sigma(x) = A/x$ , где  $A$  — известная положительная константа. Основания усечённого конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (см. рис.). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усечённый конус до целого, равны  $l$  и  $\alpha = 30^\circ$  соответственно, длина образующей усечённого конуса равна  $l$ .



1. Пусть  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — известная величина. Найдите вектор напряжённости  $\vec{E}_O$  в точке  $O$ .

В конусе просверлили тонкий канал, так что пробный отрицательный заряд  $-q$  ( $q > 0$ ) массы  $m$  может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ .

2. Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения  $\sigma_0$ . Найдите это положение равновесия. В качестве ответа

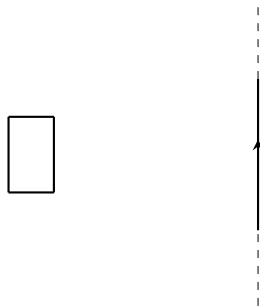
приведите расстояние от него до точки  $O$ .

3. При каких значениях  $\sigma_0$  найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

*Примечание:* конус закреплён, диэлектрическая проницаемость усечённого конуса  $\varepsilon = 1$ , влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

#### Задача №4. Рамка и провод

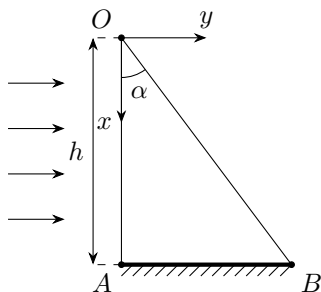
Жёсткая прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, на которой закреплён тонкий бесконечно длинный прямолинейный провод. На рисунке показан вид сверху на данную систему. Изначально силы токов в проводе и в рамке равны нулю. Рамка покоится в таком положении, что одна из пар её сторон параллельна проводу, причём расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки во много раз превышает все размеры рамки. Силу тока в проводе увеличивают до некоторого максимального значения настолько быстро, что смещением рамки за время увеличения силы тока можно пренебречь. В дальнейшем силу тока в проводе поддерживают постоянной. Оказалось, что в момент достижения силой тока в проводе максимального значения скорость рамки равнялась  $v_0$ . Индуктивностью рамки можно пренебречь, а её сопротивление можно считать постоянным. Чему будет равна скорость рамки  $v_1$  спустя очень большое время после достижения силой тока в проводе максимального значения?



#### Задача №5. Неоднородность в призме

Экспериментатор Глюк проводит оптические исследования со сплошной призмой, поперечное сечение  $OAB$  которой представляет собой прямоугольный треугольник с катетами  $AB$  и  $OA = h$ . Все грани призмы либо параллельны, либо перпендикулярны плоскости рисунка. Если ввести прямоугольную систему координат  $xOy$  с началом в точке  $O$  так, как показано на рисунке, то показатель преломления материала призмы зависит только от координаты  $x$  по закону:

$$n(x) = \frac{3}{2 - x/h}.$$



Глюк решил целиком осветить грань призмы, содержащую  $OA$  и перпендикулярную плоскости рисунка, перпендикулярным ей пучком света. Дно призмы, содержащее  $AB$  и перпендикулярное плоскости рисунка, покрыто веществом, полностью поглощающим попавший на неё свет. Призма расположена в воздухе, показатель преломления которого можно считать равным единице. Далее рассматривайте только лучи, попадающие внутрь призмы через точки, расположенные на стороне  $OA$  призмы.

1. Рассмотрим луч, попадающий в призму в точке с координатой  $x_0$ . Найдите уравнение траектории данного луча внутри призмы до попадания на стороны  $AB$  и  $OB$  призмы. Значения  $x$ , при которых полученное уравнение траектории является применимым, находить не обязательно.

2. При каких значениях угла  $\angle AOB = \alpha$  лучи света попадают во все точки стороны  $OB$  сечения призмы?

3. При каких значениях угла  $\alpha$  все лучи, достигнувшие стороны  $OB$  сечения призмы, преломляются и проходят в воздух?



## Возможные решения

### Задача №9-Т1. Ускоряющее зеркало

Плоскость зеркала горизонтальна, поэтому источник света  $S$  и его изображение  $S^*$  всегда расположены на одной вертикальной прямой. Тогда, поскольку проекция скорости  $v_x$  источника на горизонтальную ось  $x$  остаётся постоянной, проекция скорости изображения на соответствующую ось  $v_x^* = v_x$ .

В связанной с зеркалом системе отсчёта ускорение источника равняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g} - \vec{a}.$$

В системе отсчёта зеркала траектории источника  $S$  и его изображения  $S^*$  симметричны относительно зеркала, значит для ускорения изображения источника относительно зеркала выполняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}}^* = -\vec{a}_{\text{отн}}.$$

Для ускорения изображения источника в лабораторной системе отсчёта находим:

$$\vec{a}^* = \vec{a} + \vec{a}_{\text{отн}}^* = 2\vec{a} - \vec{g}.$$

Далее будем считать, что ускорение зеркала направлено вертикально вверх. Рассмотрим различные варианты определения ускорения.

#### Первый способ:

Рассмотрим траекторию источника между точками, расположенными на одной горизонтали. Между ними он движется в течение времени  $t$ , равного:

$$t = \frac{2v_B}{g},$$

где  $v_B$  – вертикальная компонента скорости источника в указанных положениях. Тогда его горизонтальное перемещение за данное время равняется:

$$\Delta x = v_x t = \frac{2v_x v_B}{g}.$$

Аналогично рассматривая траекторию изображения источника между точками, расположенными на одной горизонтали, получим:

$$\Delta x^* = \frac{2v_x v_B^*}{g + 2a},$$

где  $v_B^*$  – вертикальная компонента скорости изображения источника в указанных положениях. Здесь мы учли равенство  $v_x^* = v_x$ . Разделив уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x^*} = \frac{v_B}{v_B^*} \left( 1 + \frac{2a}{g} \right) \Rightarrow a = \frac{g}{2} \left( \frac{v_B^*}{v_B} \frac{\Delta x}{\Delta x^*} - 1 \right)$$

Для улучшения точности рассмотрим максимально возможные значения  $\Delta x$  и  $\Delta x^*$ , которым соответствуют точки, расположенные на левом крае рисунка. Соответствующее отношение вертикальных компонент скоростей измерим как отношение угловых коэффициентов касательных. Получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x^*} = 0,865 \pm 0,010, \quad \frac{v_B^*}{v_B} = \frac{k^*}{k} = 0,740 \pm 0,015 \Rightarrow a = -(1,76 \pm 0,10) \text{ м/с}^2.$$

Таким образом:

$a = (1,76 \pm 0,10) \text{ м/с}^2$ , ускорение направлено вниз.

### Второй способ:

Введём прямоугольную систему координат  $Oxy$ . Определим координаты вершин обеих траекторий, для этого проведём горизонтальные прямые и построим к ним серединные перпендикуляры. Координаты вершины для траектории источника (на рисунке обозначено точкой 1) определяются однозначно  $x_B = 36$  ус.единиц,  $y_B = 18$  ус.единиц. Координаты вершины траектории изображения (точка 3) по оси ординаты определяются хуже, поэтому возьмём приближенное значение, таким образом  $x_B^* = 45$  ус.единиц,  $y_B^* \approx 21$  ус.единиц.

Рассмотрим движение источника света между точками 1 и 2. Между этими двумя точками источник двигался в течение времени  $t_1$ , тогда его горизонтальное и вертикальное перемещения:

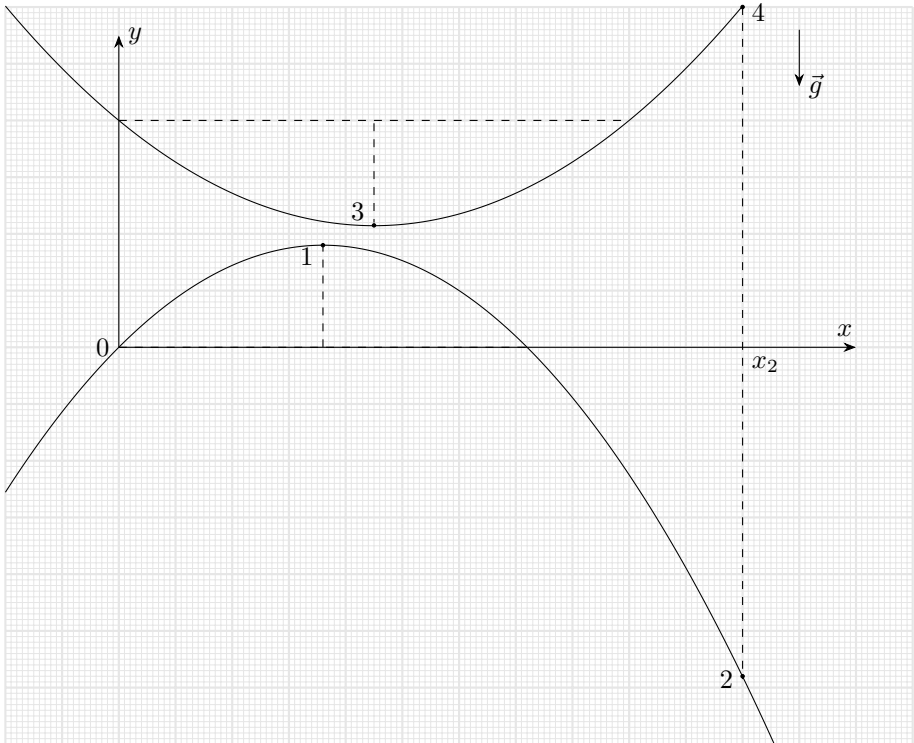
$$\Delta x = v_x t_1; \Delta y = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Время движения из формулы для горизонтального перемещения:  $t_1 = \Delta x/v_x$ . Тогда:

$$g = \frac{2\Delta y}{t_1^2} = \frac{2\Delta y \cdot v_x^2}{\Delta x^2}.$$

Аналогично рассматривая траекторию изображения источника между точками 3 и 4, с учетом равенства горизонтальных проекций скоростей  $v_x = v_x^*$ , получим:

$$\Delta x^* = v_x^* t_2; \Delta y^* = \frac{(g + 2a)t_2^2}{2}; g + 2a = \frac{2\Delta y^*}{t_2^2} = \frac{2\Delta y^* \cdot v_x^2}{(\Delta x^*)^2}.$$



Разделим получившиеся выражения для ускорений друг на друга:

$$\frac{g + 2a}{g} = \frac{\Delta y^* \cdot \Delta x^2}{\Delta y \cdot (\Delta x^*)^2} a = \frac{g}{2} \left( \frac{\Delta y^* \cdot \Delta x^2}{\Delta y \cdot (\Delta x^*)^2} - 1 \right).$$

Необходимые значения в условных единицах:  $\Delta y^* = 39$ ,  $\Delta x^* = 65$ ,  $\Delta x = 74$  и  $\Delta y = 76$  найдены с помощью масштабной-координатной сетки.

$$a = \frac{9,80}{2} \left( \frac{39 \cdot 74^2}{76 \cdot 65^2} - 1 \right) = -1,64 \text{ м/с}^2.$$

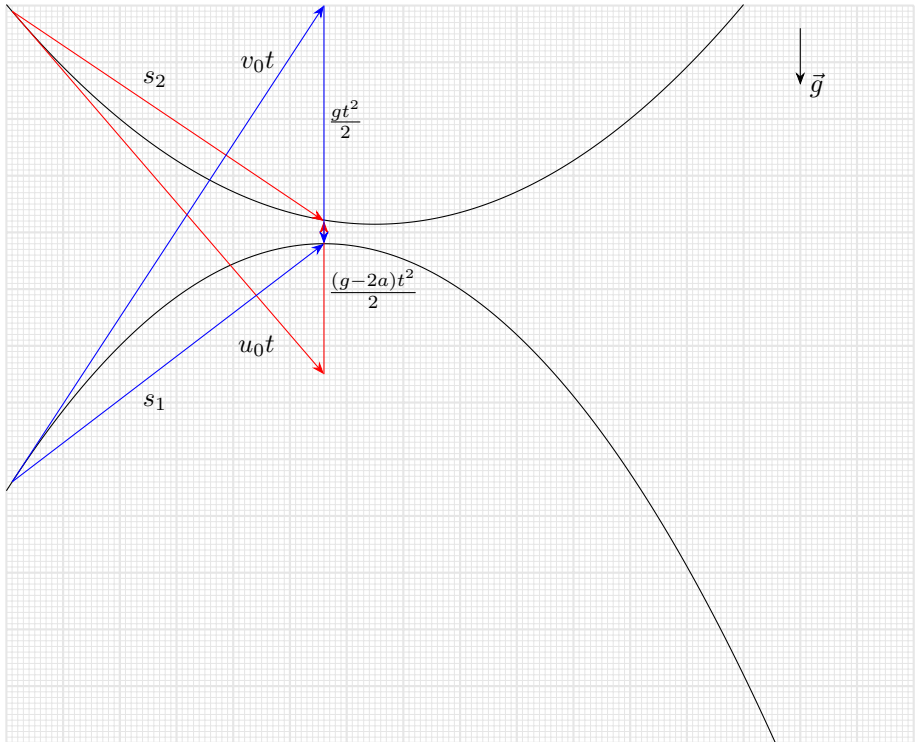
Отличие от значения, полученного первым способом, обуславливается погрешностью определения координаты вершины траектории изображения источника.

$a = 1,64 \text{ м/с}^2$ , ускорение направлено вниз.

### Третий способ:

Предположим, что ускорение зеркала направлено вниз. Проведём касательные к обеим траекториям в начальный момент времени и построим векторные

треугольники перемещений для источника и его изображения. Для улучшения точности рассмотрим максимально возможные значения  $\vec{v}_0 t$  и  $\vec{u}_0 t$ , где  $\vec{v}_0$  и  $\vec{u}_0$  скорости источника и его изображения. Векторные треугольники будем строить таким образом, чтобы горизонтальные перемещения источника и изображения были равны. Таким образом время  $t$  будет одинаковым для обоих случаев.



Тогда отношение полных ускорений будет равно отношению длин соответствующих сторон двух векторных треугольников перемещений:

$$\frac{g - 2a}{g} = \frac{l_2}{l_1},$$

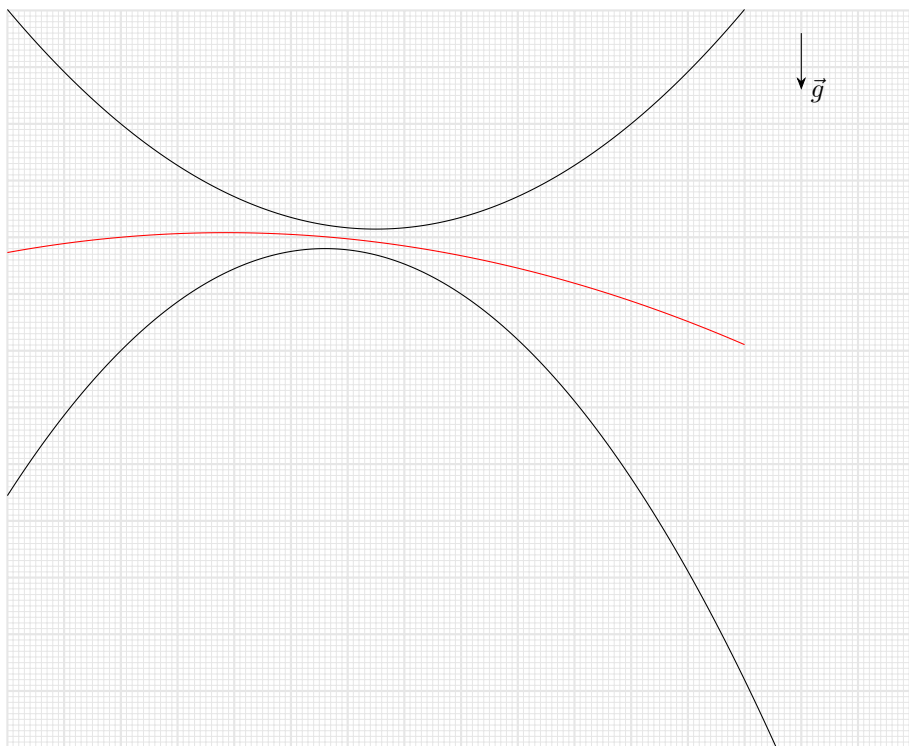
где  $l_1$  это длина в условных единицах вертикальной стороны треугольника перемещений источника, а  $l_2$  — вертикальной стороны треугольника перемещений изображения источника. Тогда:

$$a = \frac{g}{2} \left( 1 - \frac{l_2}{l_1} \right) = \frac{9,80}{2} \left( 1 - \frac{27}{42} \right) = 1,75 \text{ м/с}^2.$$

$a = 1,75 \text{ м/с}^2$ , ускорение направлено вниз.

**Четвёртый способ:**

В любой момент времени точка, принадлежащая плоскости зеркала, находится на середине вертикального отрезка, соединяющего точки, принадлежащие траекториям источника и изображения. Воспользовавшись этим, мы можем восстановить траекторию точки зеркала



Ускорение зеркала относительно земли равно  $\vec{a}$ . Из рисунка видно, что оно направлено вертикально вниз. Зная, что ускорение источника равно  $\vec{g}$ , и определив координаты вершин парабол, либо характерные расстояния по вертикали и горизонтали, мы можем найти величину ускорения, воспользовавшись любым из вышеописанных способов решения.

$a = (1,80 \pm 0,02) \text{ м/с}^2$ , ускорение направлено вниз.

**Задача №9-Т2. Мощная задача**

Предположим, что диод закрыт.

Тогда через источник  $P_1$  протекает электрический ток силой  $I_R$ . Из алгебраической суммы токов для центрального узла получим связь между токами, протекающими через источники:

$$I_3 = I_2 + I_R,$$

где  $I_2$  и  $I_3$  – силы электрических токов, протекающие через приборы  $P_2$  и  $P_3$  соответственно. Сумма напряжений на приборах  $P_1$  и  $P_2$  равна напряжению  $U_0$ :

$$U_0 = U_3 + U_2,$$

где  $U_2$  и  $U_3$  – напряжения на клеммах приборов  $P_2$  и  $P_3$  соответственно. Через второй прибор протекает электрический ток силой  $I_2 > 1$  мА, иначе  $U_2 + U_3 > U_0$ . Тогда:

$$\frac{P_2}{I_2} + \frac{P_3}{I_2 + I_R} = U_0 \Rightarrow I_2 = 0,22 \text{ А.}$$

Получаем, что  $I_3 > 1$  А, что противоречит условию. Значит мощность третьего источника меньше номинальной и сила тока через него равна 1 А. Сила тока через второй источник  $I_2 = 0,2$  А. Ток через  $U_0$  течет слева направо и равен  $I_0 = 0,2$  А. С учётом ориентаций источников и направлений протеканий электрического тока, напряжение на ветви, содержащей  $U_0$  и  $P_2$ , равно напряжению на ветви, содержащей  $P_1$  и  $R$ :

$$U_0 - U_2 = -U_1 + U_R; U_0 - \frac{P_2}{I_2} = -\frac{P_1}{I_1} + I_R R \Rightarrow R \approx 4,1 \text{ Ом.}$$

### **Предположим, что диод открыт.**

Тогда через него протекает электрический ток, а напряжения на источниках  $P_1$  и  $P_2$  равны. Пусть через первый источник протекает некоторый электрический ток силой  $I_1$ , тогда, так как номинальные мощности относятся как  $P_2/P_1 = 2$ , а напряжения на клеммах источников равны, через второй источник постоянной мощности будет протекать электрический ток силой  $I_2 = 2I_1$ . Алгебраическая сумма токов для узла, соединяющего все три источника, должна равняться нулю, из чего следует, что через прибор  $P_3$  протекает электрический ток силой равной  $I_3 = 2I_1 + I_1 = 3I_1$ . Тогда:

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{U_3 I_3}{U_1 I_1} = 3; U_3 = \frac{3U_1 I_1}{3I_1} = U_1.$$

Получаем, что напряжения на клеммах всех трёх источников равны  $U_3 = U_2 = U_1 = U$ , следовательно  $2U = U_0 \Rightarrow U = 0,5U_0 = 6$  В. Найдем чему равняется сила электрического тока, протекающего через первый источник:

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{1}{6} \text{ А.}$$

При таком значении  $I_1$  все три прибора будут работать в нормальных режимах, обеспечивающих номинальную мощность. Алгебраическая сумма токов для нижнего узла должна равняться 0:

$$I_1 = I_D + I_R,$$

тогда  $I_D$  – сила тока через диод, получается отрицательной, что противоречит изначальному предположению. Получаем, что диод закрыт.

$$I_1 = 0,8 \text{ А}, I_2 = 0,2 \text{ А}, I_3 = 1 \text{ А}, I_0 = 0,2 \text{ А}, R \approx 4,1 \text{ Ом}.$$

### Задача №9-ТЗ. Нелинейная картина

#### 1. Первый способ.

Пунктирная линия на диаграмме, разделяющая состояния "лёд" и "смесь воды и льда", соответствует льду при температуре плавления  $0^\circ\text{C}$ . Выведем уравнение данной линии. Количество теплоты, которое вода отдаёт при остывании до  $0^\circ\text{C}$  и кристаллизации:  $Q_{\text{отд}} = 2c_m t_{\text{в}} + m_{\text{в}}\lambda$ . Средняя удельная теплоёмкость льда при нагревании от  $t_{\text{л}}$  до  $0^\circ\text{C}$  равна  $c_{\text{ср}} = \frac{c+(c+\alpha t_{\text{л}})}{2} = c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2}$ . Тогда количество теплоты, необходимое для нагревания льда до  $0^\circ\text{C}$  равно  $Q_{\text{получ}} = c_{\text{ср}}m_{\text{л}}(-t_{\text{л}}) = -(c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2})m_{\text{л}}t_{\text{л}}$ . Так как тепловых потерь нет,  $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}}$ . Используя обозначения  $\gamma = m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$  и  $\lambda = 2cT$ , получим искомую зависимость:

$$t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = -T - \frac{\gamma t_{\text{л}}}{2} - \frac{\alpha \gamma t_{\text{л}}^2}{4c}. \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) точки  $(-95; 80)$  и  $(-55; 20)$  из диаграммы, в которых пунктирная линия хорошо попадает на узлы координатной сетки, получим

$$\gamma = 4,0$$

$$\alpha = 7,0 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot (^\circ\text{C})^2)$$

#### Второй способ.

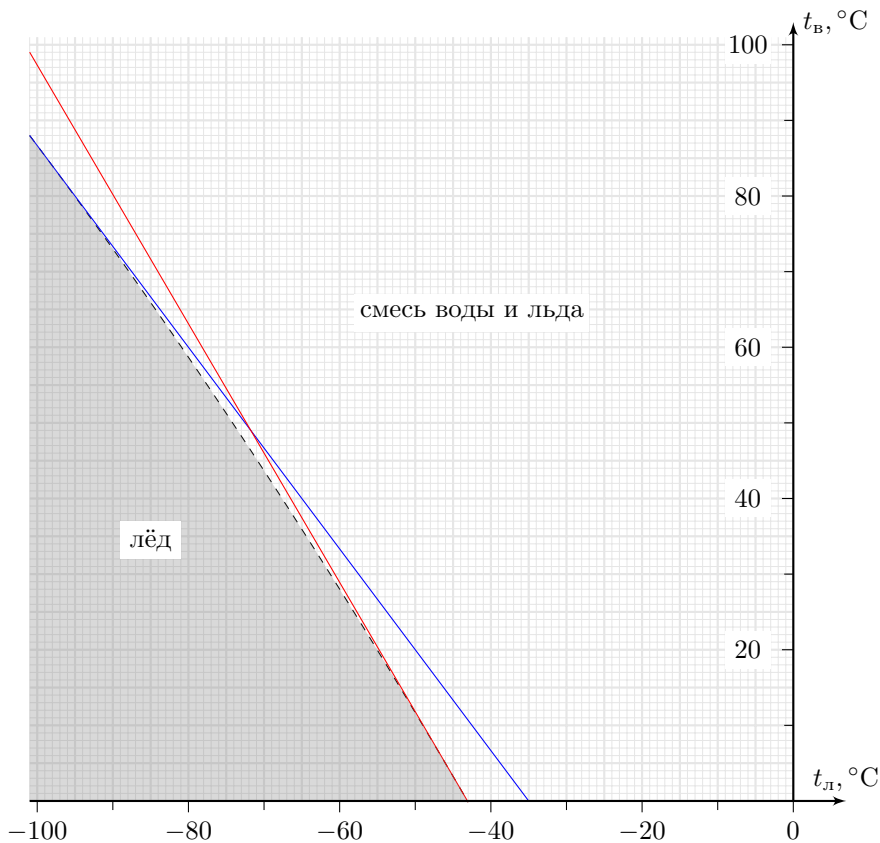
Пунктирная линия на диаграмме, разделяющая состояния "лёд" и "смесь воды и льда", соответствует льду при температуре плавления  $0^\circ\text{C}$ . Найдём угловой коэффициент касательной, проведённой к этой пунктирной линии, в точке  $(t_{\text{л}}; t_{\text{в}})$ . Пусть кусок льда взят при температуре  $t_{\text{л}} - \Delta t_{\text{л}}$  ( $\Delta t_{\text{л}} \ll t_{\text{л}}$ ). Определим, на сколько градусов  $\Delta t_{\text{в}}$  теплее необходимо взять воду, чтобы содержимым сосуда был лёд при  $0^\circ\text{C}$ . Дополнительное количество теплоты, необходимое для плавления льда равно  $\Delta Q_{\text{л}} = c_{\text{л}}(t_{\text{л}})m_{\text{л}}\Delta t_{\text{л}}$ . Это тепло берётся из-за более тёплой воды  $\Delta Q_{\text{в}} = 2c_m \Delta t_{\text{в}}$ . Так как тепловых потерь нет,  $\Delta Q_{\text{в}} = \Delta Q_{\text{л}}$ . Модуль углового коэффициента касательной

$$k = \frac{\Delta t_{\text{в}}}{\Delta t_{\text{л}}} = \frac{c_{\text{л}}(t_{\text{л}})m_{\text{л}}}{2c_m} = \frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{c} t_{\text{л}}\right) \quad (1^*)$$

Этот же результат можно было получить дифференцированием по  $t_{\text{л}}$  выражения (1), полученного в первом методе решения. Подставив в уравнение (1\*) значения для модулей угловых коэффициентов касательных  $k_1 = \left| \frac{80-20}{(-90)-(-55)} \right| = 1,714$  и  $k_2 = \left| \frac{80-0}{(-95)-(-35)} \right| = 1,333$ , проведенных к точкам пунктирной линии  $t_{\text{л}}^{(1)} = -43^\circ\text{C}$  и  $t_{\text{л}}^{(2)} = -100^\circ\text{C}$  соответственно, получим

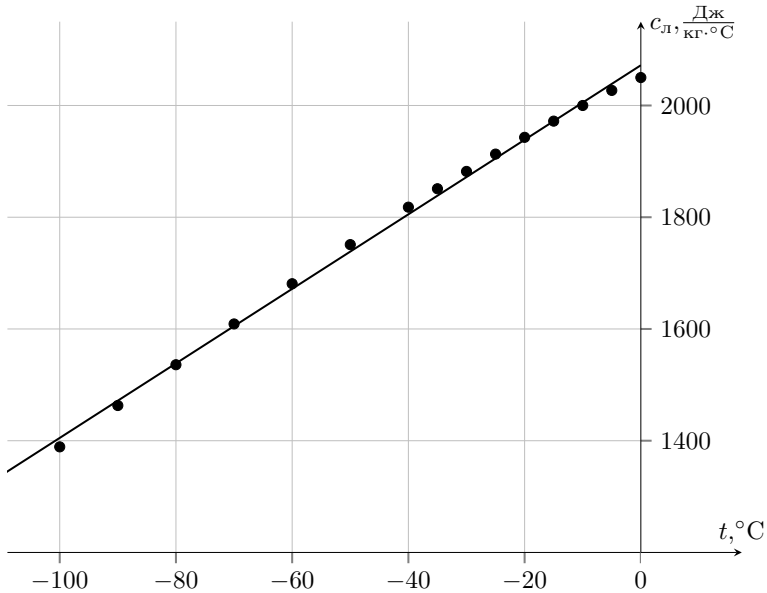
$$\gamma = 4,0$$

$$\alpha = 7,0 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot (^\circ\text{C})^2)$$



Реальная зависимость (табличные данные) удельной теплоёмкости льда от его температуры имеет такой вид (см. рисунок).





2. В диаграмме, данной в условии, масса льда была в 4 раза больше массы воды, поэтому конечным состоянием содержимого сосуда не могла быть вода. В данном же пункте задачи, возможно, что конечным состоянием содержимого сосуда может быть и вода. Найдем уравнение линии, соответствующей воде при  $0^\circ\text{C}$ . Количество теплоты, которое вода отдаёт при остывании до  $0^\circ\text{C}$ :  $Q_{\text{отд}} = 2cm_{\text{в}}t_{\text{в}}$ . Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до  $0^\circ\text{C}$  и его плавления:  $Q_{\text{получ}} = -(c + \frac{\alpha t_{\text{л}}}{2})m_{\text{л}}t_{\text{л}} + m_{\text{л}}\lambda$ . Из уравнения  $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}}$  получим искомую зависимость:

$$t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = \gamma T - \frac{\gamma t_{\text{л}}}{2} - \frac{\alpha \gamma t_{\text{л}}^2}{4c} \quad (2)$$

Если свободный член в уравнении (2) меньше температуры кипения воды  $100^\circ\text{C}$ , то на диаграмме будет область, соответствующая состоянию "вода". Это наш случай, так как  $\gamma_0 = \frac{m_{\text{л}}}{m_{\text{в}}} = 1 < \frac{100^\circ\text{C}}{80^\circ\text{C}}$ . В градусах Цельсия уравнение (2) примет вид

$$t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = 80 - \frac{t_{\text{л}}}{2} - \frac{t_{\text{л}}^2}{1200} \quad (2^*)$$

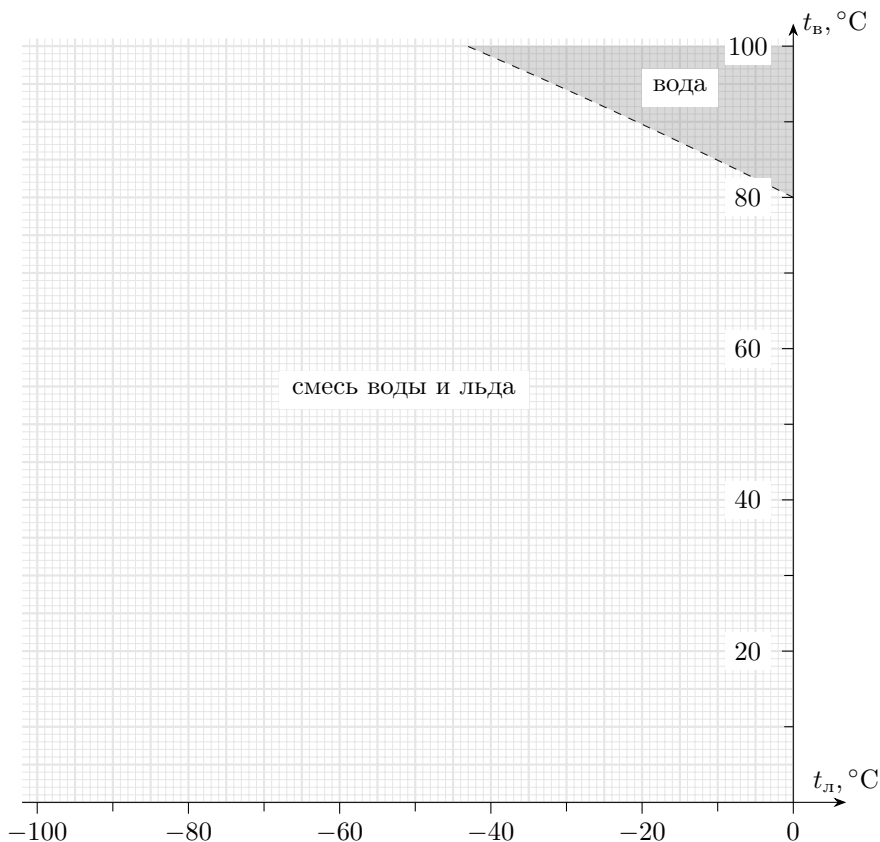
Найдём характерные точки, соответствующие данной зависимости. Одна из точек очевидна –  $(0^\circ\text{C}; 80^\circ\text{C})$ . Вторую точку найдём как точку пересечения с прямой  $t_{\text{в}}(t_{\text{л}}) = 100^\circ\text{C}$ :

$$100 = 80 - \frac{t_{\text{л}}}{2} - \frac{t_{\text{л}}^2}{1200}$$

Решение этого квадратного уравнения даёт  $t_{\text{л}} \approx -43^\circ\text{C}$  (второй корень не попадает в разрешённый диапазон  $[-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$ ). Итак, вторая характерная точка –  $(-43^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C})$ . Покажем, что на нашей диаграмме не будет состояния "лёд". Действительно, условие пересечения линии, соответствующей льду при  $0^\circ\text{C}$ , с осью абсцисс имеет вид

$$0 = -T - \frac{t_{\text{л}}}{2} - \frac{\alpha t_{\text{л}}^2}{4c}$$

То есть точка пересечения  $t_{\text{л}}$  такова, что  $-T - \frac{t_{\text{л}}}{2} > 0 \Leftrightarrow t_{\text{л}} < -160^\circ\text{C}$ . Таким образом, на рассматриваемой области  $[-100^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$  пересечения нет, а значит и нет состояния чистого льда на диаграмме. Вид искомой диаграммы изображен на рисунке.



### Задача №9-Т4. А когда не натянута?

#### 1. Первый способ:

Так как колечко невесомое, равнодействующая приложенных к нему сил равна нулю в любой момент времени. Поскольку трения между спицей и колечком нет, спица действует на колечко в направлении, перпендикулярном спице, то есть в вертикальном. Тогда условие равенства нулю равнодействующей приложенных к колечку сил возможно, только если участок нити, соединяющий колечко с бусинкой, в любой момент ориентирован вертикально. Поскольку длина всей нити постоянна, а участок нити, соединяющий бусинку и кольцо, всё время остаётся вертикальным и по условию в начальный момент времени нить натянута, можем найти проекции начальной скорости на направление нитей. Вертикальный участок удлиняется со скоростью:

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha;$$

горизонтальный участок укорачивается со скоростью:

$$|v_{0x}| = v_0 \cos \alpha;$$

Чтобы длина нити оставалась постоянной, модули проекций скоростей должны быть равны:

$$v_{0y} = |v_{0x}|; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = v_0 \cos \alpha; \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1; \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

#### Второй способ:

Участок нити, соединяющий бусинку и кольцо, всё время остаётся вертикальным и по условию в начальный момент времени нить натянута. Пусть  $b$  – расстояние от спицы до точки крепления нити  $O$ . Приравняем длину нити через малое время  $\Delta t$  к начальной длине  $L + b$ :

$$L + b = b + v_{0y} \Delta t + \sqrt{(v_{0y} \Delta t)^2 + (L - v_{0x} \Delta t)^2};$$

где  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$  – горизонтальная и вертикальная проекции начальной скорости.

$$(L - v_{0y} \Delta t)^2 = (v_{0y} \Delta t)^2 + (L - v_{0x} \Delta t)^2 L^2 - 2L v_{0y} \Delta t = L^2 - 2L v_{0x} \Delta t + (v_{0x} \Delta t)^2.$$

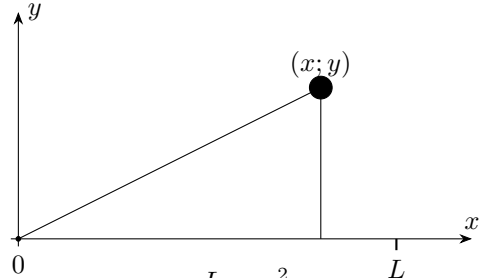
Пренебрежём вторым порядком малости:

$$v_{0y} = v_{0x}; \Rightarrow v_0 \sin \alpha = v_0 \cos \alpha; \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1; \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом:  $\alpha = \pi/4$ .

2. Проанализируем траекторию движения бусинки. Введём систему координат  $x, y$  с началом в точке  $O$ . Так как расстояние от спицы до начального положения бусинки постоянно, длина участка нити, находящегося выше  $Ox$ , также постоянна и равна  $L$ .

С учётом этого:



$$L = y + \sqrt{y^2 + x^2}; y^2 + x^2 = L^2 - 2Ly + y^2; y = \frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения при условии натяжения нити является параболой.

Далее найдём минимальную возможную начальную скорость  $v_{0min}$  бусинки, при которой нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы.

### Первый способ:

При свободном броске в поле тяжести траекторией будет являться парабола, которая касается полученной параболы. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полёта в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити. Получим уравнение траектории при свободном движении в поле тяжести:

$$\begin{cases} y = v_{0min} \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \\ x = L - v_{0min} \cos(\alpha)t \end{cases}$$

учтём, что  $\alpha = \pi/4$ , тогда:

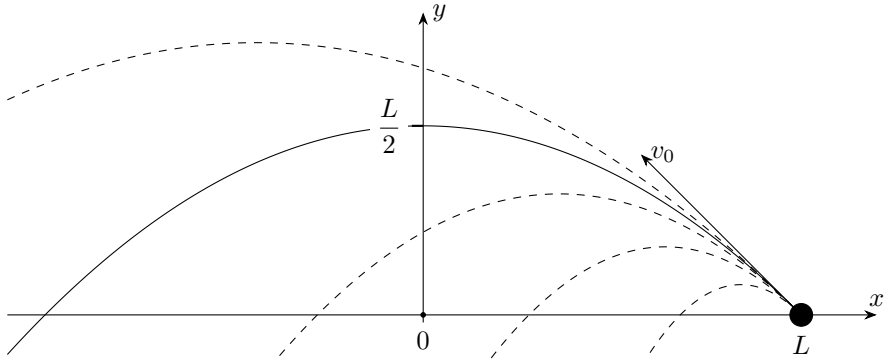
$$y = L - x - \frac{g(L - x)^2}{v_{0min}^2}; y = \frac{Lv_{0min}^2 - gL^2}{v_{0min}^2} + \frac{2gL - v_{0min}^2}{v_{0min}^2}x - \frac{g}{v_{0min}^2}x^2.$$

Сравнивая полученные уравнения для траекторий, получим:

$$v_{0min}^2 = 2gL.$$

### Второй способ:

Траектория движения при условии натяжения нити является параболой. При свободном броске в поле тяжести под фиксированным углом  $\alpha = \pi/4$  к горизонту траекториями полёта будут являться параболы, касающиеся параболы по которой движется бусинка на нити. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полета в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити.



Найдем горизонтальную проекцию скорости в случае броска по совпадающей траектории:

$$L = v_x t \Rightarrow t = \frac{L}{v_x}; \frac{L}{2} = \frac{gt^2}{2} = \frac{gL^2}{2v_x^2} \Rightarrow v_x = \sqrt{gL} \Rightarrow v_{0min} = \frac{v_x}{\cos \alpha} = \sqrt{2gL}.$$

### Третий способ:

При свободном броске в поле тяжести траекторией будет являться парабола, которая касается полученной параболы. Для случая, когда начальная скорость минимальна, траектория полета в поле тяжести совпадает с траекторией для всегда натянутой нити. Запишем закон сохранения энергии для системы "бусинка+нить+кольцо". Поскольку нить и кольцо являются невесомыми, их механические энергии равны нулю. Работа сил, действующих на конец  $O$  нити со стороны крепления и на кольцо со стороны спицы, равна нулю, поскольку конец нити  $O$  закреплён и не перемещается, а кольцо движется перпендикулярно силе взаимодействия со спицей.

$$\begin{cases} \frac{m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)}{2} = \frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{mgL}{2} \\ v_{0y} = v_{0min} \sin \alpha \end{cases}$$

учитывая, что  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , получаем:

$$v_{0min}^2 = 2gL \Rightarrow v_{0min} = \sqrt{2gL}.$$

Покажем, что при скоростях больших чем  $v_{0min}$ , бусинка будет продолжать двигаться по параболе ограниченной нитью. Рассмотрим силы со стороны нити на бусинку. С двух сторон бусинки на нее действуют одинаковые силы натяжения. Тогда результирующая этих двух сил направлена по биссектрисе угла, образованного нитями. Аналогично первой части решения можно показать, что

проекция скорости бусинки на вертикальную ось и на ось, направленную вдоль наклонного участка нити, будут равны по модулю. Это означает, что скорость бусинки направлена по биссектрисе внешнего угла, образованного нитями. Так как биссектрисы внешнего и внутреннего углов перпендикулярны, получаем, что скорость всегда перпендикулярна результирующей сил натяжения, а значит работу не совершает и не тормозит бусинку при любых скоростях, больших минимальной. При скоростях больших чем  $v_{0min}$  нить является натянутой, поскольку бусинка движется по кривой с меньшим радиусом кривизны, чем у траектории, соответствующей свободному полёту в поле тяжести. Тогда нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы при:

$$v_0 \geq \sqrt{2gL}.$$

### Задача №9-Т5. Удаление со льда

1. Возможны два различных режима движения ящика: без скольжения по скребку (рис. 1) и с проскальзыванием (рис. 2).

В первом режиме полная реакция опоры  $\vec{Q}_c$  (результатирующая силы нормальной реакции скребка  $\vec{N}_c$  и силы трения  $\vec{F}_{тр(c)}$  действующей на ящик со стороны скребка) направлена вдоль направления движения скребка, поэтому:

$$F_{тр(c)} = N_c \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку сила трения покоя удовлетворяет соотношению  $F_{тр(c)} \leq \mu N_c$ , то первый режим реализуется при условии:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu.$$

Если данное условие не выполняется, то реализуется второй режим. Во втором режиме сила трения  $\vec{F}_{тр(л)}$ , действующая на ящик со стороны льда, направлена противоположно  $\vec{Q}_c$ , поскольку ящик изначально неподвижен. При этом  $\vec{Q}_c$  образует угол  $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$  с нормалью к поверхности скребка и угол  $\beta = \alpha - \varphi$  с направлением ускорения скребка. Значит и направление движения ящика образует угол  $\beta$  с направлением ускорения скребка.

Для первого ящика  $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0,176 < \mu$ , значит он движется без скольжения по скребку. Для второго ящика  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 1 > \mu$ , и для него реализуется второй режим. Тогда путь первого ящика до границы ледяного поля  $s_1 = L$ , а значит ускорение скребка:

$$a = \frac{2L}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 0,8}{4} \text{ м/с}^2 = 0,4 \text{ м/с}^2$$

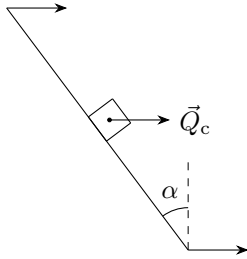


Рис.1

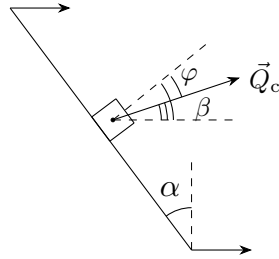


Рис.2

2. Найдём путь  $L_2$  второго ящика, зная, что его направление движения образует угол  $\beta$  с направлением ускорения скребка и ящик двигался из состояния покоя:

$$L_2 \cdot \cos(\beta) = L$$

Следовательно, отношение путей второго и первого ящиков:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \varphi)} \approx 1,14$$

3. Поскольку второй ящик движется без отрыва от скребка – проекции скорости ящика и скребка на направление нормали к поверхности скребка в любой момент должны быть одинаковы:

$$v_n = v_{я(n)}.$$

Тогда, поскольку ящик и скребок движутся поступательно – проекции ускорений ящика и скребка на направление нормали к поверхности скребка также должны совпадать:

$$a_n = a_{я(n)}.$$

Векторы ускорения  $\vec{a}$  и  $\vec{a}_{я}$  образуют углы  $\alpha_2$  и  $\varphi$  соответственно с нормалью к поверхности скребка:

$$a \cos \alpha_2 = a_{я} \cos \varphi.$$

Тогда во втором режиме для времени  $t_2$  движения ящика до края поля находим:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L_2}{a_{я}}} = \sqrt{\frac{2L}{a \cos \alpha_2 \cos(\alpha_2 - \varphi)}} = t_1 \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_2 \cos(\alpha_2 - \varphi)}}.$$

$$t_2 = t_1 \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_2 \cos(\alpha_2 - \varphi)}} \approx 2,5 \text{ с.}$$

4. Для нахождения силы трения между первым ящиком и скребком расставим силы, действующие на ящик, и запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось, параллельную плоскости скребка:

$$ma \sin \alpha_1 = F_{\text{тр}(c)1} - \mu' mg \sin \alpha_1; F_{\text{тр}(c)1} = m \sin \alpha_1 (a + \mu' g).$$

Для второго ящика из второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось, направленную вдоль нормали к поверхности скребка, получим:

$$ma_{\text{я}(n)} = ma \cos \alpha_2 = N_c - \mu' mg \cos \varphi \Rightarrow F_{\text{тр}(c)2} = \mu m (\mu' g \cos \varphi + a \cos \alpha_2).$$

Таким образом, отношение сил трения между скребком и ящиком в двух режимах:

$$\frac{F_{\text{тр}(c)2}}{F_{\text{тр}(c)1}} = \frac{\mu (\mu' g \cos \varphi + a \cos \alpha_2)}{\sin \alpha_1 (a + \mu' g)} \approx 1,4.$$

### Задача №10-Т1. Падение в бездну

1. Пусть  $m$  – масса шарика, ускорение свободного падения равняется  $\vec{g}$ , а сила сопротивления, действующая на шарик, определяется выражением  $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ , где  $\vec{v}$  – скорость движения шарика. Запишем для одного шарика второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

Проецируя уравнение на горизонтальную ось  $x$ , получим:

$$ma_x = -kv_x \Rightarrow \Delta x = \frac{mv_{0x}}{k},$$

где  $\Delta x$  – установившееся горизонтальное перемещение шарика с начальной горизонтальной компонентой скорости  $v_{0x}$ . Если  $v_{0x} = v_0$ , где  $v_0$  – начальная скорость шариков при бросании, то  $\Delta x = S$ . Тогда для шарика, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту, получим:

$$\Delta x = S \cos \alpha.$$

Шарики, одновременно брошенные Глюком и Багом горизонтально и под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту соответственно так, как показано на рис. 2 в условии задачи, в установившемся режиме движутся вдоль одной вертикальной прямой. Значит, расстояние между плоскостями обрывов  $l = L \cos \varphi = L\sqrt{3}/2$  является суммой величин горизонтальных перемещений брошенных шариков. Таким образом:

$$l = S + S \cos \alpha = \frac{3S}{2},$$

откуда:



$$L = \sqrt{3}S.$$

## 2. Первое решение:

Запишем второй закон Ньютона для шариков, брошенных Глюком и Багом:

$$m\vec{a}_\Gamma = m\vec{g} - k\vec{v}_\Gamma, \quad m\vec{a}_\text{Б} = m\vec{g} - k\vec{v}_\text{Б}.$$

Определим ускорение шарика Глюка относительно шарика Бага:

$$\vec{a}_\Gamma - \vec{a}_\text{Б} = \vec{a}_{\text{отн}} = -\frac{k(\vec{v}_\Gamma - \vec{v}_\text{Б})}{m} = -\frac{k\vec{v}_{\text{отн}}}{m} \Rightarrow \vec{a}_{\text{отн}} = -\frac{k\vec{v}_{\text{отн}}}{m}.$$

Поскольку относительное ускорение шариков направлено противоположно направлению их относительной скорости – относительная скорость шариков сохраняет своё направление. Значит, относительное движение шариков будет прямолинейным и прекратится, когда они окажутся на одной вертикали. Изобразим траекторию движения шарика Глюка относительно шарика Бага. Обратим внимание, что линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с вертикалью угол  $90^\circ - \varphi = 60^\circ$ . Поскольку направление относительной скорости образует угол  $\alpha/2$  с горизонтом, угол между направлением относительного перемещения шариков и линией, соединяющей Глюка и Бага, равен  $\varphi + \alpha/2 = 60^\circ$ . Таким образом, показанный на рисунке треугольник является равносторонним. Тогда расстояние  $S_\infty$  между шариками в установившемся режиме составляет:

$$S_\infty = L,$$

или же:

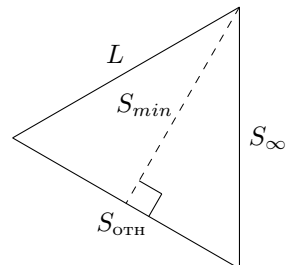
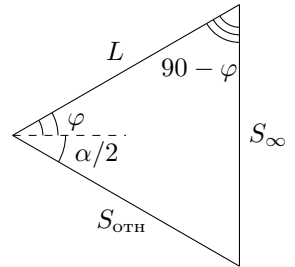
$$S_\infty = \sqrt{3}S.$$

Минимальное расстояние между шариками  $S_{\min}$  достигается в момент, когда относительная скорость шариков направлена перпендикулярно соединяющей их линии. Из рисунка находим:

$$S_{\min} = L \sin 60^\circ,$$

или же:

$$S_{\min} = \frac{3S}{2}.$$



**Второе решение:**

Введём систему координат  $xOy$ , где начало координат  $O$  находится в месте расположения Глюка, ось  $x$  направлена вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. Получим зависимости от времени горизонтальных и вертикальных компонент перемещений одного камня  $\Delta x$  и  $\Delta y$  соответственно. Спроецируем уравнение движения шарика на горизонтальную ось  $x$ :

$$m\dot{v}_x = -kv_x \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{kdt}{m} = -\beta dt.$$

Пусть  $v_{x0}$  – начальная проекция скорости шарика на ось  $x$ . Интегрируя, получим:

$$\int_{v_{x0}}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = \ln \frac{v_x(t)}{v_{x0}} = -\beta t \Rightarrow v_x(t) = v_{x0}e^{-\beta t}.$$

Интегрируя повторно, получим:

$$\Delta x(t) = \int_0^t v_x(t)dt = v_{x0} \int_0^t e^{-\beta t} dt = \frac{v_{x0}}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Таким образом, разность  $x$  координат шариков Бага и Глюка составляет:

$$\Delta x_{\text{отн}}(t) = x_{\text{Б}}(t) - x_{\text{Г}}(t) = L \cos \varphi - \frac{v_0(1 + \cos \alpha)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

С учётом соотношения  $S = v_0/\beta$  получим:

$$\Delta x_{\text{отн}}(t) = L \cos \varphi - S(1 + \cos \alpha)(1 - e^{-\beta t}).$$

Спроецируем уравнение движения шарика на ось  $y$ , направленную вертикально вверх:

$$m\dot{v}_y = -mg - kv_y \Rightarrow \frac{dv_y}{\frac{mg}{k} + v_y} = -\frac{kdt}{m} = -\beta dt.$$

Пусть  $v_{y0}$  – начальная проекция скорости шарика на ось  $y$ . Интегрируя, получим:

$$\int_{v_{y0}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{\frac{mg}{k} + v_y} = \ln \frac{mg + kv_y(t)}{mg + kv_{y0}} = -\beta t \Rightarrow v_y(t) = -\frac{mg}{k} + \left( \frac{mg}{k} + v_{y0} \right) e^{-\beta t}.$$

Для  $\Delta y(t)$  имеем:

$$\Delta y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = \int_0^t \left( -\frac{mg}{k} + \left( \frac{mg}{k} + v_{y0} \right) e^{-\beta t} \right) dt,$$

откуда:

$$\Delta y(t) = -\frac{mgt}{k} + \frac{1}{\beta} \left( \frac{mg}{k} + v_{y0} \right) (1 - e^{-\beta t}).$$

Таким образом, разность  $y$  координат шариков Бага и Глюка составляет:

$$\Delta y_{\text{отн}}(t) = y_{\text{Б}}(t) - y_{\text{Г}}(t) = L \sin \varphi + \frac{v_0 \sin \alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

С учётом соотношения  $S = v_0/\beta$  получим:

$$\Delta y_{\text{отн}}(t) = L \sin \varphi + S \sin \alpha (1 - e^{-\beta t}).$$

При  $t \rightarrow \infty$  имеем:

$$\Delta x_{\text{отн}}(\infty) = L \cos \varphi - S(1 + \cos \alpha) = 0.$$

$$\Delta y_{\text{отн}}(\infty) = L \sin \varphi + S \sin \alpha = S\sqrt{3}.$$

Таким образом  $S_{\infty} = \Delta y_{\text{отн}}(\infty)$ , а значит:

$$S_{\infty} = S\sqrt{3}.$$

Пусть  $(1 - e^{-\beta t}) = z$ . Тогда для расстояния  $r(z)$  между камнями имеем:

$$r(z) = \sqrt{\Delta x_{\text{отн}}^2(z) + \Delta y_{\text{отн}}^2(z)} = \sqrt{(L \cos \varphi - zS(1 + \cos \alpha))^2 + (L \sin \varphi + zS \sin \alpha)^2}.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$r(z) = \sqrt{L^2 + 2z^2S^2(1 + \cos \alpha) - 2LSz(\cos \varphi(1 + \cos \alpha) - \sin \varphi \sin \alpha)}.$$

Подставляя углы  $\alpha$ ,  $\varphi$ , а также расстояние  $L$ :

$$r(z) = S\sqrt{3(1 + z^2 - z)}.$$

Расстояние достигает своего минимума при минимальном значении подкоренного выражения, которому соответствует вершина параболы:

$$z_{\min} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$S_{\min} = \frac{3S}{2}.$$

### Задача №10-Т2. Столкновение на спице

1. Поскольку цилиндры являются невесомыми, равнодействующая приложенных к ним сил в любой момент должна быть равна нулю. Так как трения между спицей и цилиндрами нет, спица действует на цилиндры в направлении, перпендикулярном спице, то есть в вертикальном. До столкновения цилиндров на них действуют только силы натяжения нитей и силы реакции со стороны спицы. Тогда условие равенства нулю равнодействующей приложенных к цилиндрам сил возможно, если участки нитей, соединяющие цилиндры с бусинкой и грузом, в любой момент ориентированы вертикально. Из этого следует, что столкновение цилиндров произойдёт в момент, когда бусинка, груз и цилиндры будут расположены практически на одной вертикали.

Обратим внимание, что скорость груза в любой момент направлена горизонтально. В момент столкновения цилиндров скорость бусинки также направлена горизонтально. Пусть  $v_{\text{отн}}$  – скорость относительного движения бусинки и груза в момент столкновения цилиндров. Определим  $v_{\text{отн}}$  из закона сохранения механической энергии. К рассматриваемому моменту вертикальное перемещение бусинки направлено вниз и равно  $L/2$ , так как нити являются нерастяжимыми. Поскольку система замкнута в направлении спицы – её импульс в данном направлении равен нулю. Отсюда получим связь скоростей  $v_1$  и  $v_2$  бусинки и груза соответственно с величиной их относительной скорости  $v_{\text{отн}}$  в момент столкновения цилиндров:

$$v_1 = \frac{m_2 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_1 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2} \Rightarrow E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Запишем закон сохранения механической энергии:

$$E_k = \frac{m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}{2(m_1 + m_2)} = -\Delta W_p = \frac{m_1 g L}{2} \Rightarrow v_{\text{отн}}^2 = g L \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Находим скорости  $v_1$  и  $v_2$  бусинки и груза соответственно непосредственно перед столкновением цилиндров:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}, \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}.$$

2. В момент столкновения цилиндров все силы, действующие на бусинку и груз, являются вертикальными. Поскольку груз может перемещаться только по горизонтали, его ускорение в рассматриваемый момент равно нулю.

Пусть  $a_1$  – проекция ускорения бусинки в момент столкновения цилиндров на ось, направленную вертикально вверх. Из второго закона Ньютона для бусинки и груза получим:

$$2T_1 = m_1(g + a_1), \quad T_2 = T_1 + m_2g,$$

откуда:

$$T_1 = \frac{m_1(g + a_1)}{2}, \quad T_2 = m_2g + \frac{m_1(g + a_1)}{2}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо определить  $a_1$ . Далее можно действовать разными способами.

**Первый способ:**

Пусть  $\vec{a}_б$  и  $\vec{a}_г$  – ускорения бусинки и груза относительно лабораторной системы отсчёта, а  $\vec{a}_{отн}$  – ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом. Тогда ускорение бусинки можно представить в следующем виде:

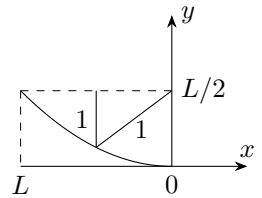
$$\vec{a}_б = \vec{a}_г + \vec{a}_{отн}.$$

Обратим внимание, что в рассматриваемый момент ускорение груза равняется нулю. Значит, в рассматриваемый момент ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом, направлено вертикально вверх и равно  $a_1$ . Дальнейшее решение задачи проведём в системе отсчёта, связанной с грузом. Непосредственно перед столкновением цилиндров относительная скорость бусинки и груза направлена горизонтально, значит:

$$a_1 = a_{отн} = \frac{v_{отн}^2}{\rho},$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории бусинки при движении в системе отсчёта груза.

Проанализируем траекторию относительного движения бусинки и груза. В системе отсчёта груза введём систему координат  $xOy$  с началом в нижней точке траектории бусинки относительно груза (см. рис). Запишем условие постоянства длины нити 1:



$$L = \left(\frac{L}{2} - y\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2} - y\right)^2 + x^2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения бусинки в системе отсчёта груза представляет собой параболу.

Определим радиус кривизны  $\rho$  в вершине параболы, используя аналогию со свободным полётом материальной точки в поле тяжести.

Пусть скорость материальной точки в некоторый момент равна  $v_0$  и направлена горизонтально. Материальная точка движется в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$ , направленным вертикально вниз. Введём систему координат  $xOy$ , где  $O$  – положение точки в рассматриваемый момент, ось

$x$  направлена горизонтально, а ось  $y$  направлена вертикально вниз. Тогда через прошедшее время  $t$  от рассматриваемого момента:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = \frac{gx^2}{2v_0^2} = \frac{x^2}{2p}.$$

Величина  $p$  называется фокальным параметром параболы. Определим радиус кривизны  $\rho_0$  траектории материальной точки в вершине параболы. Из второго закона Ньютона в рассматриваемый момент:

$$\frac{mv_0^2}{\rho_0} = mg \Rightarrow \rho_0 = \frac{v_0^2}{g} = p.$$

Вернёмся к определению радиуса кривизны траектории бусинки в системе отсчёта груза в момент столкновения цилиндров. Фокальный параметр параболы для траектории относительного движения бусинок равен  $L$ , поэтому радиус кривизны траектории относительного движения бусинок в рассматриваемый момент составляет:

$$\rho = L.$$

*Примечание:* Тот же результат может быть получен из непосредственного анализа кривой, задающей траекторию относительного движения бусинки и груза.

Рассмотрим произвольную кривую, заданную зависимостью  $y(x)$ . Пусть  $\varphi$  – угол наклона касательной к кривой. Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi'}{\cos^2 \varphi}.$$

Радиус кривизны произвольной плоской кривой определяется выражением:

$$\rho = \left| \frac{dl}{d\varphi} \right|,$$

где  $dl$  – элемент длины кривой, а  $d\varphi$  – угол между касательными к кривой на концах выделенного элемента. Но  $dl = dx / \cos \varphi$ , поэтому:

$$\rho = \left| \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dx}{d\varphi} \right| = \left| \frac{1}{\varphi' \cos \varphi} \right| = \left| \frac{1}{y'' \cos^3 \varphi} \right|.$$

Но  $1/\cos^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + y'^2$ , поэтому:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Применим полученное выражение в случае рассмотрения траектории движения бусинки относительно груза. Определим  $y'$  и  $y''$ :

$$y' = \frac{x}{L}, \quad y'' = \frac{1}{L}.$$

Тогда в точке с координатой  $x = 0$ :

$$\rho = L.$$

Таким образом:

$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

### Второй способ:

В рассматриваемый момент тангенциальное ускорение бусинки равно нулю, поэтому её ускорение  $a_1$  определяется выражением:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{\rho_1},$$

где  $\rho_1$  – радиус кривизны траектории бусинки в рассматриваемый момент. Проанализируем траекторию бусинки в лабораторной системе отсчёта. Введём систему координат  $xOy$  с началом в нижней точке траектории бусинки. Направления координатных осей совпадают с введёнными на рисунке к первому способу решения. Центр масс системы не перемещается вдоль оси  $x$ , поэтому:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{m_1 x_1}{m_2}.$$

Запишем условие постоянства длины нити 1:

$$L = \left( \frac{L}{2} - y_1 \right) + \sqrt{\left( \frac{L}{2} - y_1 \right)^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Отсюда:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 (1 + m_1/m_2)^2 = 2Ly_1 \Rightarrow y_1(x_1) = \frac{x_1^2(1 + m_1/m_2)^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения бусинки в лабораторной системе отсчёта является параболой. Поиск радиуса кривизны в её вершине уже был осуществлён в рамках первого решения, поэтому:

$$\rho_1 = \frac{L}{(1 + m_1/m_2)^2}.$$

Таким образом:

$$a_1 = \frac{v_1^2(1 + m_1/m_2)^2}{L} = g \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

### Третий способ:

Пусть  $\vec{a}_б$  и  $\vec{a}_г$  – ускорения бусинки и груза относительно лабораторной системы отсчёта, а  $\vec{a}_{отн}$  – ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом. Тогда ускорение бусинки можно представить в следующем виде:

$$\vec{a}_б = \vec{a}_г + \vec{a}_{отн}.$$

Обратим внимание, что в рассматриваемый момент ускорение груза равняется нулю. Значит, в рассматриваемый момент ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом, направлено вертикально вверх и равно  $a_1$ . Дальнейшее решение задачи проведём в системе отсчёта, связанной с грузом. Рассмотрим условие постоянства длины нити 1. Пусть в некоторый момент участок нити 1, соединяющий бусинку с грузом, образует угол  $\varphi$  с вертикалью. Найдём угол  $\theta$  между направлением скорости бусинки относительно груза и горизонтом. Поскольку скорости цилиндров направлены горизонтально, длина вертикального участка нити 1, соединяющего бусинку с цилиндром, изменяется со скоростью  $u_{бц}$ , равной:

$$u_{бц} = v_{отн} \sin \theta.$$

Длина участка нити 1, соединяющего бусинку с грузом, изменяется со скоростью  $u_{бг}$ , равной:

$$u_{бг} = v \cos(\varphi + 90 - \theta) = v_{отн} \sin(\theta - \varphi).$$

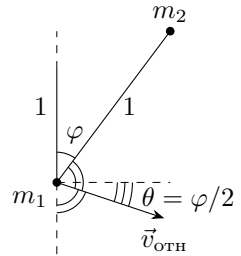
Поскольку длина нити 1 остаётся постоянной:

$$u_{бц} + u_{бг} = 0 \Rightarrow \sin \theta = \sin(\varphi - \theta) \Rightarrow \theta = \frac{\varphi}{2}.$$

Этот результат можно также получить из условия направления скорости бусинки вдоль биссектрисы внешнего угла между участками нити 1 (см. рис). Это является следствием оптического свойства параболы.

В рассматриваемый момент тангенциальное ускорение бусинки в рассматриваемой системе отсчёта равняется нулю, поэтому для проекции ускорения бусинки  $a_1$  на ось, направленную вертикально вверх, имеем:

$$a_1 = -v_{отн} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_{отн} \dot{\varphi}}{2}.$$





Найдём величину  $\dot{\varphi}$ . Поскольку в рассматриваемый момент расстояние между бусинкой и грузом равно  $L/2$ :

$$v_{\text{отн}} = -\frac{L\dot{\varphi}}{2} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{2v_{\text{отн}}}{L}.$$

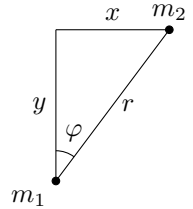
Подставляя  $\dot{\varphi}$  в выражение для  $a_1$ , получим:

$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

### Четвёртый способ:

Обозначим за  $y$  смещение бусинки в направлении «вертикально вниз», за  $x$  – расстояние между цилиндрами, а за  $r$  – длину участка нити 1, соединяющего груз и бусинку. Пусть в некоторый момент участок нити 1, соединяющий груз и бусинку, образует угол  $\varphi$  с вертикалью, тогда  $y = x \operatorname{ctg} \varphi$  и  $r = x / \sin \varphi$ . Из условия нерастяжимости нити получим:

$$L = y + r = x \operatorname{ctg} \varphi + \frac{x}{\sin \varphi}.$$



Отсюда:

$$x = \frac{L \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad y = \frac{L \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

В рассматриваемый момент  $\varphi = 0$ . Далее нижний индекс 0 соответствует рассматриваемому моменту. В рассматриваемый момент проекция ускорения бусинки на ось, направленную вертикально вверх, определяется выражением  $a_1 = -d^2 y_0 / dt^2$ . Дифференцируя  $y$  по времени, получим:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{L\dot{\varphi}(\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{L \sin \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Продифференцируем по времени величину  $dy/dt$ :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{L \sin \varphi \ddot{\varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2} - \frac{2L \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2}{(1 + \cos \varphi)^3} - \frac{L \cos \varphi \dot{\varphi}^2}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Поскольку в рассматриваемый момент  $\varphi = 0$ :

$$a_1 = \frac{L\dot{\varphi}_0^2}{4}.$$

Определим величину  $\dot{\varphi}_0$ . Для этого продифференцируем по времени выражение для  $x$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L\dot{\varphi}(\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} = \frac{L\dot{\varphi}}{1 + \cos \varphi}.$$

В рассматриваемый момент  $\varphi = 0$ , а  $dx/dt = -v_{\text{отн}}$ . Тогда:

$$-v_{\text{отн}} = \frac{L\dot{\varphi}_0}{2} \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = -\frac{2v_{\text{отн}}}{L}.$$

Таким образом:

$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Подставляя  $a_1$  в выражения для  $T_1$  и  $T_2$ , находим:

$$T_1 = m_1 g \left( 1 + \frac{m_1}{2m_2} \right), \quad T_2 = \left( m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{2m_2} \right) g.$$

### Задача №10-Т3. Из Архива ЦПМК

1. Пусть  $\Delta p$  – отличие давления воздуха под поршнем от атмосферного в начале процесса. Поршень придёт в движение, когда давление ртути на поршень сравняется с избыточным давлением воздуха под поршнем, откуда:

$$p_0 + \rho g h_1 = p_0 + \Delta p \Rightarrow h_1 = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Температура воздуха под поршнем может считаться постоянной. Поскольку нижняя часть трубы закрыта, количество воздуха под поршнем также будет оставаться постоянным. Тогда, если давление воздуха под поршнем обозначить за  $p_{\text{в}}$ , его зависимость от  $x$  определяется законом Бойля–Мариотта:

$$p_{\text{в}} V = \text{const} \Rightarrow p_{\text{в}} = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x}.$$

Пусть уровень ртути в сосуде равен  $h$ . Тогда давление  $p_{\text{р}}$  ртути на поршень составляет:

$$p_{\text{р}} = p_0 + \rho g(h + x).$$

В положении равновесия давление воздуха под поршнем равно давлению ртути на поршень, поэтому:

$$p_0 + \rho g(h + x) = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x}.$$

Когда уровень ртути в сосуде достигает максимального значения  $h_{max}$ , величина  $x = x_{max}$ , получаем:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h_1 = \left( \frac{p_0}{\rho g} + x_{max} + h_{max} \right) \left( 1 - \frac{x_{max}}{L} \right) - \frac{p_0}{\rho g},$$

или с учётом  $p_0/(\rho g) = h_0$ :

$$h_1 = \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} - h_0 = 380 \text{ мм.}$$

2. Перепишем условие равновесия поршня в следующем виде:

$$(h_0 + h + x)(L - x) = (h_0 + h_1)L.$$

Раскроем скобки и получим:

$$x^2 - (L - h_0 - h)x + (h_1 - h)L = 0.$$

Обратим внимание, что при  $h > h_1$  свободный член полученного квадратного уравнения является отрицательным, что следует из теоремы Виета, а значит уравнение имеет ровно один положительный корень. Тогда, поскольку нахождение поршня выше упоров не является возможным, при  $h > h_1$  поршень имеет единственное положение равновесия. Так как  $\Delta h \ll h_1$ , свободный член можно принять равным нулю. Сокращая решение  $x = 0$ , получим:

$$x_1 = L - h_0 - h_1,$$

или же:

$$x_1 = L - \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} = 1900 \text{ мм.}$$

3. После того, как уровень ртути в сосуде окажется ниже верхней части трубы, положение равновесия поршня перестанет изменяться. Решим квадратное уравнение, получаемое из условия равновесия поршня, при  $h = 0$ :

$$x_{2(1,2)} = \frac{L - h_0 \pm \sqrt{(L - h_0)^2 - 4Lh_1}}{2} = 0.76 \text{ м, } 1.52 \text{ м.}$$

Таким образом, когда уровень ртути в сосуде понизится до практически нулевого, поршень имеет два положения равновесия и расположится в том из них, которое является устойчивым. Проанализируем оба найденных положения равновесия поршня на устойчивость.

Положение равновесия поршня является устойчивым, если при повышении расстояния между ним и упорами давление воздуха под поршнем становится выше, чем давление ртути на поршень. Если расстояние между поршнем и упорами увеличилось на малую величину  $\Delta x$ , то условия устойчивости положения равновесия поршня можно записать следующим образом:

$$p_0 + \rho g(h + x + \Delta x) < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x}.$$

Используя условие равновесия, получим:

$$\rho g \Delta x < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x} - (p_0 + \rho g(h + x)) = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x} - \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x},$$

С учётом малости  $\Delta x$  имеем:

$$\rho g \Delta x < \frac{(p_0 + \Delta p)L \Delta x}{(L - x - \Delta x)(L - x)} \approx \frac{(p_0 + \Delta p)L \Delta x}{(L - x)^2} \Rightarrow \rho g < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{(L - x)^2}.$$

Определим значения  $x$ , при которых положения равновесия поршня является устойчивым:

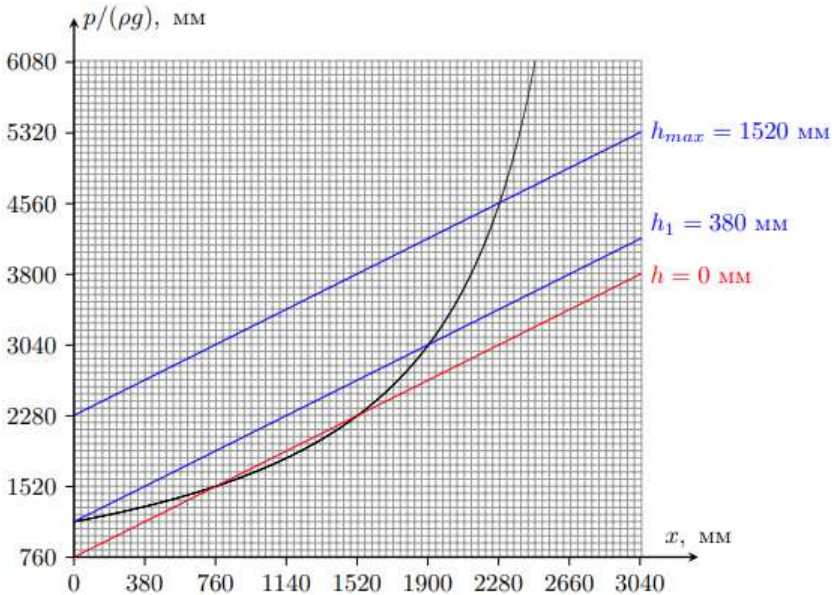
$$L > x > L - \sqrt{\frac{(p_0 + \Delta p)L}{\rho g}} = L - \sqrt{(h_0 + h_1)L} = x_{\text{кр}} \approx 1178 \text{ мм}.$$

Таким образом, положение равновесия  $x_{2(1)} = 760$  мм является неустойчивым, а  $x_{2(2)} = 1520$  мм – устойчивым. Отметим, что при  $h = 0$  положение  $x = 0$  также является положением равновесия, поскольку для данного положения давление воздуха под поршнем будет выше, чем давление ртути на поршень, равное атмосферному. Однако, пока поршень не окажется на расстоянии  $x = x_{\text{кр}}$  от упоров, он всегда будет располагаться в устойчивом положении равновесия. При этом величина  $x$  монотонно возрастает с увеличением уровня  $h$  ртути в сосуде. Поскольку найденная при  $h = 0$  величина  $x_{2(2)} > x_{\text{кр}}$ , то поршень в процессе понижения уровня ртути в сосуде всегда расположен в положении устойчивого равновесия и не может его покинуть. Таким образом, конечному положению поршня соответствует следующая величина  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{L - h_0 + \sqrt{(L + h_0)^2 - 4(h_0 + h_{\text{max}} + x_{\text{max}})(L - x_{\text{max}})}}{2} = 1520 \text{ мм}.$$

*Примечание:* Исследование на устойчивость положений равновесия поршня можно осуществить не только аналитически, но и графически. Для это построим

график зависимости  $p_b(x)$  (чёрная линия на рис.), а поверх него — прямые  $p_p(x)$  при различных значениях  $h$ , где давления измеряются в миллиметрах ртутного столба. Точки пересечения графиков функций  $p_b(x)$  и  $p_p(x)$  соответствуют положениям равновесия поршня. Если вблизи точки пересечения с увеличением  $x$  функция  $p_b(x)$  возрастает на большую величину, чем функция  $p_p(x)$ , то при малом смещении поршня равнодействующая приложенных к нему сил будет направлена противоположно смещению поршня, и, следовательно, положения равновесия будет являться устойчивым. Если же вблизи точки пересечения с увеличением  $x$  функция  $p_b(x)$  возрастает на меньшую величину, чем функция  $p_p(x)$ , то при малом смещении поршня равнодействующая приложенных к нему сил будет направлена вдоль смещения поршня, и, следовательно, положение равновесия поршня будет являться неустойчивым. Из рисунка видно, что при  $h > h_1$  все положения равновесия поршня являются устойчивыми, а положение равновесия  $x = 0$  при  $h = h_1$  является неустойчивым. Если мы рассмотрим случай  $h = 0$  (красная прямая на графике), то точка пересечения  $x_{2(1)} = 760$  мм соответствует неустойчивому, а  $x_{2(2)} = 1520$  мм — устойчивому положению равновесия.



4. Используя результаты решения первого пункта, определим величину  $h_1$ , при которой поршень приходит в движение:

$$h_1 = \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} - h_0 = 1140 \text{ мм.}$$

Запишем условие равновесия поршня:

$$x^2 - x(L - h_0 - h) + L(h_1 - h) = 0.$$

Решению  $x = 0$  соответствует величина  $h = h_1$ . Однако при решении второго пункта мы получали, что при  $h = h_1$  у поршня существует второе положение равновесия на расстоянии  $x_1$  от упоров, равном:

$$x_1 = L - \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} = 1140 \text{ мм.}$$

Данное положение является устойчивым, что можно показать, используя критерий устойчивости положения равновесия, полученный при решении четвёртого пункта:

$$x > L - \sqrt{(h_0 + h_1)L} = x_{кр} \approx 637 \text{ мм.}$$

Данное условие выполнено при  $x = x_1$ , поэтому в процессе понижения уровня ртути в сосуде поршень не достигает упоров при  $h = h_1$ .

При последующем понижении уровня ртути в сосуде у поршня есть два положения равновесия, одно из которых является устойчивым, а другое – неустойчивым. Пока расстояние  $x$  между поршнем и упорами удовлетворяет условию  $x > x_{кр}$ , поршень располагается в положении устойчивого равновесия. Когда расстояние между поршнем и упорами станет равно  $x = x_{кр}$ , два положения равновесия поршня, одно из которых является устойчивым, а второе – неустойчивым, совпадут и станут единым положением неустойчивого равновесия по отношению к смещению в сторону упоров. Данное положение соответствует касанию на графиков зависимостей  $p_v(x)$  и  $p_p(x)$ , приведённых в примечании к решению четвёртого пункта задачи. Из этого же графика видна неустойчивость данного положения равновесия поршня по отношению к смещению в сторону упоров.

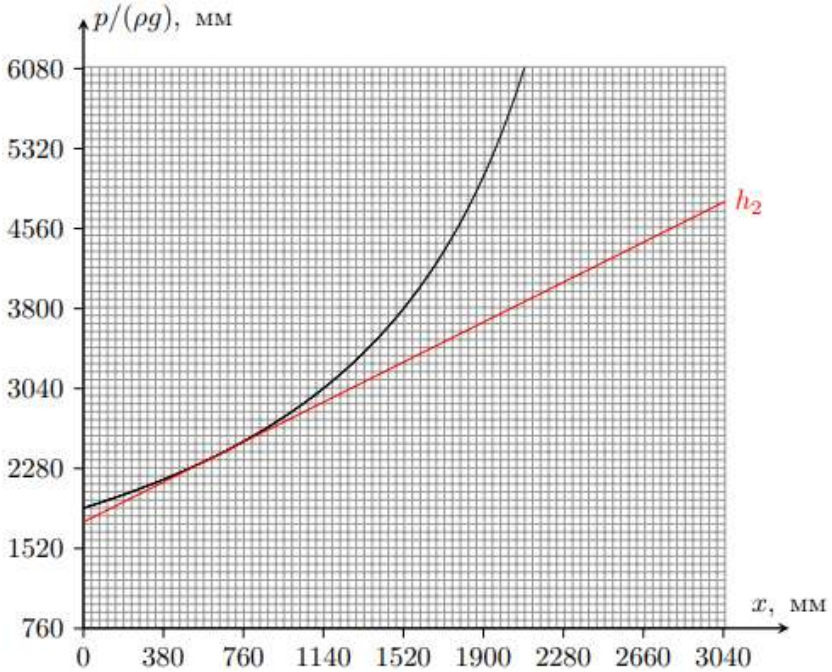
Таким образом, если при некотором значении  $h = h_2$  поршень оказывается в положении  $x = x_{кр}$ , то при данном значении  $h$  во всех положениях, кроме  $x = x_{кр}$ , давление воздуха под поршнем будет больше, чем давление ртути на поршень (см. рис. ниже), поэтому поршень скачкообразно перемещается в сторону упоров и при дальнейшем понижении уровня ртути в сосуде от них не оторвётся.

Учтём, что касание графиков соответствует наличию единственного корня у квадратного уравнения, получаемого из условия равновесия поршня. Воспользуемся теоремой Виета:

$$2x_{кр} = L - h_0 - h_2.$$

После подстановки  $h_1$  в выражение для  $x_{кр}$  находим:

$$h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})} - (L + h_0) \approx 1007 \text{ мм.}$$



### Задача №10-Т4. Полёты стержня

1. Определим силу отталкивания  $F_{r2}$  между сферой и стержнем во втором эксперименте в зависимости от расстояния  $r_A$  между концом  $A$  стержня и центром сферы.

#### Первый способ:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$F_{r2} = - \frac{dW_p}{dr_A},$$

где  $r_A$  – расстояние между центром сферы и концом стержня  $A$ . Если расстояние между центром сферы и концом стержня  $A$  изменить на величину  $dr_A$ , то изменение потенциальной энергии будет равно изменению потенциальной элемента стержня длиной  $dr_A$  при перемещении из положения, соответствующего концу стержня  $A$  в положение, соответствующее концу стержня  $B$ . Тогда для  $dW_p$  имеем:

$$dW_p = \lambda(\varphi_B - \varphi_A)dr_A,$$

где  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  – потенциалы электростатического поля сферы на концах  $A$  и  $B$  стержня соответственно. При этом  $\varphi_B \approx 0$ , поскольку стержень очень длинный.

Таким образом:

$$F_{r2} = \lambda\varphi_A.$$

Поскольку сфера заряжена равномерно по поверхности, внутри неё напряжённость электростатического поля равна нулю, а снаружи совпадает с полем точечного заряда  $Q$ , расположенного в её центре. Таким образом:

$$\varphi_A(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R, \end{cases} \Rightarrow F_{r2}(r_A) = \begin{cases} \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R. \end{cases}$$

**Второй способ:**

Напряжённость  $E_r$  электростатического поля сферы внутри равна нулю, а снаружи совпадает с напряжённостью электростатического поля заряда  $Q$ , расположенного в центре сферы, поэтому зависимость  $E_r(r)$  имеет следующий вид:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Поскольку длина стержня во много раз больше радиуса сферы  $R$ , то будем считать её бесконечной. Тогда для силы  $F_{r2}$  имеем:

$$F_{r2} = \int_{r_A}^{\infty} E_r(r) \lambda dr.$$

Если конец  $A$  стержня расположен внутри сферы, то сила, действующая на расположенную внутри сферы часть стержня со стороны электростатического поля сферы, равна нулю. Отсюда:

$$F_{r2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Если же конец  $A$  стержня расположен вне сферы:

$$F_{r2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}.$$

Таким образом:

$$F_{r2}(r_A) = \begin{cases} \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R. \end{cases}$$



Обратим внимание, что стержень движется с постоянным ускорением  $a = Q\lambda/(4\pi\varepsilon_0 mR)$ , пока его конец  $A$  расположен внутри сферы. Поскольку стержень начинает движение без начальной скорости, для времени движения  $T_1$  и скорости стержня  $V_1$  в момент вылета из сферы имеем:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2R}{a}}, \quad V_1 = aT_1 = \sqrt{2aR},$$

или:

$$T_1 = R\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m}}.$$

2. После вылета стержня из сферы его движение происходит в силовом поле, обратно пропорциональном расстоянию от его конца  $A$  до центра сферы. Пусть  $W_2(r_A)$  – потенциальная энергия взаимодействия стержня со сферой во втором эксперименте. Определим квадрат скорости стержня  $V^2(r)$  при расстоянии  $r_A$  между его концом  $A$  и центром сферы:

$$\frac{mV^2(r_A)}{2} + W_2(r_A) = \frac{mV_1^2}{2} + W_2(R) \Rightarrow V^2(r_A) = V_1^2 + \frac{2(W_2(R) - W_2(r_A))}{m}.$$

Тогда для скорости  $V_2$  имеем:

$$V_2 = V(l) = \sqrt{V_1^2 + \frac{2(W_2(R) - W_2(l))}{m}}.$$

Для определения разности  $W_2(R) - W_2(l)$  рассмотрим первый эксперимент. Сила взаимодействия между сферой и стержнем равна силе взаимодействия стержня с точечным зарядом  $Q$ , расположенным в центре сферы. Пусть  $r_C$  – расстояние между центрами стержня и сферы. Поскольку стержень очень длинный – его поле можно вычислить как поле бесконечного стержня. Из теоремы Гаусса получим:

$$\Phi = 2\pi r_C L E_r(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r_C) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_C}.$$

Для силы взаимодействия между стержнем и сферой в первом эксперименте получим:

$$F_{r1}(r_C) = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_C}.$$

Обратим внимание, что сила взаимодействия стержня со сферой в первом эксперименте вдвое больше силы взаимодействия стержня со сферой во втором эксперименте при одинаковых значениях  $r_A$  и  $r_C$ . Тогда если  $W_1(r_C)$  – потенциальная

энергия взаимодействия стержня со сферой в первом эксперименте, имеем:

$$W_1(R) - W_1(l) = 2(W_2(R) - W_2(l)).$$

При этом из закона сохранения энергии в первом эксперименте имеем:

$$\frac{mu_0^2}{2} = W_1(R) - W_1(l) = 2(W_2(R) - W_2(l)) \Rightarrow \frac{2(W_2(R) - W_2(l))}{m} = \frac{u_0^2}{2}.$$

Таким образом:

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{u_0^2}{2},$$

откуда:

$$V_2 = \sqrt{\frac{3Q\lambda}{4\pi m \varepsilon_0}}.$$

3. Пусть  $t$  – время, отсчитываемое от момента вылета стержня из сферы во втором эксперименте, через которое конец  $A$  стержня оказывается на расстоянии  $S$  от центра сферы. При этом возможны два решения, построенных на различных рассуждениях.

#### Первое решение:

Рассмотрим движение стержня во втором эксперименте после вылета из сферы. Силовые поля, в которых стержни движутся в первом и втором экспериментах, подобны друг другу и отличаются в два раза. Это означает, что если отношение квадратов начальных скоростей  $v^2/V_1^2 = 2$ , то для любого  $r = r_A = r_C$  соотношение  $v_1^2(r)/V^2(r) = 2$  будет сохраняться, где  $v_1(r)$  – скорость стержня в первом эксперименте. Действительно:

$$v_1^2(r) = v^2 + \frac{2(W_1(R) - W_1(r))}{m} = 2V_1^2 + \frac{4(W_2(R) - W_2(r))}{m} = 2V^2(r).$$

Тогда во втором эксперименте любой бесконечно малый отрезок  $dr$  проходится за время  $dt$ , в  $\sqrt{2}$  раз большее времени  $d\tau$ , за которое тот же отрезок  $dr$  проходится стержнем в первом эксперименте. Таким образом:

$$t = \sqrt{2}\tau(\sqrt{2}V_1) = \sqrt{2}\tau_0 y(\sqrt{2}V_1/v_0).$$

#### Второе решение:

Рассмотрим движение стержня во втором эксперименте после вылета из сферы. Силовые поля, в которых стержни движутся в первом и втором экспериментах, подобны друг другу и отличаются в два раза. Обратим внимание, что график зависимости  $y(x)$ , описывающий зависимость  $\tau(v)$  в первом эксперименте,

не изменяет свою форму при изменении параметров  $Q$ ,  $\lambda$ ,  $m$  и  $R$ . Если величину произведения  $Q\lambda$  уменьшить в два раза, то зависимость  $y(x)$  описывает зависимость времени  $t$  от скорости стержня  $V_1$  на поверхности сферы, где  $y = t/t_0$  и  $x = V_1/V_0$ , а  $t_0 = \sqrt{2}\tau_0$  и  $V_0 = v_0/\sqrt{2}$ . Тогда для времени  $t$  имеем:

$$t = t_0 y(V_1/V_0) = \sqrt{2}\tau_0 y(\sqrt{2}V_1/v_0).$$

Определим координату  $x$  на графике, приведённом для первой серии экспериментов:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}V_1}{v_0} = 2.$$

При этом  $y(2) \approx 0.43$ . Тогда имеем:

$$t = Ry(2)\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}}.$$

Полное время движения стержня  $T$  складывается из  $T_1$  и  $t$ , поэтому:

$$T = R(1 + y(2))\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 m}{Q\lambda}},$$

или же:

$$T \approx 7.17 \cdot R\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{Q\lambda}} \approx 2.02 \cdot R\sqrt{\frac{m}{kQ\lambda}}.$$

### Задача №10-Т5. Электротетраэдр

#### 1. Первое решение:

Для определения величины силы тока, текущего через первый источник, воспользуемся методом эквивалентного источника. Всю оставшуюся часть тетраэдра, подключённую к выводам  $A$  и  $B$  первого источника, можно заменить одним эквивалентным источником с внутренним сопротивлением  $r_{0(1)}$  и ЭДС  $\mathcal{E}_{0(1)}$ . При этом эквивалентная схема для определения силы тока, текущего через первый источник, будет выглядеть так, как показано на рис. 1.

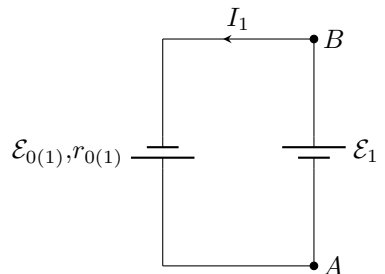


Рис.1

Сразу найдём сопротивление эквивалентного источника  $r_{0(1)}$ , подключенного к узлам  $A$  и  $B$ . Для этого заменим второй источник идеальной перемычкой и рассчитаем сопротивление моста между

узлами  $A$  и  $B$ :

$$r_{0(1)} = r_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Величина силы тока  $I_1$ , текущего через первый источник, определяется выражением:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{0(1)} + \mathcal{E}_1}{r_{0(1)}}.$$

Пусть верхний индекс  $(-)$  соответствует величине силы тока через источник при изменённой на противоположную полярности его подключения. Тогда:

$$I_1^- = \frac{\mathcal{E}_{0(1)} - \mathcal{E}_1}{r_{0(1)}}.$$

Из данного выражения видно, что независимость от полярности подключения первого источника величины силы текущего через него тока возможно, если  $\mathcal{E}_{0(1)} = 0$ . Поймём, при каком условии это возможно. ЭДС  $\mathcal{E}_{0(1)}$  эквивалентного источника равна показаниям идеального вольтметра, подключённого в цепь к узлам  $A$  и  $B$  вместо первого источника. Показания вольтметра будут равны нулю, если мост, составленный из резисторов с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  будет сбалансирован, откуда получим связь между сопротивлениями резисторов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Таким образом, сила тока, текущего через первый источник, равна  $I_1 = \mathcal{E}_1 / r_{0(1)}$ .

Теперь определим силу тока, текущего через второй источник, вновь используя метод эквивалентного источника. Всю оставшуюся часть тетраэдра (включая первый источник), подключённую к выводам  $C$  и  $D$  второго источника, заменим эквивалентным источником с внутренним сопротивлением  $r_{0(2)}$  и ЭДС  $\mathcal{E}_{0(2)}$ . При этом эквивалентная схема для определения силы тока, текущего через второй источник, будет выглядеть так, как показано на рис. 2.

Величина силы тока  $I_2$ , текущего через второй источник, определяется выражением:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{0(2)}}{r_{0(2)}}.$$

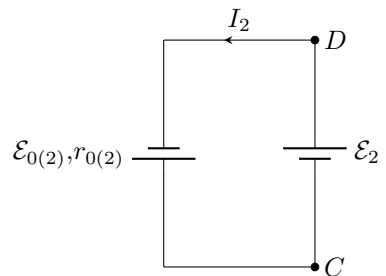


Рис.2

Обозначим силу тока, текущего через второй источник при изменённой полярности подключения первого источника, за  $I'_2$ . Поскольку  $\mathcal{E}_{0(2)} \sim \mathcal{E}_1$ , величина  $I'_2$  определяется выражением:

$$I'_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{0(2)}}{r_{0(2)}}.$$

Сразу найдём сопротивление эквивалентного источника  $r_{0(2)}$ , подключённого к узлам  $C$  и  $D$ . Для этого заменим первый источник идеальной перемычкой и рассчитаем сопротивление моста между узлами  $C$  и  $D$ :

$$r_{0(2)} = r_{CD} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

ЭДС  $\mathcal{E}_{0(2)}$  эквивалентного источника равна показаниям идеального вольтметра, подключённого в цепь к узлам  $C$  и  $D$  вместо второго источника. Показания вольтметра будут равны нулю, поскольку мост является сбалансированным и для подключения вольтметра вместо второго источника. Действительно:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Таким образом, величина силы тока, текущего через второй источник и равная  $I_2 = \mathcal{E}_2/r_{0(2)}$ , не зависит от полярности подключения первого источника, а значит:

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ А}.$$

### Второе решение:

Воспользуемся методом наложения токов. Будем искать силы токов в ветвях цепи как суперпозицию сил токов, текущих в данных ветвях под действием одного источника, при условии, что другой источник в силу его идеальности заменён идеальной перемычкой.

Пусть перемычкой заменён второй источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники при этом, за  $I_{1(1)}$  и  $I_{2(1)}$  соответственно (см. рис. 3). Тогда при смене полярности подключения первого источника направление тока  $I_{1(1)}$ , текущего через него, изменится на противоположное, а величина силы тока останется неизменной.

Теперь перемычкой заменим первый источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники при этом, за  $I_{1(2)}$  и  $I_{2(2)}$  соответственно (см. рис. 4).

Если сила тока  $I_{1(2)}$ , текущего в перемычке под действием второго источника, не равна нулю, то сохранение величины силы полного тока через первый

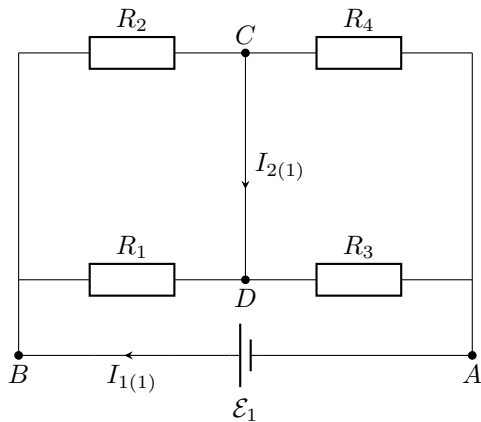


Рис.3

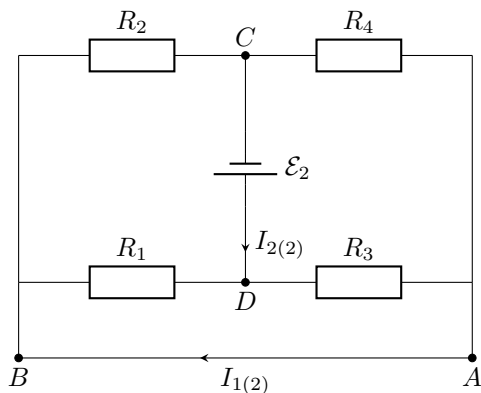


Рис.4

источник при смене его полярности невозможно. Значит, сила тока  $I_{1(2)}$ , текуще-го в перемычке  $AB$  под действием второго источника, равна нулю. Это возможно, только если мост является сбалансированным. Тогда имеем следующее соотношение между сопротивлениями:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Обратим внимание, что данное условие также является условием балансировки моста, к которому подключён первый источник, когда второй заменён перемыч-

кой  $CD$ . Значит, сила тока  $I_{2(1)}$ , текущего в перемычке  $CD$  под действием первого источника, также равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что силы токов, текущих через первый и второй источники, определяются только величинами ЭДС соответствующих источников и полярностями их подключений. Таким образом, сила тока  $I'_2$ , текущего через второй источник при смене полярности подключения первого источника, равна:

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ А.}$$

**Третье решение:**

Расставим в исходной схеме токи с учётом закона сохранения заряда. В данной схеме есть 3 независимых тока, поэтому достаточно ввести лишь 3 силы тока  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  (см. рис. 5).

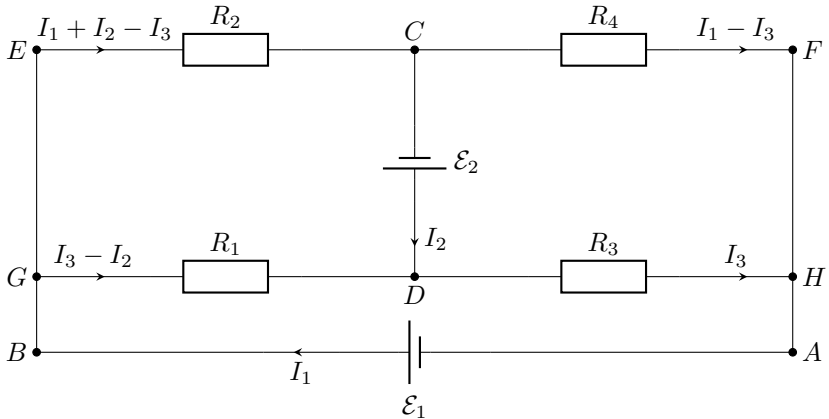


Рис.5

Применим второе правило Кирхгофа к контуру  $CDGE$ :

$$\mathcal{E}_2 = I_1 R_2 + I_2 (R_1 + R_2) - I_3 (R_1 + R_2).$$

Применим второе правило Кирхгофа к контуру  $CDHF$ :

$$\mathcal{E}_2 = I_3 (R_3 + R_4) - I_1 R_4 \Rightarrow I_3 = \frac{I_1 R_4 + \mathcal{E}_2}{R_3 + R_4}.$$

Применим второе правило Кирхгофа к контуру  $ABGDH$ :

$$\mathcal{E}_1 = I_3 (R_1 + R_3) - I_2 R_1.$$

Исключая  $I_3$ , получим следующую систему уравнений относительно  $I_1$  и  $I_2$ :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \frac{(I_1 R_4 + \mathcal{E}_2)(R_1 + R_3)}{R_3 + R_4} - I_2 R_1; \\ \mathcal{E}_2 = I_1 R_2 + I_2(R_1 + R_2) - \frac{(I_1 R_4 + \mathcal{E}_2)(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4}. \end{cases}$$

Выразим  $I_2$  из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = I_1 R_2 - \frac{I_1 R_4(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} - \frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} + \frac{I_1 R_4(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}{R_1(R_3 + R_4)} + \\ + \frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}{R_1(R_3 + R_4)} - \frac{\mathcal{E}_1(R_1 + R_2)}{R_1}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) = I_1 \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right).$$

Аналогично выразим  $I_1$  из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\mathcal{E}_2 = I_2(R_1 + R_2) - \frac{(\mathcal{E}_1 + I_2 R_1)(R_1 + R_2)}{R_1 + R_3} + \frac{(\mathcal{E}_1 + I_2 R_1)(R_3 + R_4)R_2}{R_4(R_1 + R_3)} - \frac{\mathcal{E}_2 R_2}{R_4}.$$

Отсюда:

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \left( \frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \right) = I_2 \left( \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right).$$

Рассмотрим выражение для силы тока  $I_1$ . Поскольку при изменении полярности подключения первого источника величина силы тока, текущего через него, не изменяется, коэффициент при  $\mathcal{E}_2$  равен нулю. Отсюда:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Обратим внимание, что в выражении для силы тока  $I_2$  коэффициент перед  $\mathcal{E}_1$  также равен нулю. Действительно:

$$\frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} = 0.$$

Таким образом, величина силы тока  $I_2'$ , текущего через второй источник при смене полярности подключения первого источника, равна:



$$I_2' = I_2 = 2 \text{ A.}$$

**2. Первое решение:**

Величины сил токов  $I_{2a}$  и  $I_{2б}$  в случаях "а" и "б" соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам  $C$  и  $D$  второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{2б} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_б}.$$

Поскольку мост является сбалансированным, удаление перемычки  $AB$  не приведёт к изменению сопротивления моста между узлами  $C$  и  $D$ . Тогда сопротивления моста  $r_a$  и  $r_б$  будут одинаковыми и равными сопротивлению эквивалентного источника  $r_{0(2)}$ , найденному при решении первого пункта, т.е.  $I_{2a} = I_{2б}$ . Тогда, поскольку  $I_2 = \mathcal{E}_2/r_{0(2)}$ :

$$I_{2a} = I_{2б} = I_2 = 2 \text{ A.}$$

**Второе решение:**

Величины сил токов  $I_{2a}$  и  $I_{2б}$  в случаях "а" и "б" соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам  $C$  и  $D$  второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{2б} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_б}.$$

Поскольку мост является сбалансированным, удаление перемычки  $AB$  не приведёт к изменению сопротивления моста между узлами  $C$  и  $D$ . Тогда сопротивления моста  $r_a$  и  $r_б$  будут одинаковыми, значит  $I_{2a} = I_{2б}$ . Из решения первого пункта следует:

$$I_1 = I_{1(1)}, \quad I_2 = I_{2(2)}.$$

Тогда замена первого источника перемычкой не изменит величину силу тока  $I_2$ , поскольку величина  $I_{2(2)}$  найдена для схемы, которую предлагается рассмотреть в случае "б" (см. рис. 4). Таким образом:

$$I_{2a} = I_{2б} = I_2 = 2 \text{ A.}$$

**Третье решение:**

Величина силы тока, текущего через источник в исходной схеме, определяется выражением:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}.$$

Величины сил токов  $I_{2a}$  и  $I_{2б}$  в случаях "а" и "б" соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам  $C$  и  $D$  второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{2б} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_б}.$$

Сопротивление  $r_б$  определяется выражением:

$$r_б = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3},$$

откуда следует, что  $I_{2б} = I_2$ . Поскольку  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ , при подключении второго источника к узлам  $C$  и  $D$  мост является сбалансированным при наличии переключки  $AB$ . Тогда удаление переключки  $AB$  не изменит сопротивления между узлами  $C$  и  $D$ , т.е.  $r_a = r_б$ . Таким образом:

$$I_{2a} = I_{2б} = I_2 = 2 \text{ A}.$$

3. Силы токов  $I_1$  и  $I_2$ , текущих через первый и второй источники соответственно, определяются выражениями:

$$\mathcal{E}_1 = I_1 \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right), \quad \mathcal{E}_2 = I_2 \left( \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right).$$

Введём два обозначения:

$$R_1 = kR_2, \quad R_4 = \alpha R_2.$$

Тогда  $R_3 = \alpha k R_2$ , и для сил токов  $I_1$  и  $I_2$ , текущих через первый и второй источники соответственно, имеем:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2} \cdot \frac{1+k}{k(1+\alpha)}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha(1+k)}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим, что

$$I_1 I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{R_2^2 \alpha k} \Rightarrow \alpha k = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{I_1 I_2 R_2^2} = 4.$$

Заметим, что из условия задачи следует:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{I_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{I_2}.$$

Тогда из этого соотношения и выражений для  $I_1$  и  $I_2$  получаем

$$\frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha} = \frac{k(1+\alpha)}{1+k} \Rightarrow \alpha(1+k)^2 = k(1+\alpha)^2.$$

Раскроем скобки:

$$\alpha + 2\alpha k + k^2\alpha = k + 2\alpha k + \alpha^2 k \Rightarrow \alpha + 4k = k + 4\alpha \Rightarrow \alpha = k.$$

Учитывая, что  $\alpha k = 4$ , имеем  $k = \alpha = 2$ . Тогда находим:

$$R_1 = R_4 = 2R_2 = 6 \text{ Ом}, \quad R_3 = 4R_2 = 12 \text{ Ом}.$$

### Задача №11-Т1. Две окружности

1. Уравнение движения бусинки на резинке в магнитном поле  $\vec{B}$  имеет вид

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

то есть (как и отмечено в условии) оно является *линейным* и *однородным* уравнением по отношению к закону движения  $\vec{r}(t)$  (сам вектор координаты, откладываемый от положения равновесия бусинки и его производные – скорость и ускорение – входят в уравнение только в первой степени). При движении по окружности радиуса  $r_0$  центростремительное ускорение бусинки создается силой упругости резинки и силой Лоренца, причем в зависимости от направления вращения сила Лоренца либо направлена к центру окружности, либо от него. Значит, величина угловой скорости бусинки при таком движении находится из уравнения

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 \pm qB\omega r_0 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{qB}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0.$$

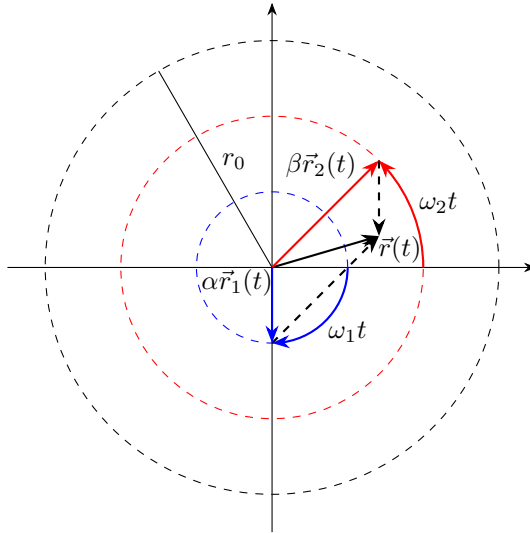
Далее введем обозначения  $\Omega \equiv \frac{qB}{2m}$  и  $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ . Тогда, выбирая для каждого случая положительный корень, приходим к выводу, что при вращении по часовой стрелке величина угловой скорости (циклическая частота вращения)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m},$$

а при вращении против часовой стрелки она равна

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} < \omega_1,$$

*Примечание:* в обоих случаях угловая скорость не зависит от радиуса окружности! Поэтому величина линейной скорости пропорциональна радиусу описываемой окружности.



2. Пусть теперь  $\vec{r}_1(t)$  – закон движения бусинки, вращающийся по окружности радиуса  $r_0$  по часовой стрелке, а  $\vec{r}_2(t)$  – закон движения бусинки, вращающийся по той окружности против часовой стрелки. Модули скоростей движения у бусинки при этих движениях различаются: легко найти, что  $|\vec{v}_1| = \omega_1 r_0$ , а  $|\vec{v}_2| = \omega_2 r_0$ . Если записать *суперпозицию* этих законов движения в виде

$$\vec{r}(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t) + \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t),$$

то, в соответствии с линейностью и однородностью уравнения движения (и в соответствии с содержащейся в условии «подсказкой») этот закон тоже удовлетворяет уравнению движения. Легко определить начальные условия, которым он соответствует: поскольку  $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) \equiv \vec{r}_0$  и при различных направлениях вращения  $|\vec{v}_1(0)| = \omega_1 r_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} |\vec{v}_2(0)|$ , то  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  и  $\vec{v}(0) = 0$ . Следовательно, полученный закон описывает движение бусинки, запущенной без начальной скорости с расстояния  $r_0$  от отверстия! Мы обнаружили, что вектор координаты такой бусинки можно в любой момент времени найти как сумму вектора  $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t)$  с постоянной длиной  $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_1$  по часовой стрелке, и вектора  $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t)$  с постоянной длиной  $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega_2$  против часовой стрелки от того же начального положения

(см. рисунок). Отметим, что угол между этими векторами в момент времени  $t$  равен  $\varphi(t) = (\omega_1 + \omega_2)t$ . Поэтому, по теореме косинусов, в этот момент времени расстояние от бусинки до отверстия удовлетворяет уравнению

$$r^2(t) = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Значит,

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1 + \omega_2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t]}.$$

Таким образом, циклическая частота изменения расстояния от бусинки по положению равновесия равна  $\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$ , причем минимальное значение

$$r_{\min} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} r_0$$

расстояние принимает в моменты времени  $t_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} \left( n + \frac{1}{2} \right)$  (где  $n =$

$0, 1, 2, \dots$ ). Отметим, что для нахождения  $r_{\min}$  не обязательно исследовать закон изменения расстояния  $r(t)$ : достаточно понять, что расстояние от бусинки до отверстия минимально, когда вектора «составляющих» векторов нашей суперпозиции направлены противоположно. Тогда ясно, что  $r_{\min}$  равно разности их модулей.

3. Из формулы для  $r(t)$  видно, что максимальное расстояние от бусинки до отверстия равно начальному  $r_{\max} = r_0$ , и оно достигается в моменты времени

$t'_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} n$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Как видно, впервые после отпускания это произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$$

Как и в предыдущем пункте, можно получить этот ответ без нахождения  $r(t)$  – достаточно образного представления движения. Тогда ясно, что расстояние максимально, когда вращающиеся навстречу друг другу вектора «составляющих» векторов суперпозиции встречаются, и  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$ .

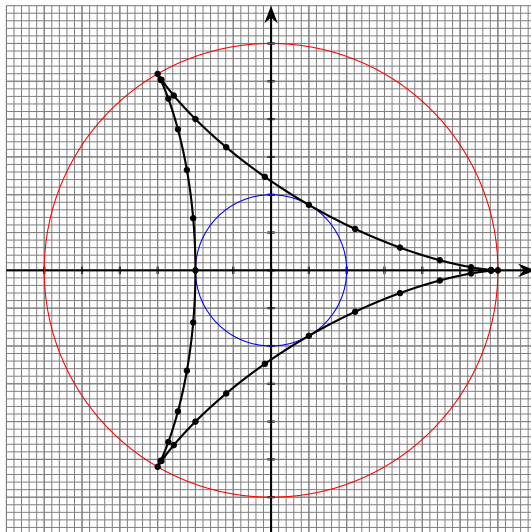
4. При таком соотношении параметров  $\Omega^2 = \omega_0^2/8$ , и поэтому  $\omega_1 = \omega \cdot \sqrt{2}$ , а  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{2}$ . Значит, отношение угловых скоростей  $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$ , то есть общее движение периодическое, и траектория оказывается замкнутой. В этом случае

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{3} \vec{r}_1(t) + \frac{2}{3} \vec{r}_2(t),$$

длины векторов, сумма которых дает  $\vec{r}(t)$ , равны  $r_0/3$  и  $2r_0/3$ , а закон изменения расстояния

$$r(t) = \frac{r_0}{3} \sqrt{5 + 4 \cdot \cos [3\omega_2 t]}.$$

Ясно, что период движения – наименьшее общее кратное периодов двух составляющих движений, которое в нашем случае равно периоду меньшей частоты  $\omega_2$ .



Поэтому впервые после отпускания бусинка окажется в исходной точке спустя время

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Период изменения расстояния от отверстия

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\omega_0} = \frac{1}{3}T_2.$$

Поэтому за один период движения бусинка трижды достигает максимального расстояния  $r_0$ , и трижды – минимального  $r_0/3$ . Таким образом, траектория за «полный оборот» вокруг оси отверстия трижды проходит от окружности с радиусом  $r_0$  до окружности с радиусом  $r_0/3$  и обратно, причем вблизи общих точек с большей окружностью бусинка движется по радиусу (траектория касается радиуса), в общих точках с меньшей окружностью радиальная скорость бусинки

обращается в ноль при ненулевой угловой скорости – бусинка движется перпендикулярно радиусу, и ее траектория касается меньшей окружности в общих точках. По этим сведениям можно достаточно корректно изобразить вид траектории (см. рисунок). Другой способ изучить траекторию – записать закон движения бусинки в декартовых координатах  $(x, y)$ . Удобно совместить начало координат с осью отверстия, а ось  $x$  направить так, чтобы она проходила через начальное положение бусинки. Проецируя закон движения на эти оси, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{r_0}{3} [2 \cos(\omega_2 t) + \cos(2\omega_2 t)] \\ y(t) = \frac{r_0}{3} [2 \sin(\omega_2 t) - \sin(2\omega_2 t)] \end{cases}$$

Тогда можно построить траекторию «по точкам», выбрав несколько характерных значений  $\omega_2 t$ . Впрочем, и в этом случае удобно в первую очередь построить положение точек, отвечающих моментам, когда бусинка находится на максимальном и минимальном расстояниях от отверстия, то есть  $\omega_2 t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ .

### Задача №11-Т2. Лепёшка из ртути

1. Неравенство из условия задачи позволяет считать верхнюю поверхность ртути практически плоской, а горизонтальный радиус ртутной "лепёшки" много большим, чем её толщина. Это даёт возможность определить толщину слоя ртути  $h$ , рассматривая задачу как двумерную. Будем считать, что ртуть заполнила всю площадь основания цилиндра, но при этом не перешла на его боковую поверхность.

Рассмотрим участок слоя жидкости шириной  $L$  и условие её равновесия в проекции на горизонтальную ось  $x$  (силы, действующие на этот участок в горизонтальном направлении, изображены на рис.):

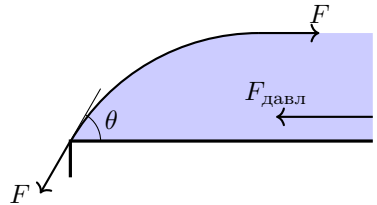
$$F_x = F \cos \theta - F + p_{\text{ср}} L h = \sigma L \cos \theta - \sigma L + p_{\text{ср}} L h = 0,$$

где  $p_{\text{ср}}$  – среднее по высоте гидростатическое давление ртути, равное  $p_{\text{ср}} = \rho g h / 2$ . Тогда имеем:

$$\frac{\rho g h^2}{2} = \sigma(1 - \cos \theta) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

Когда ртуть заполняет всю поверхность основания цилиндра, её объём равен

$$V_0 = S h = S \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

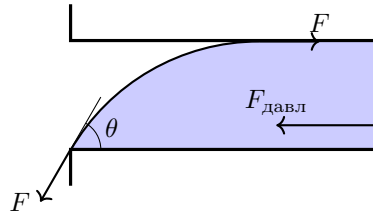


2. Если поставить на ртуть цилиндр массой  $m$ , то в каждой точке жидкости гидростатическое давление возрастёт на величину  $mg/S_{\text{к}}$ , где  $S_{\text{к}}$  — площадь контакта ртути и поставленного на неё цилиндра. Среднее гидростатическое давление в слое ртути в этом случае составит

$$p_{\text{ср}} = \frac{\rho gh}{2} + \frac{mg}{S_{\text{к}}}.$$

Условие равновесия сил, действующих на участок ртути единичной ширины в проекции на ось  $x$  (см. рис.), примет вид:

$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho gh^2}{2} + \frac{mgh}{S_{\text{к}}}.$$



Отметим, что  $h = V/S_{\text{к}}$ , поскольку поверхность ртути можно считать плоской (после постановки на неё цилиндра это приближение становится ещё более справедливым). Подставляя выражение для  $h$ , получим:

$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho g V^2}{2S_{\text{к}}^2} + \frac{mgV}{S_{\text{к}}^2}.$$

Ртуть полностью заполнит зазор между цилиндрами при  $S_{\text{к}} = S$ , следовательно

$$m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

*Примечание: обращаем внимание, что в выражении для давления ртути нельзя считать  $\rho gh \ll mg/S$ , так как эти величины могут быть одного порядка!*

3. В процессе перехода границы ртути с основания нижнего цилиндра на его боковую поверхность направление касательной к поверхности ртути поворачивается на  $90^\circ$ . Ртуть станет вытекать из зазора между цилиндрами, когда сила гидростатического давления превысит максимально возможную величину горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения. Теоретически, этот максимум соответствует положению касательной, при котором она является горизонтальной, однако это положение может быть нереализуемо при заданном значении угла смачивания  $\theta$ .

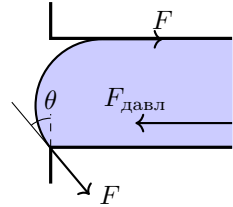


Рассмотрим два случая.

**Первый случай:**  $\theta < \pi/2$ .

В данном случае касательная к поверхности жидкости никогда не станет горизонтальной, поэтому величина горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения будет максимальной, если касательная будет направлена под углом  $\theta$  к боковой поверхности цилиндра (см. рис.). Тогда

$$F_{max} = \sigma L(1 + \sin \theta).$$



Записывая условие равновесия, получим, что

$$\sigma(1 + \sin \theta) = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

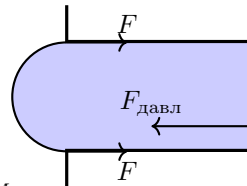
откуда

$$m_2 = \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

**Второй случай:**  $\theta \geq \pi/2$ .

В данном случае касательная к поверхности жидкости может стать горизонтальной (см. рис.). Тогда максимальная горизонтальная компонента силы поверхностного натяжения будет равна

$$F_{max} = 2\sigma L.$$



Записывая условие равновесия в этом случае, получим

$$2\sigma = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

откуда

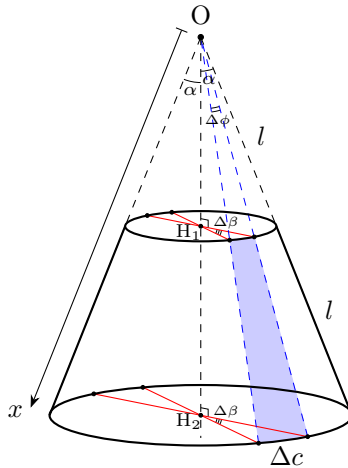
$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

$$m_2 = \begin{cases} \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta < \pi/2, \\ \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta \geq \pi/2. \end{cases}$$

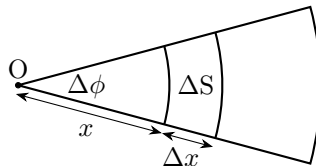
### Задача №11-ТЗ. Усечённый конус

#### 1. Первый способ:

Из осевой симметрии системы следует, что в любой точке на оси конуса вектор напряженности параллелен оси. Мысленно разрежем конус на  $2N$  одинаковых практически плоских трапеций. При увеличении  $N$  площадь кусочка искривленной трапеции стремится к площади плоской трапеции, так что при достаточно большом  $N$  кусочки можно считать плоскими.



Наибольшее основание  $\Delta c$  трапеции выражается через центральный угол  $\Delta\beta$  окружности сечения с наибольшим радиусом или через угол  $\Delta\phi$  при вершине треугольника, получающегося при дополнении трапеции, как  $\Delta c = l\Delta\beta = 2l\Delta\phi$ . При достаточно малом  $\Delta\beta$  справедливо соотношение  $\Delta c \ll l$ , так что в первом приближении каждую из трапеций можно представить в виде тонкого стержня с некоторой эффективной линейной плотностью заряда  $\lambda(x)$ .



Найдем  $\lambda(x)$ . Выразим заряд на малой площади треугольника, получающегося при дополнении трапеции.

$$\Delta q = \sigma(x) \Delta S = \sigma(x) x \Delta x \Delta \phi = A \Delta x \Delta \phi$$

Тогда имеем

$$\lambda(x) = \frac{\Delta q}{\Delta x} = A \Delta \phi = A \frac{\Delta \beta}{2} \equiv \text{const.}$$

Рассмотрим тонкий диэлектрический равномерно заряженный стержень длины  $l$  с линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Найдём напряжённость на прямой, содержащей стержень, в точке  $O$  на расстоянии  $l$  от стержня. Сделаем это методом разности потенциалов. При смещении из точки  $O$  на расстояние  $\Delta x \ll l$  имеем

$$\Delta E_O = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = k\lambda \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} \right) = \frac{A}{8\varepsilon_0 l} \frac{\Delta \beta}{2\pi}$$

Тогда с учётом проекции на ось после суммирования  $\Delta \beta$  от 0 до  $2\pi$  получаем вклад в результирующую напряжённость от боковой поверхности конуса:

$$E_O^{\text{side}} = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

Нормальная компонента поля к плоской равномерно заряженной площадке в любой точке пространства выражается через телесный угол, под которым видна площадка из этой точки. Покажем, что если по плоскому слою равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то в точке  $A$  компонента электрического поля, перпендикулярная слою, равна:

$$E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi \varepsilon_0}$$

где  $\Omega_A$  – телесный угол, под которым виден плоский слой из точки  $A$ . *Доказательство:* Рассмотрим элемент плоского слоя с площадью  $dS$ . Пусть  $\vec{e}_n$  – единичный вектор нормали к поверхности слоя, направленный к точке  $A$ , а  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведённый от элемента слоя к точке  $A$ . Тогда для нормальной компоненты электрического поля элемента слоя получим:

$$d\vec{E}_n = \vec{e}_n \cdot \frac{\sigma \vec{r} dS}{4\pi \varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

Если направления векторов  $\vec{r}$  и  $d\vec{S}$  изменить на противоположные, величина  $(\vec{r} \cdot d\vec{S})/r^3$  по определению будет представлять собой элемент телесного угла  $d\Omega_A$ , под которым элемент плоского слоя виден из точки  $A$ . Таким образом:

$$dE_n = \frac{\sigma d\Omega_A}{4\pi \varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi \varepsilon_0}$$

что и требовалось доказать.

Так как оба основания видны из точки  $O$  под одинаковым телесным углом, а  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , из теоремы о выражении нормальной к площадке напряженности через телесный угол следует, что суммарный вклад в результирующую напряженность от оснований

$$E_O^{bases} = 0$$

Значит,

$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

### Второй способ:

Разобьём боковую поверхность на колечки и начнём интегрировать.

$$E_o = \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha)}{x^2} \frac{A}{x} \cos(\alpha) dx = \frac{\sqrt{3}A}{8\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

Пусть  $y$  — расстояние от центра диска, заряженного с  $\sigma_0$ , по его оси. Радиус диска  $R$ . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right)$$

В нашем случае

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} l, \quad R_1 = \frac{l}{2}$$

$$y_2 = \sqrt{3} l, \quad R_2 = l$$

Тогда, так как  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , суммарная напряжённость от оснований:

$$E_O^{bases} = 0$$

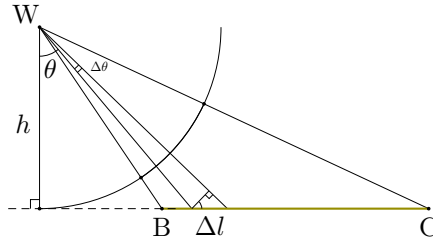
$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$$

### 2. Первый способ:

Рассмотрим пару противоположных стержней. Они образуют равнобокую трапецию с основаниями  $l$ ,  $2l$  и боковой стороной  $l$ .

Заметим, что для равномерно заряженного стержня BC в любой точке W, не принадлежащей стержню, напряжённость направлена вдоль биссектрисы угла  $\angle BWC$ .

*Доказательство:* Рассмотрим малый элемент длины  $\Delta l$  стержня. Напряжённость от него в точке W эквивалентна напряжённости от точечного заряда  $\Delta q = \lambda \Delta l$ .



По закону Кулона,

$$\Delta E_W = k \frac{\lambda \Delta l \cos^2 \theta}{h^2}$$

Заметим, что

$$\frac{h}{\cos \theta} \Delta \theta = \cos(\theta) \Delta l$$

Тогда выражение для  $\Delta E_W$  примет вид

$$\Delta E_W = \frac{k\lambda}{h^2} h \Delta \theta$$

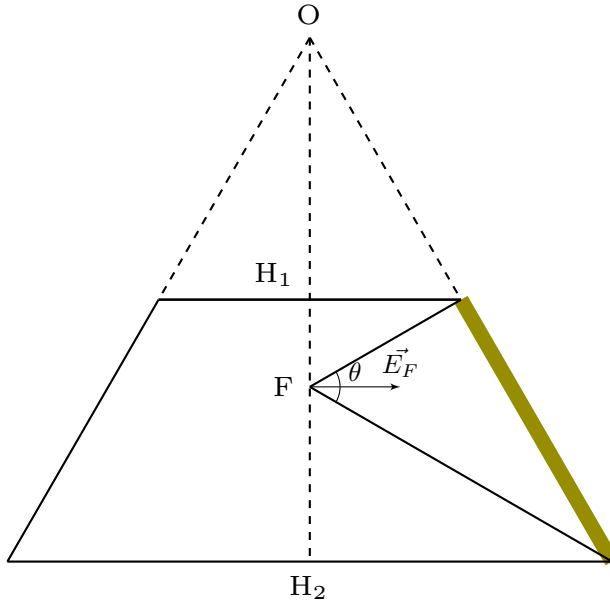
что в точности соответствует напряжённости от малого элемента длины  $h \Delta \theta$  дуги окружности радиусом  $h$  с плотностью заряда  $\lambda$ . Поскольку для дуги окружности в силу симметрии результирующая напряжённость в точке W направлена по биссектрисе центрального угла, то же самое верно и для стержня. Что и требовалось доказать.

Таким образом, напряжённость  $\vec{E}_F$  в точке пересечения диагоналей трапеции F от боковой стороны направлена вдоль биссектрисы угла  $\theta$ .

Заметим, что точка  $F'$ , в которой суммарная напряжённость от боковой поверхности усечённого конуса равна 0, совпадает с точкой F.

В самом деле.

Рассмотрим соотношения углов:  $\gamma_1 = \gamma_2$  - как вертикальные,  $\gamma_2 = \gamma_3$  - так как треугольник в основании равнобедренный,  $\varphi_1 + \gamma_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 + \gamma_3 = \pi/2$  - так как напряженность от боковой стороны должна быть перпендикулярна высоте конуса.



Получаем  $\varphi_1 = \varphi_2$ , значит биссектриса угла  $\theta$  перпендикулярна высоте конуса. В точке пересечения диагоналей напряженность от боковой стороны перпендикулярна высоте конуса, точки F и F' совпадают.

Согласно теореме о выражении нормальной к площадке напряженности через телесный угол, так как  $\sigma_1 = \sigma_2$ , в точке F пересечения диагоналей трапеции суммарная напряжённость от оснований конуса равна нулю при любом значении  $\sigma_0$ .

Из подобия треугольников получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

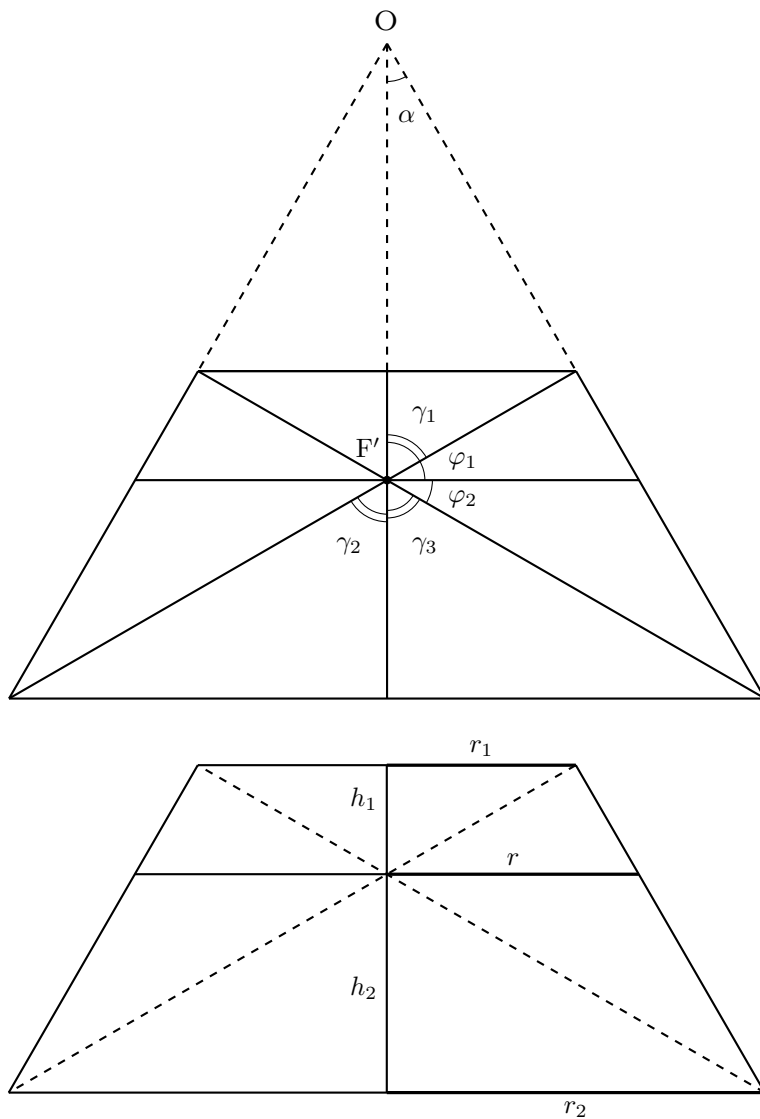
$$\frac{r - r_1}{h_1} = \frac{r_2 - r}{h_2}$$

Откуда:

$$r = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} \quad (*)$$

При  $r_1 = \frac{l}{2}$ ,  $r_2 = l$  получаем:

$$r = \frac{2}{3}l$$



В конусе

$$OF = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha)}$$

Откуда имеем

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

**Второй способ:**

Введём координатную ось  $z$  с началом в точке  $O$  и направлением вдоль оси симметрии. Разобьём боковую поверхность усечённого конуса на колечки и для нахождения напряжённости проинтегрируем вклад от одного колечка в пределах изменения координаты  $x$  — от  $l$  до  $2l$ .

$$\begin{aligned} E^{sides}(z) &= \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha) A (x \cos(\alpha) - z)}{\left( (x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx = \\ &= \frac{A}{4\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{x \cos(\alpha) - z}{\left( (x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dx \end{aligned}$$

Введём новую переменную:

$$u = x - \frac{\sqrt{3}}{2} z$$

Тогда выражение примет вид

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \frac{u}{\left( u^2 + \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} du - \frac{z}{4} \int_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \frac{1}{\left( u^2 + \frac{z^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} du \right]$$

Для взятия данных интегралов можно использовать подстановки Эйлера или Чебышёва или тригонометрическую подстановку, однако первообразная легко угадывается:

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\epsilon_0} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} - \frac{z}{4} \frac{8u}{z^2 \sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l - \frac{\sqrt{3}}{2} z}^{2l - \frac{\sqrt{3}}{2} z} \right].$$

После подстановки пределов и приведения к общему знаменателю имеем

$$E^{sides}(z) = \frac{l}{z} \left( \frac{2 \sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} - \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} \right)$$

Из условия

$$E^{sides}(z_0) = 0$$



получаем единственный корень

$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l.$$

Теперь получим выражение для  $E^{bases}(z)$

Пусть  $y$  — расстояния от центра по оси диска, заряженного с  $\sigma_0$ . Радиус диска  $R$ . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right)$$

Здесь напряженность положительна вдоль направления положительного отсчёта  $y$ .

В нашем случае

$$R_1 = \frac{l}{2}, \quad y_1 = z - \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$R_2 = l, \quad y_2 = \sqrt{3}l - z$$

Вклад в осевую напряжённость от оснований:

$$E^{bases}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{3}l - z}{\sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} - \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}l}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2}} \right)$$

Тогда из условия

$$E^{bases}(z'_0) = 0$$

имеем единственный корень

$$z'_0 = z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l$$

Поскольку  $E^{sides}(z_0) = E^{bases}(z_0) = 0$ ,  $z_0$  — искомое положение равновесия.

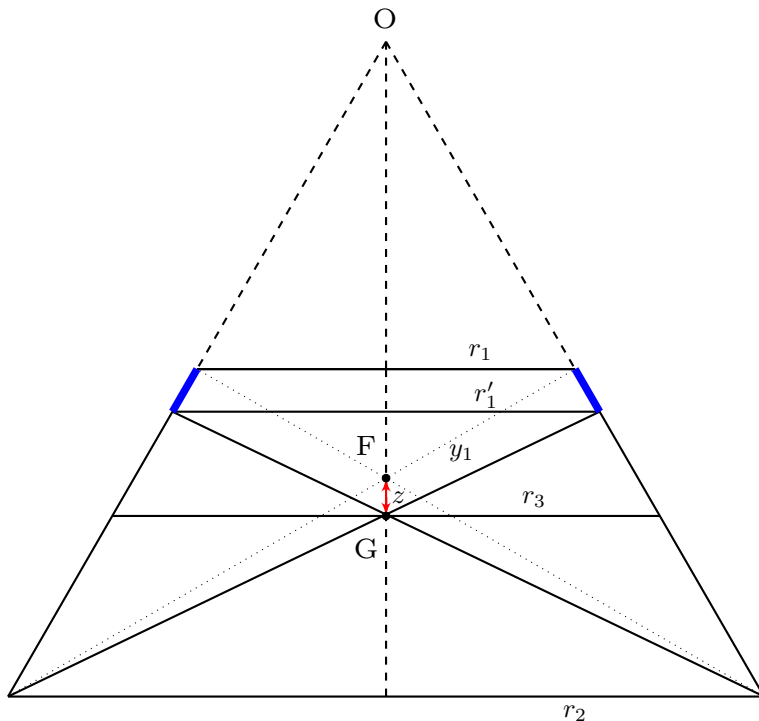
$$\text{OF} = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

### 3. Первый способ:

Пусть пробный заряд смещён относительно положения равновесия F на расстояние  $z$  в точку G,  $z \ll l$ .

Рассчитаем вклад в напряжённость  $E_G$  в точке G от боковой поверхности конуса.

Отрежем от трапеции верхушку так, чтобы точка G была точкой равновесия для получившейся новой трапеции. Тогда на пробный заряд будет действовать



сила со стороны отрезанного кольца (на рисунке обозначенном синим цветом), эта сила будет возвращающей. Значит, положение равновесия устойчивое.

$$OG - OF = z$$

$$r_3 = OG \operatorname{tg}(\alpha) \quad r = OF \operatorname{tg}(\alpha)$$

Используя (\*), можно записать

$$r_3 = \frac{2r'_1 r_2}{r'_1 + r_2}$$

Откуда

$$r'_1 = \frac{r_2 r_3}{2r_2 - r_3}$$

$$\Delta r_1 = r'_1 - r_1$$

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta r_1}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4} z$$

$$\Delta E_G^{side} = \frac{k\lambda(x)\Delta x_1}{y_1^2} \cos 60^\circ = \frac{kA\Delta x_1}{4y_1^2} \Delta\beta$$

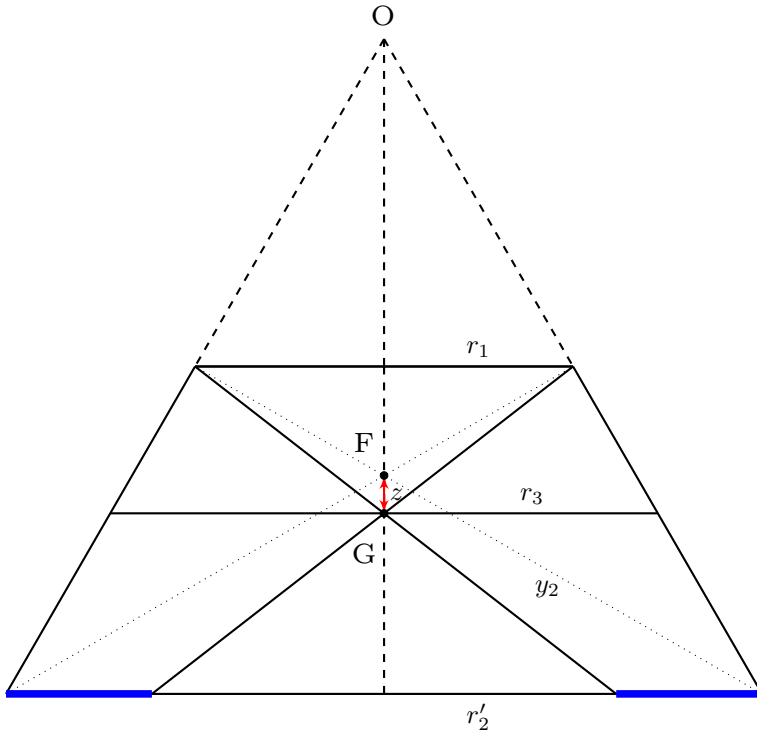
Где

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

Просуммируем  $\Delta\beta$  от 0 до  $2\pi$

$$E_G^{side} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z$$

Рассчитаем вклад в напряжённость  $E_G$  в точке G от оснований конуса. Воспользуемся упомянутой в первом пункте теоремой. Тогда нескомпенсированный заряд расположен в форме кольца (на рисунке обозначенном синим цветом) в нижнем основании усечённого конуса.



Из подобия треугольников,

$$\frac{r_2'}{OH_2 - (OF + z)} = \frac{r_1}{OF + z - OH_1}$$

При этом:

$$OH_1 = l \cos \alpha, \quad OH_2 = 2l \cos \alpha$$

$$\Delta r_2 = r_2 - r'_2$$

$$\Delta E_G^{bases} = k \frac{2\pi r_2 \Delta r_2 \sigma}{y_2^2} \cos 60^\circ$$

Где

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

Тогда для вклада в напряжённость в G от оснований имеем

$$E_G^{bases} = -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z.$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0.$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}$$

**Второй способ:**

Пусть

$$z = z_0 + z, \quad z \ll l$$

Принимая во внимание

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \quad x \ll 1$$

Получим

$$E^{sides}(z_0 + z) \approx \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z$$

Продельвая то же самое для оснований получим

$$E^{bases}(z_0 + z) \approx -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left( \frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}$$

#### Задача №11-Т4. Рамка и провод

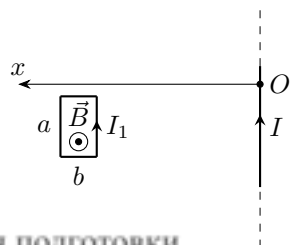
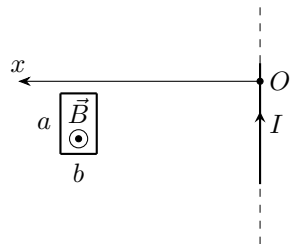
Пусть сторона рамки, параллельная проводу, равна  $a$ , а перпендикулярная ей сторона равна  $b$ . Введём ось  $Ox$  с началом на проводе перпендикулярно ему в направлении к рамке (см. рис. 1). Далее величина  $x$  везде обозначает расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки, которое изначально равнялось  $x_0$ . Пусть сила тока в проводе равна  $I$ . Тогда индукция создаваемого магнитного поля провода на расстоянии  $r$  от него направлена перпендикулярно горизонтальной поверхности на читателя и равна:

$$B(I, r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Пусть  $I_1$  – величина силы тока в рамке в направлении против часовой стрелки при виде сверху. Равнодействующая сил Ампера, действующих на контур, составляет:

$$F_x = I_1 a B(I, x + b) - I_1 a B(I, x).$$



Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины  $a$  и  $b$  во много раз меньше  $x_0$ , то выражение для  $F_x$  можно приблизить следующим образом:

$$F_x \approx \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) b = -\frac{\mu_0 I_1 I a b}{2\pi x^2}.$$

Пусть  $R$  – сопротивление рамки, а  $\Phi$  – поток индукции магнитного поля, пронизывающего рамку. Поскольку индуктивностью рамки можно пренебречь, для силы тока  $I_1$  из закона электромагнитной индукции Фарадея находим:

$$I_1 = -\frac{\dot{\Phi}}{R}.$$

Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины  $a$  и  $b$  во много раз меньше  $x_0$ , то индукцию магнитного поля провода можно считать постоянной по всей поверхности, натянутой на контур рамки, и равной  $B(x)$ , поэтому  $\Phi \approx B(x)ab$ . Тогда имеем:

$$I_1 = -\frac{abdB(x)}{R} \frac{d}{dt} = -\frac{\mu_0 ab}{2\pi R} \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{x} \right),$$

откуда:

$$F_x = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{x} \right)$$

Рассмотрим увеличение силы тока в проводе. Поскольку это увеличение происходит очень быстро, движением рамки и её смещением за время увеличения силы в проводе до максимального значения можно пренебречь. Тогда для силы  $F_x$  имеем:

$$F_x \approx \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Пусть  $m$  и  $v_x$  – масса рамки и проекция её скорости на ось  $x$  соответственно. Из закона изменения импульса для рамки имеем:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на  $dt$ :

$$mdv_x = \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{IdI}{Rx^3}.$$

Проинтегрируем полученное выражение, обозначив за  $I_0$  максимальную величину силы тока в проводе:

$$\int_0^{v_0} m dv_x = mv_0 = \int_0^{I_0} \left( \frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{IdI}{Rx_0^3} = \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2Rx_0^3}.$$

Отметим, что рамка начинает удаляться от провода после достижения в нём максимального значения силы тока.

Проанализируем дальнейшее движение рамки. Для этого получим выражение для силы  $F_x$  при постоянном значении силы тока в проводе  $I = I_0$ :

$$F_x = \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}.$$

Запишем закон изменения импульса для рамки:

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на  $dt$ :

$$m dv_x = - \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{dx}{Rx^4}.$$

Проинтегрируем полученное выражение в предположении, что рамка удаляется бесконечно далеко от провода, обозначив за  $v_{1x}$  проекцию скорости рамки на ось  $x$  на бесконечном удалении от провода. Поскольку скорость рамки уменьшается, предположение окажется оправданным в том случае, если величина  $v_{1x}$  окажется положительной. Имеем:

$$m(v_{1x} - v_0) = - \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = - \frac{1}{3Rx_0^3} \left( \frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 = - \frac{2mv_0}{3}.$$

Отсюда:

$$v_{1x} = \frac{v_0}{3}$$

Поскольку  $v_{1x} > 0$ , рамка в процессе движения после достижения силой тока в проводе максимального значения никогда не останавливалась, а значит, полученное значение является ответом на вопрос задачи. Если бы величина  $v_{1x}$  оказалась

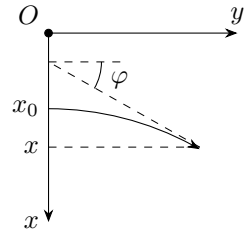
отрицательной, то скорость рамки и расстояние между рамкой и проводом асимптотически стремились бы к нулю и к постоянному значению соответственно. Таким образом:

$$v_1 = \frac{v_0}{3}$$

### Задача №11-Т5. Неоднородность в призме

1. Поскольку пучок света направлен по нормали к грани призмы, на которую он падает, на входе в призму пучок не преломляется. Исследуем траектории лучей внутри призмы. Пусть  $\varphi$  – угол между направлением распространения луча и осью  $y$ , а  $x_0$  – координата точки входа луча в призму. При этом угол падения на границу раздела сред равен  $90 - \varphi$ , поэтому из закона Снелла следует:

$$n \cos \varphi = \frac{3 \cos \varphi}{2 - \frac{x}{h}} = \frac{3}{2 - \frac{x_0}{h}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2h - x}{2h - x_0}$$

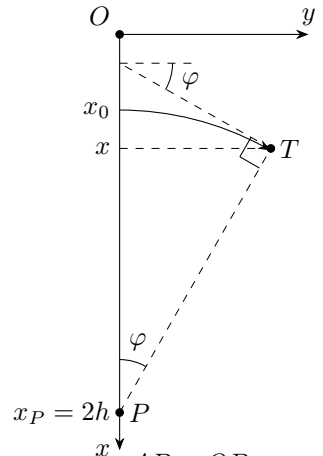


#### Первое решение:

Обратим внимание на соотношение:

$$\frac{2h - x}{\cos \varphi} = 2h - x_0 = \text{const.}$$

Проведём через некоторую точку  $T$  траектории луча линию, перпендикулярную направлению его распространения до точки  $P$  такой, что  $x_P = 2h$ . Обратим внимание, что расстояние между точками  $P$  и  $T$  является постоянной величиной, равной  $2h - x_0$ . Поскольку свет распространяется в направлении, перпендикулярном  $PT$ , а  $PT = 2h - x_0 = \text{const}$  и  $x_P = 2h = \text{const}$  – положение точки  $P$  является постоянным, поскольку её смещение должно быть одновременно перпендикулярно  $PT$  и оси  $x$ , что невозможно. Значит, траектория луча света до попадания на стороны  $AB$  и  $OB$  сечения призмы представляет собой окружность с центром в точке  $P$ . Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси  $y$ , а значит для каждого луча центр окружности лежит в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h$  и  $y_P = 0$ . Окончательно:





$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

**Второе решение:**

Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$dx = (2h - x_0) \sin \varphi d\varphi.$$

Изменения координат  $dx$  и  $dy$  можно связать с помощью угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Найдём изменение  $dy$  координаты  $y$  при изменении угла  $\varphi$  на величину  $d\varphi$ :

$$dy = dx \operatorname{ctg} \varphi = (2h - x_0) \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi d\varphi = (2h - x_0) \cos \varphi d\varphi.$$

Величине  $y = 0$  соответствует  $\varphi = 0$ . Тогда получим:

$$y(\varphi) = (2h - x_0) \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi = (2h - x_0) \sin \varphi.$$

Теперь получим выражение, связывающее  $y$  и  $x$ :

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left( \frac{y}{2h - x_0} \right)^2 + \left( \frac{x - 2h}{2h - x_0} \right)^2,$$

откуда:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

**Третье решение:**

Получим зависимость  $y(x)$  для траектории луча света. Для этого избавимся от угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Поскольку  $\varphi > 0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\left( \frac{2h - x_0}{2h - x} \right)^2 - 1} = \frac{dx}{dy}.$$

Учитывая, что  $2h > x$ , получим:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{(2h-x)dx}{\sqrt{(2h-x_0)^2 - (2h-x)^2}} = \int_{2h-x_0}^{2h-x} \frac{x'dx'}{\sqrt{(2h-x_0)^2 - x'^2}}.$$

Отсюда:

$$y(x) = \sqrt{(2h-x_0)^2 - (2h-x)^2} \Rightarrow y^2 + (x-2h)^2 = (2h-x_0)^2.$$

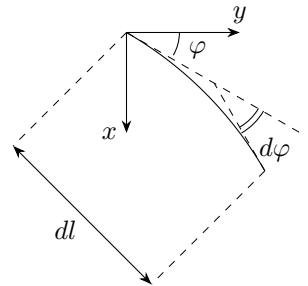
**Четвёртое решение:**

Для радиуса кривизны  $\rho$  траектории луча имеем:

$$\rho = \frac{dl}{d\varphi},$$

где  $dl$  – элемент пути, пройденного лучом. Но  $dl = dx / \sin \varphi$ , откуда:

$$\rho = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{dx}{d \cos \varphi}.$$



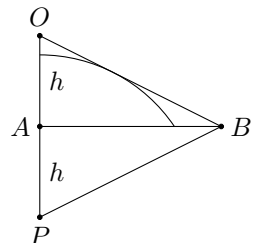
Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$-\frac{dx}{d \cos \varphi} = 2h - x_0 = \rho = const.$$

Таким образом, радиус кривизны траектории каждого луча остаётся постоянным, т.е траектория луча света до попадания на стороны  $AB$  и  $OB$  сечения призмы представляет собой дугу окружности радиусом  $2h - x_0$ . Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси  $y$ , а значит для каждого луча центр окружности лежит в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h - x_0 + x_0 = 2h$  и  $y_P = 0$ . Окончательно:

$$y^2 + (x-2h)^2 = (2h-x_0)^2.$$

2. Из решения первого пункта следует, что траектория любого луча внутри призмы до попадания на  $AB$  и  $OB$  сечения призмы являются дугами окружностей, лежащими в плоскости рисунка, а центры этих окружности расположены в точке  $P$  такой, что  $x_P = 2h$ , а  $y_P = 0$ . Обратим внимание, что радиус окружности уменьшается с увеличением координаты



$x_0$ . Расстояние от точки  $P$  до точки пересечения дуг окружности с  $OB$  уменьшается вплоть до момента, пока дуга окружности не коснётся рассматриваемой грани. При дальнейшем увеличении координаты  $x_0$  дуги окружности не будут пересекать  $OB$ . Таким образом, лучи достигнут всех точек  $OB$  при условии отсутствия точек касания с дугами окружностей, а значит угол  $\angle PBO$  не должен быть острым. Поскольку треугольник  $OPB$  является равнобедренным, имеем:

$$\angle PBO = 180^\circ - 2\alpha \geq 90^\circ,$$

откуда:

$$\alpha \leq 45^\circ.$$

3. Обратим внимание, что при увеличении координаты  $x_0$  угол падения лучей на  $OB$  будет увеличиваться, как и показатель преломления вещества призмы. Тогда условие, при котором все лучи, достигнувшие  $OB$ , попадают в воздух состоит в том, что лучи, достигнувшие её вблизи точки  $B$ , не испытают полного отражения. Поскольку исходно такие лучи падают под углом  $\alpha$  к  $OB$  и поворачивают на угол  $\alpha$  при движении по дуге окружности – угол падения луча в момент достижения  $OB$  равен  $2\alpha$ . Тогда имеем:

$$n(h) \sin 2\alpha = 3 \sin 2\alpha \leq 1,$$

откуда:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \approx 9.74^\circ.$$

