10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения в действительных числах системы уравнений: $\begin{cases} x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}. \end{cases}$

Ответ. $\pm(\sqrt{7}, -\sqrt{7}), \pm(3,3)$.

Решение. Умножим оба уравнения на xy, получим $x^2y - x = 8y, y^2x - y = 8x$. Вычтем второе уравнение из первого, получим $(xy + 7)(x - y) = 0$, откуда, либо $x = y$, либо $xy = -7$. В первом случае $x = y = \pm 3$. Во втором случае $(x, y) = \pm(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

Критерии проверки. (●) Только угаданы все ответы: 1 балл. (●) Решение с нахождением только второй пары решений: 4 балла. (●) Решение с нахождением только первой пары решений: 3 балла.

10.2. У Васи есть набор из девяти единичных кубиков, у каждого из которых на всех шести гранях записаны в некотором порядке буквы М, А, Т, Е, И, К, по одной на каждой грани. Порядок букв на разных кубиках может отличаться. Кубики можно прикладывать друг к другу гранями, если на них написаны одинаковые буквы. Сможет ли Вася хоть для какого-то набора кубиков сложить из них параллелепипед высоты и ширины 1 и длины 9 так, чтобы на каждой его грани длины 9 были записаны буквы М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К в некотором порядке?

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. В слове М А Т Е М А Т И К буквы М, А, Т встречаются ровно по два раза, а буквы Е, И, К – по одному. Всего на 9 кубиках Е, И, К встретятся по 9 раз каждая. Если нужный Васе параллелепипед будет-таки сложен, то на четырёх его гранях длины 9 каждая из этих букв встретится по 4 раза, и ещё чётное количество раз - на прикладываемых друг к другу гранях, то есть всего чётное количество раз. Следовательно, каждая из букв Е, И, К должна встретиться хотя бы раз на торцевых гранях параллелепипеда размера 1 на 1. Но торцевых грани всего две, а букв Е, И, К – три, противоречие. Следовательно, искомый в условии параллелепипед сложить нельзя ни для какого набора из 9 кубиков.

Критерии проверки. (●) Замечено, что на всех не торцевых гранях параллелепипеда и прикладываемых клетках используется чётное число букв Е, И, К: 3 балла. (●) Сделан вывод о том, что каждая из них должна встретиться хотя бы раз на торцевых гранях параллелепипеда размера 1 на 1: 2 балла. (●) Замечено, что торцевых грани всего две, а букв Е, И, К – три, и получено противоречие: 2 балла.

10.3. Пусть $A = \underbrace{44\ldots44}_{2n}$ – натуральное число, записанное $2n$ четвёрками и $B = \underbrace{88\ldots88}_{n}$ – натуральное число, записанное n восьмёрками. Доказать, что число $A - B$ является точным квадратом (натурального числа).

Доказательство. Рассмотрим случаи малых n. При $n = 1$ получим $A - B = 36 = 6^2$, при $n = 2$ получим $A - B = 4356 = 66^2$. Следовательно, можно предположить, что для произвольного n число $A - B$ является квадратом числа $\mathrm{C} = \underbrace{66\ldots66}_{n}$, записанное n шестёрками. Убедимся в этом:

$$A - B = \underbrace{44\ldots44}_{2n} - \underbrace{88\ldots88}_{n} = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \left(\underbrace{100\ldots1}_{n+1} - 2\right) = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{n} = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} = 6^2 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n}^2 = \underbrace{66\ldots66}_{n}^2,$$

что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Переход $A - B = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \left(\underbrace{100\ldots1}_{n+1} - 2\right)$: 2 балла. (●) Переход $4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \left(\underbrace{100\ldots1}_{n+1} - 2\right) = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{n}$: 1 балл. (●) Переход $4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot \underbrace{99\ldots99}_{n} = 4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n}$: 2 балла. (●) Переход $4 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} \cdot 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n} = 6^2 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n}^2$: 2 балла.

10.4. Из шести пар братьев нужно составить три команды по 4 человека так, чтобы ни в одной команде не было никаких двух братьев. Сколькими различными способами это можно сделать? Спортсмены из разных пар не являются братьями.

Ответ. 960.

Решение 1. Занумеруем пары числами от 1 до 6, и братьев в каждой паре цифрами 1 и 2. Для каждого распределения братьёв по командам назовём *первой* командой ту, в которой оказался первый брат из первой пары, *второй* – команду, в которой оказался второй брат из первой пары, и *третьей* – оставшуюся. Количество способов набора третьей команды равна числу способов выбора четырёх элементов в четырёх разных парах из пяти, что равно $С_5^4 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 5 = 80.$ После этого у нас останутся свободными одна полная пара братьев с уже определённым предыдущим шагом номером, и четыре одиночки. Из них нам осталось добрать по три человека в первую и вторую команды, где уже есть по одному брату из первой пары. Распределить братьев из первой пары по двум командам можно двумя способами. Осталось набрать двух человек в первую команду, для этого есть $С_4^2 = 6$ способов выбора двух из оставшихся четырёх одиночек. Окончательно, используя принцип умножения, получаем $80 \cdot 2 \cdot 6 = 960$.

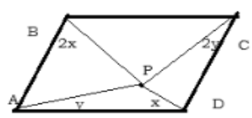
Решение 2. Будем набирать команды, заранее учитывая, что один и тот же комплект из трёх команд может быть составлен из трёх одинаковых по составу четвёрок спортсменов, которым шестью разными способами присвоены номера от 1 до 3. Первую четвёрку можно набрать $С_6^4 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 15 = 240$ способами. При выборе второй четвёрки мы выбираем двух братьев из четырёх оставшихся одиночников и ещё двух из двух полных пар, что даёт $C_4^2 \cdot 2^2 = 24$ способа. Осталось поделить произведение 240 и 24 на 6, получим ответ: 960.

Критерии проверки. (●) Если в решении получен ответ, отличающийся от верного в 6 раз, то есть не учтена возможность выбора трёх команд шестью способами: 4 балла.

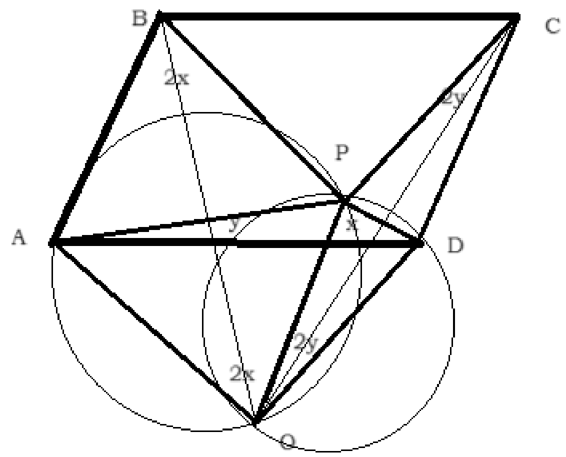
В первом доказательстве (●) Идея нумерации команд с помощью первой пары братьев: 2 балла. (●) Количество способов набора третьей команды равна числу способов выбора четырёх элементов в четырёх разных парах из пяти, что равно $С_5^4 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 5 = 80$: 2 балла. (●) Распределение братьев из первой пары по двум командам двумя способами: 1 балл. (●) Набор двух человек в первую команду из оставшихся четырёх одиночек $С_4^2 = 6$ способами: 1 балл. (●) Использование принципа умножения для получения ответа $80 \cdot 2 \cdot 6 = 960$: 1 балл.

Во втором доказательстве (●) Набор команд с учётом того, что один и тот же комплект из трёх команд может быть составлен из трёх одинаковых по составу четвёрок спортсменов шестью разными способами: 3 балла. (●) Выбор первой четвёрки $С_6^4 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 15 = 240$ способами: 1 балл. (●) Выбор второй четвёрки $C_4^2 \cdot 2^2 = 24$ способами: 3 балла.

10.5. В параллелограмме $ABCD$ выбрана точка P такая, что угол ABP вдвое больше угла ADP, а угол DCP вдвое больше угла DAP (см. рисунок). Доказать, что длины отрезков AB, BP и CP равны.



Доказательство. Обозначим величины углов ADP и DAP за x и y соответственно. Проведём из точки P отрезок PO, параллельный стороне AB и равный ей так, чтобы образовались два параллелограмма ABPO и OPCD. Рассмотрим описанную окружность треугольника ADP с центром M. Угол ADP величины x является в ней вписанным, а величина угла AOP равна $2x$ и совпадает с величиной центрального угла этой окружности, соответствующего дуге AP. Следовательно, точка O принадлежит описанной окружности треугольника APM. Аналогично, точка O принадлежит описанной окружности треугольника DPM, следовательно, O является пересечением этих окружностей и совпадает с M. Тогда длины отрезков AB, BP и CP совпадают с длиной радиусов MP, MA и MD описанной окружности треугольника ADP и равны между собой, что и требовалось доказать.



Критерии проверки. (●) Построение точки O: 2 балла. (●) Рассмотрение описанной окружности треугольника ADP: 1 балл. (●) Доказано, что точка O принадлежит описанной окружности треугольника APM: 1 балл. (●) Доказано, что O является пересечением описанных окружностей APM и DPM и совпадает с M: 2 балла. (●) Замечено, что длины отрезков AB, BP и CP совпадают с длиной радиусов MP, MA и MD описанной окружности треугольника ADP и равны между собой: 1 балл.