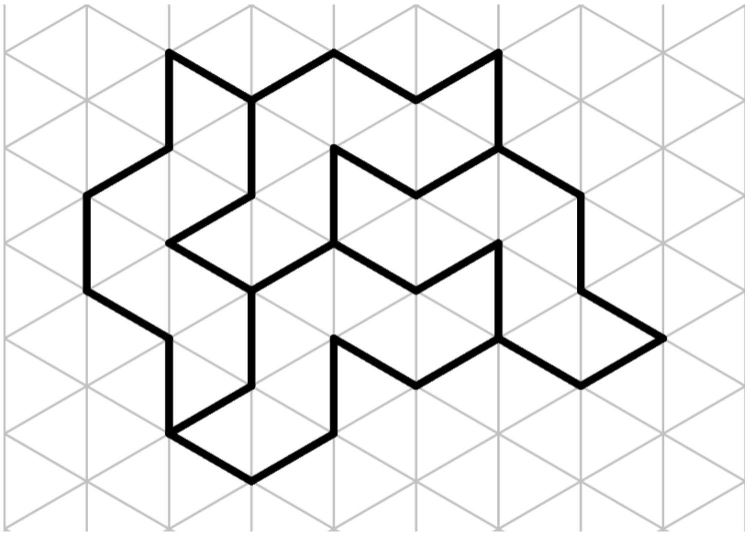
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2023-2024 г.г. по математике

Заключительный этап

7 класс

Решения

7.1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на 4 одинаковых части.



Решение. Пример разрезания изображён на рисунке.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

Нет примера, но замечено, что каждая фигура должна состоять из 9 треугольничков (например, из соображений площади) — 1 балл.

7.2. Найдите все такие трёхзначные числа, что после вычёркивания средней цифры из них получается двузначное число в семь раз меньше изначального.

Ответ. Только число 105.

Решение. Пусть имеется трёхзначное число $\overline{abc} = 100a+10b+c$. После вычёркивания средней цифры получается двузначное $\overline{ac} = 10a+c$. Составляя уравнение из условия, имеем

$$100a + 10b + c = 70a + 7c \iff 30a + 10b = 6c.$$

Левая часть делится на 5, поэтому $c = 0$ или $c = 5$. Нулю оно быть равно не может, потому что слева в равенстве стоит положительное число. Значит, $c = 5$, и получаем

$$6a + 2b = 6.$$

Подходит только $a = 1$, $b = 0$, так как иначе слева стоит число больше 6. Итого, ответ 105. Все преобразования были равносильны, но можно выполнить проверку. Действительно, $105 = 7 \cdot 15$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Ответ с проверкой, что он подходит — 1 балл.

Верно составлено уравнение — 2 балла.

При решении уравнения не рассмотрен случай $c = 0$ — не более 5 баллов.

В переборном решении (без уравнения) замечено, что $7c$ заканчивается на c, откуда делается вывод $c = 5$, упуская случай $c = 0$ — не более 3 баллов.

7.3. У Антона дома обитают кот веса 1 кг, кот веса 2 кг, ..., кот веса 100 кг — всего 100 животных. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может рассадить всех этих котов по 10 комнатам таким образом, что будут выполняться следующие условия:

- Во всех комнатах есть хотя бы один кот;
- Во всех комнатах находится разное число котов;
- Если в комнате A котов больше чем в комнате B, то суммарный вес котов в комнате A меньше суммарного веса котов в комнате B.

Могут ли слова барона оказаться правдой?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Докажем, что барон врёт. Предположим, такое распределение котов возможно. Тогда пусть в комнатах находятся $a_1 > a_2 > \ldots > a_{10}$ котов общим весом $b_1 < b_2 < \ldots < b_{10}$ соответственно.

Заметим, что если $a_{10} \geqslant 6$, то всего котов хотя бы $6 + 7 + 8 \ldots + 15 = 105 > 100$, то есть больше нужного. Значит, в последней комнате находится не более 5 котов.

С другой стороны, в последней комнате, так как она самая «тяжёлая», суммарный вес котов должен составлять хотя бы $1/10$ от общего веса всех 100 котов, то есть $\frac{1}{10}(1 + 2 + \ldots + 100) = 505$. Но мы уже выяснили, что в последней комнате не более 5 котов, и их суммарный вес никак не может превышать 500. Противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Неверно понятно условия (например, считается, что A и B это фиксированные комнаты, или что нужно привести три примера расстановки на каждое из условий) — 0 баллов.

Доказано только, что в комнате с наименьшим числом котов их не более 5 — 3 балла.

Доказано только, что в комнате с наибольшим суммарным весом по крайней мере 6 котов (или что их суммарный вес больше 500) — 3 балла.

7.4. Дан равносторонний треугольник ABC. Прямая l пересекает в точках K, L и M соответственно отрезки AB, BC и продолжение стороны AC за точку A. Оказалось, что $AK = BL$, а точка K является серединой отрезка LM. Найдите угол BLM.

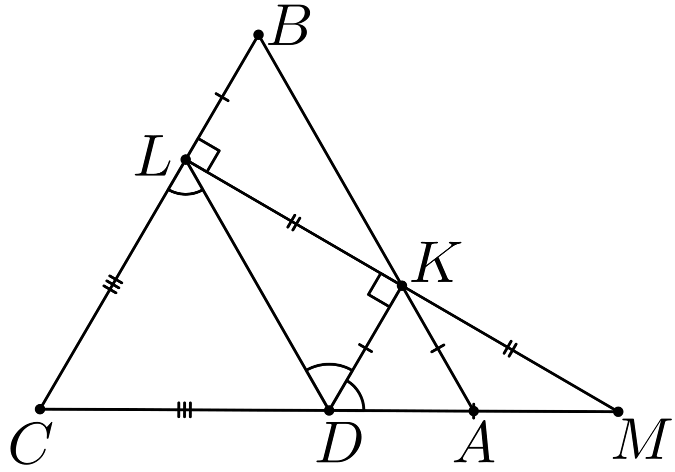
Ответ. 90°.

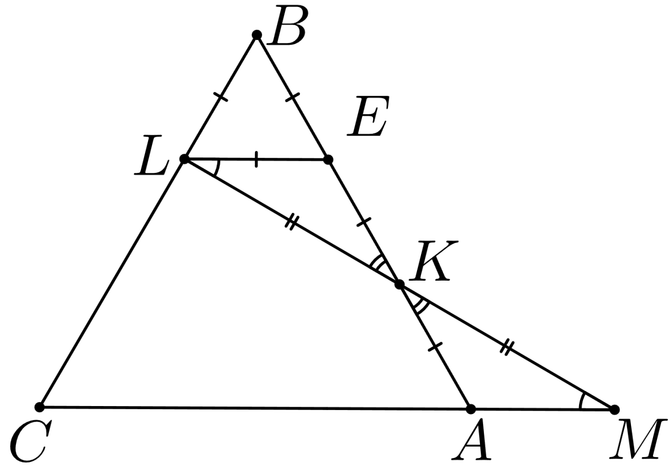
Решение 1. Отметим на стороне AC точку D таким образом, что $AD = AK$, тогда $CL = CD$. Каждый из треугольников ADK и CLD является равнобедренным с углом 60°, поэтому они оба —равносторонние. Тогда $\angle KDL = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Тогда в треугольнике LDM отрезок DK является биссектрисой и медианой. Поэтому треугольник LDM — равнобедренный, а DK — его высота. Кроме того, так как $BC \parallel DK$, то $KL \perp BC$, откуда следует, что $\angle BLM = 90^\circ$.

Решение 2. Через точку L проведём прямую, параллельную стороне AC, которая пересечёт сторону AB в точке E. Углы треугольника BLE равны по 60°, поэтому он равносторонний. Значит, $BE = EL = BL = AK$.

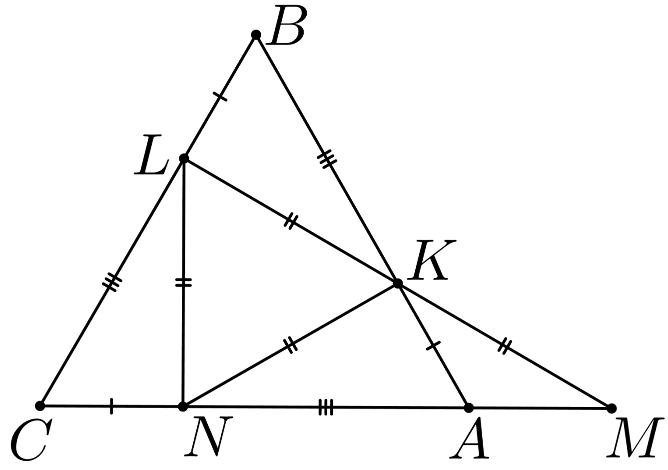
Кроме того, из параллельности LE и AM следует, что $\angle ELK = \angle AMK$, откуда треугольники LEK и MAK равны по стороне и двум углам. Следовательно, равны соответствующие стороны $AK = EK = BE = LE$. Но тогда в треугольнике BLK медиана LE равна половине стороны BK, то есть BLK прямоугольный, и $\angle BLM = 90°$.

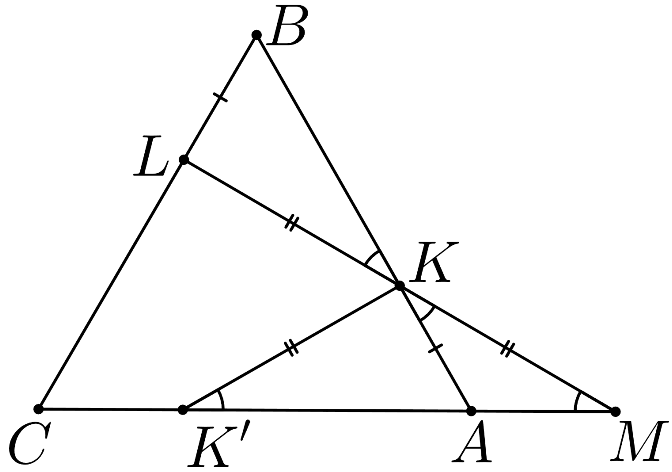




Решение 3. Отметим на стороне AC точку N так, что $CN = AK = BL$. Тогда $CL = AN = BK$. Следовательно, треугольники CLN, ANK и BLK равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $LN = NK = KL$, то есть треугольник KLN равносторонний.

Заметим теперь, что в треугольнике LNM медиана NK равна половине стороны LM, то есть $\angle LNM = 90°$. Следовательно, $\angle BLM = \angle LNC = 90°$.





Решение 4. Возьмём треугольник BLK и приставим его стороной BL к стороне AK треугольнику KAM. В силу того, что $\angle LBK + \angle KAM = 60° + 120° = 180°$, треугольник BLK перейдёт в треугольник AKK', где точка K' лежит на прямой AC. Тогда $KK' = LK = KM$, и треугольник $KK'M$ является равнобедренным.

Осталось заметить, что $\angle AKM = \angle LKB = \angle KK'A = \angle K'MK$, то есть равнобедренным является и треугольник AKM. Но в нём $\angle KAM = 120°$, откуда угол AKM равен $30°$. Итого,

$$\angle BLM = 180° - \angle LBK - \angle BKL = 180° - 60° - 30° = 90°.$$

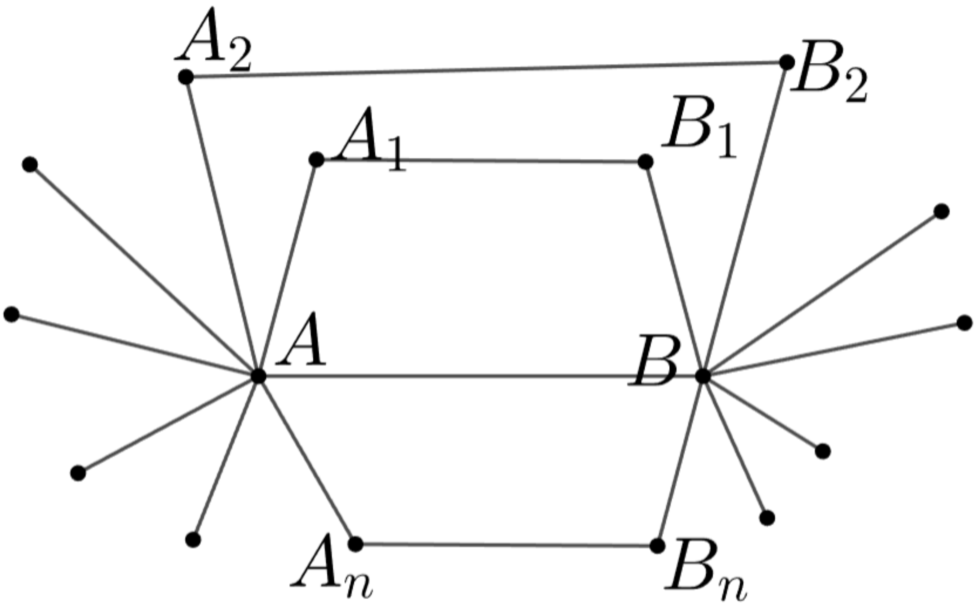
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Построена точка D, E, N или K' — 2 балла (не суммируется между собой).

7.5. В замке короля Артура любые два рыцаря либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что среди этих рыцарей любые два врага имеют ровно двух общих друзей, а любые два друга общих друзей не имеют вовсе. Докажите, что у всех рыцарей в замке одно и то же число врагов.

Решение. Сразу отметим, что «одно и то же число врагов» равносильно «одно и то же число друзей», и будем доказывать именно второе утверждение.

Для начала покажем, что у любых двух друзей одинаковое число друзей. Пусть A и B — друзья, и A_1, A_2, $\ldots$, A_n — все друзья A, отличные от B. Тогда в силу условия, любые два рыцаря из множества B, A_1, $\ldots$, A_n — враги (иначе найдётся тройка друзей A, B, A_i или A, A_i, A_j). Ниже на рисунке изображена схема, где отрезками обозначается дружба соответствующих рыцарей.



Итак, рассмотрим A_1 и B. Они враги, поэтому имеют ровно двух общих друзей. Один из них A, а второго обозначим за B_1 (он отличен от всех до этого названных рыцарей в силу замечания выше). Рыцари A_2 и B тоже имеют двух общих друзей, один из которых A. Вторым общим другом не может быть B_1 (иначе у A и B_1 есть общие друзья B, A_1, A_2), то есть это какой-то новый рыцарь B_2. Продолжая этот процесс, получим, что у B есть друзья B_1, B_2, $\ldots$, B_n, то есть их хотя бы n.

Теперь можно повторить все эти рассуждения, поменяв A и B местами, из чего получить, что у A друзей хотя бы столько же, сколько у B. Значит, у A и B друзей поровну.

Рассмотрим теперь рыцарей C и D, являющихся врагами. По условию у них есть общий знакомый E. Из доказанного выше следует, что друзей поровну как у C и E, так и у D и E. Но тогда и у C с D их тоже поровну.

Итого, какую бы пару рыцарей мы ни взяли, у них окажется поровну друзей, а значит, и врагов.

Критерии. Доказано, что у любых двух друзей поровну друзей/врагов — 5 баллов.

Замечание. Утверждение о том, что у каждого рыцаря обязательно ровно один враг, и что подходит только цикл друзей из 4 человек, не является верным. В качестве примера подходят, например, граф Клебша и граф Гевирца.