Серия
"Готовимся к Олимпиаде"

КУБОК ГАГАРИНА
олимпиада школьников

Будь первым!

МАТЕМАТИКА

5-8 классы

Сборник олимпиадных заданий прошлых лет с ответами

Уфа - 2017

Олимпиада школьников на Кубок имени Ю.А. Гагарина проводится в Республике Башкортостан с 2011-2012 учебного года при поддержке Государственной корпорации «Роскосмос», ФГБУ «Центр подготовки космонавтов имени Ю.А. Гагарина», Федерации космонавтики России, ведущих вузов РБ и РФ, предприятий оборонно-промышленного комплекса и машиностроения, государственных органов законодательной и исполнительной власти Республики Башкортостан.

На сегодняшний день Гагаринская олимпиада стала самой популярной среди всех олимпиад и конкурсов, проводимых в республике. Количество её участников увеличилось от 7 500 обучающихся в 2011-2012 учебном году до 120 000 обучающихся в 2016-2017 учебном году. В проекте приняли участие школьники из 788 образовательных организаций 40 муниципальных районов и городских округов Республики Башкортостан.

Олимпиада проводится для обучающихся 1-8 классов образовательных организаций по следующим дисциплинам: математика, физика, информатика, русский язык, литература, окружающий мир, биология, история, обществознание, география, иностранные языки, физическая культура и музыка.

В данном сборнике представлены **олимпиадные задания по математике для 5-8 классов**, предлагавшиеся участникам на школьном (ШЭ), муниципальном (МЭ) и республиканском (РЭ) этапах Олимпиады в 2015-2016 и 2016-2017 учебных годах, а также ответы к ним.

Перед каждым комплектом заданий представлена статистика их выполнения со средними баллами, полученными участниками, а также максимально возможное количество баллов за задание (номера заданий показаны в ячейках верхней строки таблицы, баллы – в нижней строке таблицы).

ОГЛАВЛЕНИЕ

5 класс **4**
ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА 4
- 2015-2016 учебный год 4
- 2016-2017 учебный год 5

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА 6
- 2015-2016 учебный год 6
- 2016-2017 учебный год 8

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА 11
- 2015-2016 учебный год 11
- 2016-2017 учебный год 12

6 класс **14**
ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА 14
- 2015-2016 учебный год 14
- 2016-2017 учебный год 16

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА 18
- 2015-2016 учебный год 18
- 2016-2017 учебный год 19

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА 22
- 2015-2016 учебный год 22
- 2016-2017 учебный год 23

7 класс **25**
ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА 25
- 2015-2016 учебный год 25
- 2016-2017 учебный год 27

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА 28
- 2015-2016 учебный год 28
- 2016-2017 учебный год 30

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА 32
- 2015-2016 учебный год 32
- 2016-2017 учебный год 33

8 класс **36**
ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА 36
- 2015-2016 учебный год 36
- 2016-2017 учебный год 37

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА 39
- 2015-2016 учебный год 39
- 2016-2017 учебный год 41

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА 43
- 2015-2016 учебный год 43
- 2016-2017 учебный год 44

5 класс

ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА (ШЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.7 из 1	1.7 из 2	1.8 из 2	1.1 из 2	0.5 из 2	0.5 из 2	0.4 из 2	0.8 из 2	1.2 из 2	1.4 из 2	1.3 из 2	0.4 из 3

1. Солнце вращается вокруг своей оси столько суток, сколько будет четверть от сотни, а Юпитер – столько часов, сколько составляет самое маленькое двузначное число. Какую часть составляет время вращения Юпитера от времени вращения Солнца?
2. Куб с ребром 20 см разрезан на кубики с ребром 2 см. Затем все эти кубики уложили в один сплошной ряд. Чему равна длина этого ряда?
3. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 163, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?
4. – Который теперь час? – спросил Миша у отца.
   – А вот сосчитай: до конца суток осталось вдвое меньше того времени, которое прошло от их начала. Который час был тогда?
5. Таракан Джон объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Джон всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в "нормальных" м/мин) бегает таракан Джон?
6. В классе 17 пловцов, 8 борцов и 13 шахматистов. Известно, что каждый спортсмен занимается двумя видами спорта. Сколько в классе спортсменов?
7. Если 1/5 пчелиного роя полетела на цветы ладамбы, 1/3 – на цветы слэндбары, утроенная разность этих чисел полетела на дерево, а одна пчела продолжала летать между ароматными кетаки и малати, то сколько всего было пчел?
8. Андрей идет от дома до школы 20 минут. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома карандаш. Если он вернется за карандашом, то опоздает к звонку на 8 минут, а если продолжит путь, то придет в школу за 10 минут до звонка. Какую часть пути от дома до школы прошел Андрей к моменту, когда вспомнил о карандаше?
9. Раньше число, равное миллиону миллионов, называли словом «легион». Если разделить миллион легионов на легион миллионов, то получится:

   А) *легион* В) *миллион миллионов* Д) *один*
   Б) *миллион* Г) *легион легионов*
10. Восстанови зашифрованные цифры (разные буквы соответствуют разным цифрам, а одинаковые – одинаковым):

   СИНИЦА + СИНИЦА = ПТИЧКИ
11. За книгу заплатили 160 рублей и еще треть ее стоимости. Сколько стоит книга?

12. В зоомагазине продают канареек и попугаев. Канарейка стоит в два раза дороже попугая. Школьники, зашедшие в магазин, купили для живого уголка 5 канареек и 3 попугая. Если бы они купили 3 канарейки и 5 попугаев, то потратили бы на 200 рублей меньше. Сколько стоит каждая птица?

ОТВЕТЫ:

1. 1/60
2. 20 метров
3. 154 страницы
4. 16 часов
5. 18 м/мин
6. 19 спортсменов
7. 15 пчел
8. 9/20
9. Е) один
10. 342457 + 342457 = 684914
11. 240 рублей
12. Попугай стоит 100 рублей, канарейка – 200 рублей

Возможное решение: 5 канареек и 3 попугая стоят столько же, сколько и 13 попугаев. 3 канарейки и 5 попугаев стоят столько же, сколько и 11 попугаев. Значит, 13 – 11 = 2 (попугая) стоят 200 рублей, тогда 1 попугай стоит 100 рублей. Канарейка стоит в два раза дороже, значит 200 рублей

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.2 из 3	0.6 из 1	0.5 из 2	1 из 2	0.9 из 2	0.8 из 2	0.8 из 2	1.2 из 2	0.7 из 3	0.8 из 3	0.6 из 2	1.3 из 3

1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

2. Какие две цифры нужно приписать к числу 2016 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53 без остатка?

3. У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 15 марсиан взяться рука за руку так, что не останется свободных рук?

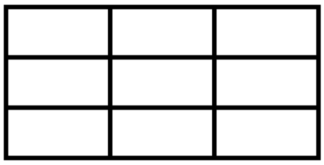
4. В некоторой семье отцу 42 года, а сыну – 14 лет. Через сколько лет сын будет в два раза младше отца?

5. В записи числа 52605308 зачеркните пять цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим из возможных. Запишите получившееся число.

6. Время полёта с Земли на Марс выражается числом земных суток, делящимся без остатка на числа 2, 3, 5, 6, 7 и 10. Найдите это число, если известно, что полёт длится менее года.

7. Чему равна сумма всех цифр всех чисел от 10 до 50 включительно?

8. Космический крейсер преодолевает расстояние от планеты А до планеты В за 10 суток. На сколько процентов нужно увеличить среднюю скорость крейсера, чтобы добраться от А до В за 8 суток?
9. Найдите три натуральных числа, сумма которых совпадает с их произведением.
10. В строительном магазине продаются болты и гайки в пачках: болты по 12 штук в пачке, гайки по 15 штук. Какое наименьшее количество упаковок с болтами и гайками в сумме необходимо купить, чтобы болтов и гаек оказалось в итоге поровну?
11. Можно ли разменять 50-рублевую купюру 13 монетами достоинства 1, 2, 5 и 10 рублей? В ответе указать – можно или нельзя. В случае, если можно, написать сколько каких монет.
12. Какое наибольшее количество прямоугольников можно выделить на рисунке? Ответ обосновать.



ОТВЕТЫ:

1. Нет
2. 12 или 65
3. Нет
4. Через 14 лет
5. 658
6. 210 суток
7. 285
8. На 25%
9. 1, 2 и 3
10. Болтов – 5 пачек, гаек – 4 пачки
11. Можно, например, 50 рублей = 10 монет по 2 руб. + 3 монеты по 10 руб.
12. 36 штук

Возможное обоснование: Сосчитаем количество прямоугольников, состоящих из 1-ой клетки – 9 штук. Прямоугольников из 2-х клеток – 12 штук (размером 1x2 – 6 штук, размером 2x1 – 6 штук), прямоугольников из 3-х клеток – 6 штук, из 4-х клеток – 4 штуки, из 6 клеток – 4 штуки, из 9 клеток – 1 штука.

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА (МЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.3 из 1	0.2 из 2	0.1 из 2	0.2 из 2	1 из 2	0.6 из 2	0.5 из 2	0.2 из 2	1 из 3	0.9 из 3

1. Впервые выход в открытый космос был осуществлён космонавтом Алексеем Леоновым во время полёта корабля «Восход-2» (18-19 марта 1965 года). Время выхода в открытый космос составило 12 минут. Светлана Савицкая – первая женщина космонавт, вышедшая в открытый космос (17-29 июля 1984 года). Время пребывания в открытом космосе составило 3 часа 20 минут. Сколько процентов составляет отношение времени пребывания Леонова ко времени Савицкой?
2. На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый торт пятью прямолинейными разрезами?

3. Вычислить

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{2015*2016}$$

4. Масса 10 ящиков болтов и 7 ящиков гвоздей – 366 кг, а 5 ящиков шурупов и 3 ящика навесов – 262 кг. Определите массу одного ящика гвоздей, шурупов, болтов и навесов, если известно, что ящик с гвоздями в три раза легче ящика с навесами, а с болтами – на 4 кг тяжелее, чем с шурупами.

5. Найти все такие пары натуральных чисел, сумма которых больше их произведения.

6. Велосипедист должен попасть в место назначения к определенному сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 км/ч, то опоздает на один час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

7. Гравировщик делает таблички с буквами. Одинаковые буквы он гравирует за одинаковое время, разные — возможно, за разное. На две таблички «ДОМ МОДЫ» и «ВХОД» вместе он потратил 50 минут, а одну табличку «В ДЫМОХОД» сделал за 35 минут. За какое время он сделает табличку «ВЫХОД»?

8. Найдите значение дроби В·А·Р·Е·Н·Ь·Е / К·А·Р·Л·С·О·Н, где разные буквы – это разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры, а между буквами стоит знак умножения.

9. *x*, *y*, *k* — три различные цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 5328. Найти эти цифры.

10. На некотором острове необычайно регулярный климат: по понедельникам и средам всегда идут дожди, по субботам – туман, зато в остальные дни – солнечно. Утром какого дня недели нужно начать свой отдых группе туристов, если они хотят пробыть там 44 дня и захватить при этом как можно больше солнечных дней?

ОТВЕТЫ:

1. 6%
2. На 16 частей
3. 2015/2016
4. Ящик гвоздей весит 18 кг, ящик навесов – 54 кг, ящик шурупов – 20 кг, ящик болтов – 24 кг
5. Одно из чисел равно 1, а другое – произвольное натуральное число
6. 12 км/ч
7. 20 минут
8. 0
9. 7, 8, 9
10. В четверг *Возможное решение*: Выясним, сколько полных недель в 44 днях. Получим 6 недель. В течение этих недель число солнечных дней не зависит от того, когда начнется отдых. В качестве оставшихся двух дней выбираем четверг и пятницу – солнечные дни. Следовательно, отправляем туристов утром в четверг.

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5 из 3	1.1 из 3	0.1 из 4	1 из 2	1.2 из 3	0.8 из 3	0.2 из 3	0.9 из 3	0.5 из 3	0.9 из 3

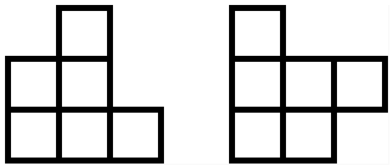
1. Решите числовой ребус

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{ДУГА} \\ \text{ДУГА} \end{array} \\ \hline \text{КРУГ} \end{array}$$

где гласным и согласным буквам соответствуют цифры разной четности, а разным буквам – разные цифры. В ответе приведите число, соответствующее слову ДРУГ.

2. В магазине куплено 4 разных фрукта. Все фрукты без апельсина стоят 42 рубля, без банана – 40 рублей, без грейпфрута – 38 рублей, а без яблока – 36 рублей.
Сколько стоит каждый фрукт?

3. Составьте прямоугольник из набора двух типов одинаковых фигур, показанных на рисунке (дополнительно разрезать фигуры нельзя, поворачивать можно).



4. Какая фраза на русском языке зашифрована в числе 122121612041411810151, если каждая буква заменена ее номером в алфавите и пробелу соответствует число 0?

5. В межгалактический земной зоопарк прибыли загадочные животные: пятиногие шестихвосты и четвероногие семиглазы. Сколько каких животных прибыло в зоопарк, если известно, что у шестихвостов по два глаза на каждом хвосте, а всего ног и глаз у всех особей соответственно 35 и 71?

6. Транспортировка космического корабля для запуска от ангара к стартовой площадке происходит по рельсам (пара рельс). Специальные типы рельсов изготавливаются под заказ только с длинами 7 и 12 метров, и делить их на части нельзя. Сколько разных решений (комплектов рельс двух типов) имеется для задачи составления пути длиной в 100 метров?

7. Сказал Кощей Ивану-царевичу: «Жить тебе осталось до завтрашнего утра. Утром явишься перед мои очи, задумаю тебе три цифры: a, b и c. Скажешь мне три числа: x, y и z. Выслушаю я тебя и скажу, чему будет равно выражение a·x + b·y + c·z. Тогда должен ты отгадать, какие a, b и c я задумал. Не отгадаешь – голову с плеч долой». Опечалился Иван, пошел думу думать. Как бы помочь Ивану?
8. Как только с помощью двух ёмкостей – в 3 и 5 литров можно отмерить 4 литра воды из большой ёмкости, если воду нельзя выливать куда-либо помимо данных трех ёмкостей. Решение обоснуйте.
9. Дана таблица размера 3×4. Можно ли расставить числа 1 и -1 во все клетки таблицы так, чтобы все семь сумм (суммы чисел по столбцам и строкам) были различны? Ответ обоснуйте.
10. Между планетами и спутниками Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам (только в одном направлении): Земля – Луна, Венера – Марс, Земля – Марс, Уран – Луна, Земля – Уран, Марс – Уран, Луна – Венера и Марс – Земля. Сколькими разными способами можно добраться с Земли до Марса (дважды посещать планеты и спутники запрещено)? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТЫ:

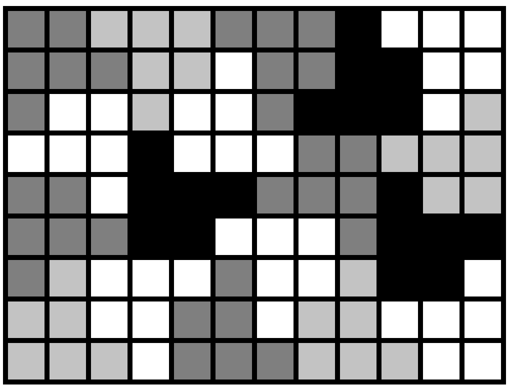
1. 4210 *Возможное решение*: Заметим, что при сложении двух одинаковых цифр получим чётное число, потому сумма последних разрядов А+А даёт букве Г соответствие четному числу. Следовательно, для всего примера имеем: согласные буквы соответствуют чётным числам, гласные – нечётным. Осталось перебрать несколько возможных вариантов для буквы А (1, 3, 5, 7, 9)

и убедиться, что только в одном случае, при А=5, выполняются все требования задачи: $\begin{array}{r} 4105 \\ +\,4105 \\ \hline 8210 \end{array}$.

2. Апельсин – 10 руб., банан – 12 руб., грейпфрут – 14 руб., яблоко – 16 руб.

Возможное решение: Пусть X – сумма стоимостей всех фруктов. Так как из условий видно, что стоимость без апельсина и без банана отличается на 2 рубля, то можно сделать вывод о том, что апельсин дешевле банана на 2 рубля. Далее, выясняем, что грейпфрут дороже банана на 2 рубля, а яблоко дороже грейпфрута на 2 рубля. Тогда, обозначив за a стоимость апельсина,
$a+2, a+4, a+6$ – стоимости банана, грейпфрута и яблока соответственно.
Тогда $X = a + (a+2) + (a+4) + (a+6) = 4a + 12$ – сумма стоимостей всех фруктов. Условие, что все фрукты без апельсина стоят 42 рубля даёт уравнение $4a + 12 - a = 42$, откуда $3a = 30$, и стоимость апельсина равна 10 рублей.
Соответственно, 12 рублей – стоимость банана,
14 рублей – стоимость грейпфрута,
16 рублей – стоимость яблока.

3. Прямоугольник размером 9×12, один из вариантов приведён на рисунке. Расположение шестиклеточных фигур указано в четырхцветной расцветке



4. КУБОК ГАГАРИНА

5. 3 шестихвоста и 5 семиглазов.

Возможное решение: Сосчитаем количество глаз у шестихвостов – 12 глаз, четное число. Тогда, количество семиглазов должно быть нечётным, так как сумма глаз у всех животных нечётно. Количество семиглазов не может быть больше 10, иначе общее количество глаз будет больше 70. Итого, количество семиглазов может быть числом 9, 7, 5, 3 или 1.
Аналогично рассуждая про количество ног, можно получить нечетное количество шестихвостов – 1, 3, 5 или 7. Проверкой (перебором) случаев находим единственный вариант решения задачи.
Ещё вариант рассуждения, использующий кратность 5. Количество ног у шестихвостов и общее количество ног всех животных кратно 5, следовательно, так как количество ног у семиглазов не кратно 5, то кратно 5 число самих семиглазов, откуда следует единственное решение.

6. Только одно решение – комплект из 12 рельсов длиной 12 метров и 8 рельсов длиной 7 рельсов (всего 20 рельсов двух типов).

7. Числа, которые должен сказать Иван-царевич Кощею – 100, 10 и 1 (или те же 1, 10 и 100 в другом порядке). Тогда число, которое скажет Кощей будет выглядеть как трехзначное десятичное $\overline{abc}$.

8. *Возможное решение*: Рассмотрим содержание воды в 3-х и 5-ти литровых емкостях соответственно. Обозначим (x,y) – состояние, когда в 3-литровой ёмкости находится x литров воды, а в 5-литровой – y литров. В начальный момент имеем состояние (0,0). Очевидно, что в конечный момент 4 литра воды должно находиться в 5-литровой ёмкости, т.е. (0, 4). То есть, такое можно получить либо, отливая 1 литр из полной 5-литровой ёмкости, либо добавляя её до 4-х литров с помощью 3-литровой. Для обоснования полезно следующее <u>Утверждение.</u> После любого шага переливания точное количество воды в обеих ёмкостях можно получить только в случае, если хотя бы одна ёмкость пустая или, наоборот, полная. То есть, состоянию (0,4) предшествует либо состояние (2,5), либо (3,1). Итого, как минимум есть два способа получить желаемое за несколько переливаний:

1) $(0,0) \to (3,0) \to (0,3) \to (3,3) \to (1,5) \to (1,0) \to (0,1) \to (3,1) \to (0,4)$.
2) $(0,0) \to (0,5) \to (3,2) \to (0,2) \to (2,0) \to (2,5) \to (3,4)$.

9. Да, можно.
Возможное решение: Заметим, что при суммировании 3-х и 4-х чисел максимальные и минимальные возможные суммы могут получиться 4 и -4, а также, все промежуточные варианты. Остаётся подобрать вариант расположения или доказать, что такого не существует.

Вариант подбора: $\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$

10. 5 способов.
Возможное решение: Рисуем связный граф, соответствующий описанию маршрутов. Согласно условиям, стрелками обозначаем направление маршрутов между планетами и спутниками. Перечисляем разные маршруты:
1) З – М
2) З – Л – М
3) З – Л – В – М
4) З – У – Л – М
5) З – У – Л – В – М

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА (РЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
0.1 из 2	0.5 из 4	0.2 из 4	0.7 из 4	0.7 из 4	0.2 из 6	1.9 из 6	2.1 из 6

1. Из Сочи в Звездный городок везли 10 т персиков, которые содержат 99% воды. По дороге они усохли и стали содержать 98% воды. Сколько тонн персиков привезли в Звездный городок?

2. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

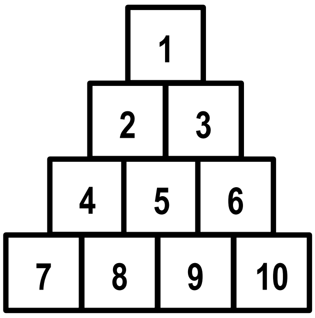
3. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике 201×16?

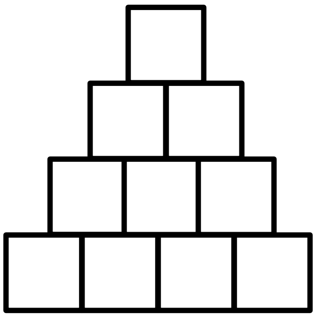
4. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 2016 цифр. Сколько страниц в этой книге, если номера начинают печатать с первой страницы?

5. После семи стирок остаток от «Космического порошка» поместился в коробочку длина, ширина и высота которой уменьшилась вдвое относительно исходных размеров «Космического порошка». На сколько стирок хватит оставшегося порошка?

6. На каждом километре между поселками Гагарино и Титово стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Гагарино, на другой – расстояние до Титово. Останавливаясь у каждого столба, Валя заметила, что если сложить все цифры, записанные на обеих сторонах таблички, то получится 13. Найдите расстояние между поселками.

7. Переложите пирамиду из 10 кубиков (см. рисунок) так, чтобы её форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.





8. Чтобы сжить с белого света Змея Горыныча, которому исполнилось 40 лет, Кощей Бессмертный придумал приучить его к курению. Кощей Бессмертный подсчитал, что если Змей Горыныч каждый день в течение года будет выкуривать по 17 сигарет, то он умрет через 5 лет, если же он будет выкуривать по 16 сигарет, то умрет через 10 лет. Сколько лет проживет Змей Горыныч, если он не будет курить?

ОТВЕТЫ:

1. 5 т персиков
2. По 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 рублевых монет соответственно
3. 216 клеток
4. 708 страниц
5. На 1 стирку
6. 49 км
7.

	5		
	7	10	
9	1	8	
3	4	6	2

8. 130 лет

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
1.6 из 3	1.8 из 3	0.2 из 3	0.9 из 3	1.5 из 2	0.5 из 3	1.3 из 3	1.3 из 3

1. Для вывода космического корабля на околоземную орбиту требуется достичь первой космической скорости (около 8 км/с). Планируется последовательное использование трех ступеней (систем двигателей) корабля: первая ступень работает 1 минуту и увеличивает скорость в среднем на 5 м за каждую секунду работы, вторая ступень работает 4 минуты и разгоняет на 10 м за секунду, третья ступень – 4 минуты и на 20 м в секунду. Достигнет ли корабль первой космической скорости за первые 10 минут полета? Ответ обоснуйте.

2. Один странный мальчик по средам и четвергам говорит только правду, по понедельникам всегда лжет, а в остальные дни недели может и соврать, и сказать правду. Шесть дней подряд его спрашивали, как его зовут, и получили такие ответы: Антон, Борис, Антон, Борис, Петя, Борис. Как он ответит на этот вопрос на следующий день? Ответ обоснуйте.

3. 12 апреля 2017 года исполнилось 56 лет со дня полета первого космонавта Юрия Гагарина в космос. Найдите сумму всех цифр у всех целых чисел от 1961 до 2017 включительно. Ответ обоснуйте.

4. В 15-этажном доме имеется лифт с двумя кнопками: «+7» и «–9» (первая поднимает лифт на 7 этажей, вторая опускает на 9). Можно ли проехать с 3-го этажа на 12-й? Ответ обоснуйте.

5. Царь Кощей подобрел и решил потратить 50 золотых монет на подарки детям. В сундуке у него хранится 5 ларцов, в каждом ларце по 3 шкатулки, а в каждой шкатулке по 10 золотых монет. Сундук, ларцы и шкатулки заперты на замки. Какое наименьшее число замков потребуется открыть Кощею, чтобы достать 50 монет? Ответ обоснуйте.

6. Сколько трехзначных чисел имеют ровно две различные цифры? Ответ обоснуйте.

7. Квадрат с 3×3 ячейками содержит целые числа от 1 до 9. Переставьте числа в ячейках так, чтобы суммы чисел в любой горизонтали, вертикали и диагонали были бы одинаковы.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

8. Яблоко и апельсин вместе весят столько же, сколько груша и персик. Яблоко вместе с грушей весят меньше, чем апельсин с персиком, а груша вместе с апельсином весят меньше, чем яблоко с персиком. Какой из фруктов самый тяжелый? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТЫ:

1. Да, скорость достигнет 8,1 км/с
2. Антон *Возможное решение*. Заметим, что среди семи ответов на вопрос об имени, мальчик должен был дважды подряд сказать своё имя – в среду и четверг. Однако, среди шести известных его ответов нет двух подряд идущих, поэтому стоит ожидать ответ либо «Антон», либо «Борис». Проверяя ответ «Борис» (по первым буквам Б-П-Б-Б-А-Б-А-Б, начиная с понедельника), заметим, что ответ «Борис» в понедельник не соответствует ложному ответу, поэтому отвергаем его. Для ответа «Антон» проверим выполнение всех условий задачи (по первым буквам П-Б-А-А-Б-А-Б, начиная с понедельника). Это единственный верный ответ.
3. 971 *Возможное решение*. Различные способы суммирования цифр, например, поразрядно.
4. Нет, невозможно *Возможное решение*. Достаточно рассмотреть случай, когда на 12-й этаж можно попасть только с 5-го этажа (поднявшись на 7 этажей). В этом случае очевидно, что невозможно попасть на 5-й этаж с какого-либо другого в 15-этажном доме.
5. Минимальное количество замков – 8

   Возможное решение. Наименьшее количество замков потребуется открыть в случае, если из каждой шкатулки доставать все монеты – 5 шкатулок. Наименьшее количество открываемых ларцов – 2 (в одном достать 3, в другом – 2 шкатулки). В любом случае – открыть сундук. Итого: 5 + 2 + 1 = 8 замков
6. 243 *Возможное решение*. Рассмотрим количество всех трёхзначных чисел: 999-99=900. Разделим все эти числа на три непересекающиеся группы – содержащие все три одинаковые цифры, т олько две одинаковые цифры и числа со всеми тремя разными цифрами. Рассмотрим количество чисел в первом и втором случае. Количество чисел с тремя одинаковыми цифрами – 9 штук (111, 222, ..., 999). Для подсчета количества чисел, в записи которых все цифры разные, используем правило произведения: перебираем возможные варианты расстановки цифр на три возможных места. На первое место (разряд сотен) можно поставить одну из 9-ти различных цифр (1-9), на следующее (десятки) – одну из 10-ти цифр (0-9), не совпадающую с уже поставленной – 9 вариантов. На последнее место (разряд единиц) ставим одну из 10 цифр, не стоящую ранее – 8 вариантов. В итоге, количество чисел в третьей группе – $9\times9\times8$=648 штук, тогда трёхзначных чисел ровно с двумя одинаковыми цифрами 900-9-648=243
7.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Возможное решение. Рассмотрим сумму всех чисел в таблице: $1 + 2 + .. + 9 = 45$. Следовательно, после расположения их в строках квадрата сумма чисел в каждом столбце будет 15. Расположим числа, например, так: $\begin{matrix}1&2&3\\5&6&4\\9&7&8\end{matrix}$. То есть, в каждом столбце одинаковая сумма. Теперь будем перемещать цифры в столбцах для того, чтобы и в каждой строке была сумма 15. Например, так: $\begin{matrix}1&6&8\\5&7&3\\9&2&4\end{matrix}$. Теперь, перемещаем столбцы (меняем местами столбцы 1 и 2) так, чтобы по диагонали также была сумма 15. Итог: $\begin{matrix}6&1&8\\7&5&3\\2&9&4\end{matrix}$.

8. Персик *Возможное решение*. Рассмотрим несколько случаев взвешивания разного количества фруктов на двухчашечных весах. Если положим на левую чашу весов яблоко (Я) и апельсин (А), а на правую – грушу (Г) и персик (П), то по условию – весы находятся в равновесии (Я+А=Г+П). Теперь, по условию, на левую чашу положим Я и Г, на правую – А и П, причем правая чаша перевешивает левую (Я+Г<А+П). Доложим на обе чаши по два фрукта к имеющимся – А и Г (Я+Г+(А+Г)<А+П+(А+Г)). Весы по прежнему показывают перевес правой чаши. Убираем теперь с левой чаши А и Я, а с правой – Г и П, по условию, весящих одинаково (2Г+(Я+А)<2А+(Г+П)).

Оставшиеся две груши весят меньше двух апельсинов. Аналогично проведём взвешивания, сравнивая вес груши и апельсина с весом яблока и персика (Г+А<Я+П) и добавляя на обе чаши весов яблоко и грушу (Г+А+(Я+Г)<Я+П+(Я+Г)). Убираем теперь с левой чаши А и Я, а с правой – Г и П, по условию, весящих одинаково (2Г+(Я+А)< Я(Г+П)). В итоге: груша (Г) весит меньше апельсина (А) и меньше яблока (Я). Возвращаясь к первому равновесию, можно показать, что персик весит больше яблока или апельсина, иначе левая чаша будет перевешивать правую.

Возможны и другие способы доказательства, например, перебор случаев различных весов фруктов с обоснованием.

6 класс

ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА (ШЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.5 из 1	0.5 из 2	1.2 из 2	0.8 из 2	1.1 из 2	1.3 из 2	0.7 из 2	0.7 из 2	0.7 из 2	0.4 из 3	1 из 4	0.8 из 3

1. Двенадцать космонавтов обменялись рукопожатием. Сколько было рукопожатий?
2. На сколько нулей оканчивается произведение $1\times2\times3\times4\times\ldots\times37$?
3. В некотором месяце понедельников больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был пятого числа этого месяца?
4. Найдите трёхзначное число, равное кубу суммы его цифр.
5. Среднее арифметическое возрастов шести космонавтов равно 33. После того, как к ним добавился еще один, среднее арифметическое семи космонавтов стало равно 32. Каков возраст вновь прибывшего космонавта?

6. Один из пяти братьев – Андрей, Витя, Дима, Толя или Юра разбил окно. Андрей сказал: “Это сделал или Витя, или Толя”. Витя сказал: “Это сделал не я и не Юра”. Дима сказал: “Нет, один из них сказал правду, а другой – неправду”. Юра сказал: “Нет, Дима, ты не прав”. Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто же из братьев разбил окно?

7. На каждом шаге к данному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 51?

8. На окраску деревянного кубика затратили 6 г краски. Когда она высохла, кубик распилили на 8 одинаковых кубиков меньшего размера. Сколько краски потребуется для того, чтобы закрасить образовавшиеся при этом неокрашенные поверхности?

9. Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

10. В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

11. В магазин привезли меньше 500, но больше 400 тарелок. Когда стали раскладывать их десятками, то не хватило трёх тарелок до полного числа десятков, а когда стали раскладывать дюжинами, осталось 7 тарелок. Сколько было тарелок?

12. Собака погналась за лисицей, которая была в 30 метрах от неё. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы – 1 м. В то время как собака делает 2 скачка, лисица делает 3 скачка. Какое расстояние должна пробежать собака, чтобы догнать лисицу?

ОТВЕТЫ:

1. 66 рукопожатий
2. 8 нулей
3. Четверг
4. 512
5. 26 лет
6. Толя
7. 8 шагов
8. 6 г краски
9. 37 место
10. 132 дня
11. 427 или 487 тарелок
12. 120 метров

Возможное решение:

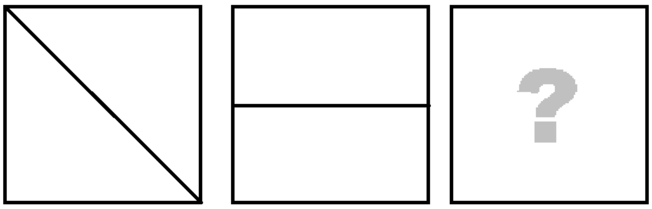
1) $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$ (м) – догоняет собака за 2 своих скачка, т.е. пробегая 4 м.

2) $30 : 1 \cdot 4 = 120$ (м)

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2.2 из 3	2.4 из 3	1.4 из 4	2 из 4	1.2 из 3	1.2 из 4	3.3 из 4	2.5 из 4	2.4 из 4	2.6 из 4	1.6 из 4	0.9 из 5

1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
2. К числу 10 справа и слева приписали одну и ту же цифру так, что полученное четырёхзначное число делится на 12. Какую цифру приписали?
3. Скорость искусственного спутника Земли 28800 км/ч, а скорость пули винтовки 800 м/с. Какое из этих тел движется быстрее и во сколько раз?
4. Известно, что легко разрезать квадрат на два равных треугольника и на два равных четырехугольника. Как разрезать квадрат на два равных пятиугольника?



5. Кого больше: котов, кроме тех котов, которые не Васьки, или Васек, кроме тех Васек, которые не являются котами?
6. Спутник выводится на заданную орбиту Земли с помощью двух двигателей разной мощности – основным и вспомогательным. Если основному двигателю для этой работы необходимо 3 часа работы, а вместе со вспомогательным – 2 часа, то за какое время эту же работу выполнит только один вспомогательный двигатель?
7. Учитель физкультуры решил разбить всех учеников 6А класса на одинаковые группы. Разбил по двое – один остался без пары, разбил по трое – опять остался один ученик без группы, по четверо – та же история. Наконец, разбив по пять человек, – получилось поровну. Сколько учеников в 6А классе?
8. На улице, встав в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Белла, Вера и Галя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Белла) стоит между девочкой в голубом платье и Галей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Беллой. Какое платье на каждой из девочек?
9. Ученик Михаил на доске заполнил таблицу числами так, что сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 15. На перемене кто-то стер почти все числа, кроме двух. Можно ли восстановить всю таблицу?

6								**4**						

10. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой увлекаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?

11. В ящиках лежат орехи. В первом ящике на 6 кг орехов меньше, чем в двух других вместе. А во втором на 10 кг меньше, чем в двух других вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

12. В некоторой области звездного неба подсчитано общее количество звезд первой и второй величины – всего 30 звезд. Известно также, что среди любых 12 взятых звезд обязательно найдется хотя бы одна звезда второй величины, а среди любых 20 звезд – хотя бы одна первой величины. Сколько каких звезд в этой области звездного неба? Ответ обосновать.

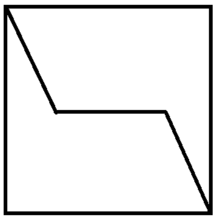
ОТВЕТЫ:

1. Нет

2. 4

3. Спутник, в 10 раз быстрее

4. Способов много. Например, так



5. Поровну, это одни и те же коты Васьки

6. За 6 часов

7. 25 учеников

8. Аня – в белом, Белла – в голубом, Вера – в зеленом, Галя – в розовом.

9. Можно:

6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4

10. 25 человек

11. 8 кг

12. 11 звёзд 1-ой и 19 звёзд 2-ой величины

Возможное обоснование:

Рассмотрим крайнюю ситуацию – 20 звезд, среди которых ровно одна звезда 1-ой величины. Тогда, заменяя ее любой из оставшихся 10 звезд, по условию найдется хотя бы одна звезда 1-ой величины. Тогда все оставшиеся 10 – звёзды 1-ой величины. Итого, в крайнем случае звёзд 1-ой величины не менее 11 штук. Аналогично рассматривая некоторые 12 звезд, приходим к выводу, что звёзд 2-ой величины должно быть не менее 19 штук. Следовательно, единственный вариант – 11 звёзд 1-ой и 19 звёзд 2-ой величины.

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА (МЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2 из 1	0.2 из 3	0.7 из 2	1 из 2	0.4 из 2	0.3 из 2	0.7 из 2	0.5 из 2	0.6 из 2	0.9 из 3

1. Первая космическая скорость – это скорость, при которой орбитальная станция движется по круговой орбите. Вторая космическая скорость – это скорость, при которой спутник, покидает окрестности Земли и становится спутником Солнца. Она больше первой космической скорости. Среднее арифметическое первой и второй космических скоростей равно 9,35 км/с, причём одна из них составляет 0,7 от другой. Найди первую космическую скорость.

2. В выпуклом пятиугольнике проведены все его диагонали. Сколько треугольников можно увидеть на таком чертеже?

3. Раиля попросили написать номер квартиры, в которой он живёт. Он ответил, что этот номер выражается числом, которое в 17 раз больше числа, стоящего в разряде единиц номера. Какой же номер этой квартиры?

4. В хороводе по кругу стоят 15 детей. Справа от каждой девочки стоит мальчик. У половины мальчиков правый сосед тоже мальчик, а у каждого из остальных мальчиков правый сосед – девочка. Сколько мальчиков и сколько девочек в хороводе?

5. В школе прошли три олимпиады. Оказалось, что в каждой из них участвовало по 50 человек. Причем, 60 человек приходило только на одну олимпиаду, а 30 человек – ровно на две. Сколько человек приняло участие во всех трех олимпиадах?

6. Количество отсутствующих в классе составляло 1/6 всех присутствующих. После того, как один ученик вышел, количество отсутствующих стало составлять 1/5 присутствующих. Сколько учеников в классе?

7. Две команды разыграли первенство школы в десяти видах, причем за победу команда получала 4 очка, за ничью – 2 очка и за проигрыш – 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

8. Какой цифрой заканчивается произведение $7 \times 27 \times 47 \times 67 \times 87 \times \ldots \times 2007 \times 2027$?

9. Велосипедист должен попасть в пункт назначения к определённому сроку. Если он поедет со скоростью 10 км/ч, он опоздает на один час, а если он поедет со скоростью 15 км/ч, то он приедет на один час раньше срока. С какой скоростью ему нужно ехать, чтобы приехать вовремя?

10. Два торговца купили в городе одинаковое количество товара по одной и той же цене и увезли каждый в свою деревню продавать. Первый продавал товар в два раза дороже закупочной цены. Второй сначала поднял цену на 60%, продал четвертую часть товара, затем поднял цену еще на 40% и продал остальное. Кто из них выручил больше денег?

ОТВЕТЫ:

1. 7,7 км/с
2. 35 треугольников
3. 85
4. 5 девочек и 10 мальчиков
5. 10 человек
6. 42 ученика
7. 4 ничьи
8. 9
9. 12 км/ч
10. Второй торговец

Возможное решение. Пусть стоимость всего купленного товара – x рублей, тогда, первый торговец продал весь товар за 2x рублей. Второй – сначала продал четверть товара, подняв цену на 60%, то есть, получил за это $1{,}6 \cdot 0{,}25x$ рублей. Затем продал остальное, подняв новую цену еще на 40%, то есть получил $1{,}6 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}75x$ рублей. Получается, что второй продал весь товар за $1{,}6 \cdot 0{,}25x + 1{,}6 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}75x = 0{,}4x + 1{,}68x = 2{,}04x$ (рублей). Это больше, чем 2x, значит, второй выручил больше денег.

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.7 из 3	2.1 из 3	0.5 из 3	0.6 из 2	0.5 из 3	0.9 из 3	0.6 из 3	1.1 из 3	0.7 из 3	0.9 из 3

1. Между планетами и спутниками Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам (только в одном направлении): Земля – Луна, Уран – Сатурн, Венера – Марс, Земля – Марс, Уран – Луна, Земля – Уран, Венера – Сатурн, Марс – Уран, Луна – Венера и Марс – Земля. Сколькими разными способами можно добраться с Земли до Марса (дважды посещать планеты и спутники запрещено)? Ответ обоснуйте.

2. Четверо друзей Антон, Борис, Вася и Гоша – ученики 4, 5, 6 и 7 классов – отправились в лес за грибами. Пятиклассник не нашел ни одного белого гриба, а Вася и ученик четвертого класса собрали их по 8 штук. Антон и пятиклассник нашли много подберезовиков и позвали Бориса в компанию собирать их. Семиклассник и Борис посмеялись над Васей, сорвавшим мухомор. Кто из друзей в каком классе учится?

3. Транспортировка космического корабля для запуска от ангара к стартовой площадке происходит по рельсам (пара рельс). Специальные типы рельсов изготавливаются под заказ только с длинами 7 и 8 метров и делить их на части нельзя. Сколько разных решений (комплектов рельс двух типов) имеется для задачи составления пути длиной в 100 метров?

4. Лифт двенадцатиэтажного дома, двигаясь равномерно, поднимается на 6-ой этаж за 30 секунд. За какое время лифт поднимется на 12-ый этаж?

5. В магазине в отделе «Фрукты и овощи» стоят неисправные весы – они верно взвешивают продукты только от 1 кг. При взвешивании 7 яблок, 2 мандаринов и 3 бананов весы показывают 3 кг, при взвешивании 4 яблок, 9 мандаринов и 8 бананов весы показывают 2,5 кг. Сколько весят вместе одно яблоко, один мандарин и один банан?

6. Известно, что из восьми монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на двухчашечных весах без стрелок?

7. Найти наименьшее натуральное число, суммой цифр которого является число 2017.

8. Как только с помощью двух ёмкостей – в 3 и 5 литров можно отмерить 4 литра воды из большой ёмкости, если воду нельзя выливать куда-либо помимо данных трех ёмкостей. Решение обоснуйте.

9. Взяли четыре натуральных числа, сумма которых равна 111. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель? Выпиши пример, подтверждающий твой ответ.

10. Дана таблица размера 3×4. Можно ли расставить числа 1 и -1 во все клетки таблицы так, чтобы все семь сумм (суммы чисел по столбцам и строкам) были различны? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТЫ:

1. 5 способов. *Возможное решение*: см. № 10 стр. 10

2. Антон – 7 класс, Борис – 4 класс, Вася – 6 класс, Гоша – 5 класс.

   Возможное решение: Заметим, что три высказывания о том, что кто-то из друзей находился вместе с другими, дает косвенную информацию о принадлежности к некоторому классу.

   1) Высказывание «Пятиклассник не нашел ни одного белого гриба, а Вася и ученик четвертого класса собрали их по 8 штук» даёт утверждение «Вася – не 5-классник и не 4-классник».

   2) Высказывание «Антон и пятиклассник нашли много подберезовиков и позвали Бориса в компанию» даёт утверждения «Антон – не 5-классник» и «Борис – не 5-классник». С учётом предыдущего утверждения про Васю, отсюда следует «Гоша – 5-классник».

   3) Высказывание «Семиклассник и Борис посмеялись над Васей, сорвавшим мухомор» даёт утверждения «Борис – не 7-классник» и «Вася – не 7-классник», откуда следует «Антон – 7-классник».

   4) Возвращаясь к первому утверждению о том, что «Вася – не 4-классник», делаем вывод «Борис – 4-классник». Наконец, очевидно, что верно «Вася – 6-классник».

3. Только два решения: 1) комплект из 8 рельсов длиной 7 метров и 18 рельсов длиной 8 метров (всего 26 рельсов двух типов) и 2) комплект из 24 рельсов длиной 7 метров и 4 рельсов длиной 8 метров (всего 28 рельсов двух типов).

4. 66 секунд. *Возможное решение*: Заметим, что при подъёме на 6-ой этаж лифт проходит 5 этажей, то есть один этаж за 6 секунд, а при подъёме на 12-ый этаж проходит 11 этажей – за $11 \cdot 6 = 66$ секунд.

5. 0,5 кг. *Возможное решение*: Пусть вес одного яблока x кг, мандарина – y кг, банана – z кг. По результатам двух взвешиваний составляем систему уравнений:
$7x+2y+3z=3$ и $4x+9y+8z=2{,}5$, откуда складывая оба уравнения вместе, получим новое: $11(x+y+z)=5{,}5$, откуда после деления на 11 получим окончательно ответ задачи: $x+y+z=0{,}5$

6. *Возможное решение*: Разделим монеты на две группы – шесть монет и две монеты. 1) Проведем первое взвешивание среди монет первой группы – располагаем по три монеты на чашах весов. Возможны две ситуации: весы показывают перевес с одной из сторон или находятся в равновесии. В первом случае фальшивая монета находится среди монет первой группы – весы покажут, среди каких трёх она находится (выделим эти три монеты в третью группу, все остальные удаляем – среди них нет искомой). Если весы в состоянии равновесия – среди монет первой группы фальшивой не оказалось (она – одна из двух во второй группе, тогда удаляем первые шесть). То есть, после первого взвешивания остаётся группа либо из трёх, либо из двух монет (остальные удаляем). 2) Для второго взвешивания из оставшихся берём две монеты (если монет три, то выбираем любые две, третью – откладываем, но не удаляем) и располагаем их на чашах весов. Возможны две ситуации: весы показывают перевес с одной из сторон или находятся в равновесии. В первом случае фальшивая монета находится среди взвешиваемых – весы покажут, где. Если же весы в состоянии равновесия (только в случае, когда после первого взвешивания осталось три монеты) – фальшивая монета та третья, которую не взвешивали.

7. 1999…99, где девяток в составе числа ровно 224 штуки.
Возможное решение: Наименьшее натуральное число содержит наименьшее возможное количество разрядов. То есть, уменьшить количество разрядов при сохранении суммы цифр возможно, размещая наибольшее количество девяток в разрядах. Рассмотрим наибольшее количество девяток в сумме, равной $2017=224\cdot 9+1$. Значит, 225 – минимальное количество разрядов искомого числа. Для составления наименьшего числа поставим 1 в старший разряд, остальные заполним цифрами 9. Итого, искомое число – $1999\ldots 99$, где девяток в составе числа ровно 224 штуки.

8. *Возможное решение*: см. № 8 стр. 10

9. 3. Четыре числа, кратные 3 и в сумме дающие 111.

Возможное решение: Заметим, что число $111=3\cdot 37$. Также заметим, что так как сумма четырех взятых чисел делится на 3 и 37, то среди этих чисел и нужно искать общие делители всех четырех чисел. Покажем, что наибольшим возможным из них будет 3. Действительно, если бы все четыре числа делились на 37, то их сумма была бы как минимум $4\cdot 37$, что противоречит условию. Следовательно, наибольшим возможным будет 3. Покажем, что можно подобрать такие четыре числа, для которых это будет верно. Например: $3, 6, 9, 93$.

10. Да, можно. *Возможное решение*: Заметим, что при суммировании 3-х и 4-х чисел максимальные и минимальные возможные суммы могут получиться 4 и -4, а также, все промежуточные варианты. Остаётся подобрать вариант расположения или доказать, что такого не существует. Вариант подбора: $\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$.

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА (РЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
0.9 из 2	1.4 из 4	1.5 из 4	1.4 из 4	2 из 4	2.6 из 6	0.2 из 6	0.8 из 6

1. Найдите количество способов расставить отряд из 6 космонавтов в одну шеренгу?
2. У некоторого трёхзначного числа переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырёхзначное число, начинающееся с 173. Какой может быть его последняя цифра?
3. Ваня и Петя могут напилить за день 5 поленниц дров или наколоть 8 поленниц. Какое наибольшее число поленниц они могут напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?
4. Одна снегоуборочная машина могла бы убрать всю улицу за 1 час, а другая за 45 минут. Начав работу одновременно, машины проработали вместе 20 минут, после чего первая сломалась. Через сколько минут вторая машина закончила работу?
5. Во время экспедиции геологи нашли несколько драгоценных камней (но не больше 1000). Известно, что 2/9 всех камней составляют алмазы, 4/11 – рубины, 1/7 – сапфиры, а остальные – изумруды. Сколько изумрудов найдено геологами?
6. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуется четыре красные амебы, наконец, если сливаются красная и синяя амеба, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?
7. Остап Бендер поставил новые покрышки на автомобиль «Антилопа Гну». Известно, что передние покрышки автомобиля выходят из строя через 25000 км, а задние - через 15000 км (спереди и сзади покрышки одинаковые, но задние изнашиваются сильнее). Через сколько километров Остап Бендер должен поменять эти покрышки местами, чтобы «Антилопа Гну» прошла максимально возможное расстояние? Чему равно это расстояние?
8. Куб покрасили со всех сторон и распилили на равные кубики. Оказалось, что кубиков, у которых покрашена ровно одна грань, столько же, сколько не покрашенных кубиков. На сколько кубиков распилили куб?

ОТВЕТЫ:

1. 720 способов
2. 2
3. 3 поленницы дров
4. 10 минут
5. 188 изумрудов
6. 33 синие амёбы
7. Через 9375 км. Можно проехать 18750 км
8. 8 или 512 кубиков

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
2.1 из 3	1.6 из 3	0.5 из 3	0.7 из 3	1.5 из 3	1.3 из 3	1.1 из 3	0.3 из 3

1. 24 сентября 1970 года автоматическая станция «Луна-16» доставила на Землю образцы лунного грунта (реголит). Анализ грунта выявил содержание различных веществ, в том числе, железо (Fe) в количестве 13,13 г и кремния (Si) в количестве 20,2 г, причем содержание кремния в грунте – 20%. Ответьте на два вопроса:

   1) Какова масса лунного грунта, который доставила «Луна-16»?

   2) Каков процент содержания железа в этом образце лунного грунта?

2. Квадрат с 3×3 ячейками содержит четные числа от 2 до 18. Переставьте числа в ячейках так, чтобы суммы чисел в любой горизонтали, вертикали и диагонали были бы одинаковы.

2	4	6
8	10	12
14	16	18

3. К числу 127 справа дописали такую цифру, что полученное четырехзначное число имеет ровно два простых делителя, оканчивающихся на дописанную цифру. Выпишите все такие цифры.

4. Изобразите многоугольник, который можно одним прямолинейным разрезом разделить на четыре равных треугольника. Покажите, как можно сделать разрез. (Вершины многоугольника должны располагаться в узлах сетки, но стороны и разрез не обязательно проводить по линиям сетки).

5. На перемене в какой-то момент в классе осталось несколько учеников: мальчиков и девочек. Если в класс войдут еще 10 мальчиков, то всего мальчиков станет вдвое больше, чем девочек. Сколько девочек должны выйти из класса, чтобы среди оставшихся школьников оказалось вдвое больше мальчиков, чем девочек?

6. Яблоко и апельсин вместе весят столько же, сколько груша и персик. Яблоко вместе с грушей весят меньше, чем апельсин с персиком, а груша вместе с апельсином весят меньше, чем яблоко с персиком. Какой из фруктов самый тяжелый?

7. Найдите наибольшее и наименьшее четырёхзначные числа, каждое из которых делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами. В ответе запишите сумму найденных чисел. Ответ обоснуйте.

8. Среди чисел 200, 201, 202, ... , 400 ровно два делятся на n. Какое наибольшее количество среди тех же чисел может делиться на n+1? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТЫ:

1. 101 г, 13% *Возможное решение:* 1) Заметим, что, зная процент содержания и массу одного из компонентов смеси можно найти массу всей смеси. То есть, 20% кремния составляет пятую часть всей массы, то есть масса доставленного грунта $5 \cdot 20{,}2 = 101$ грамм.

2) Зная массу всей смеси и процент содержания в ней некоторого компонента, можно найти массу этого компонента. То есть, 13,13 г от 101 г составляет величину $\frac{13{,}13}{101} \cdot 100\%$, или $\frac{1313}{101} = 13\%$.

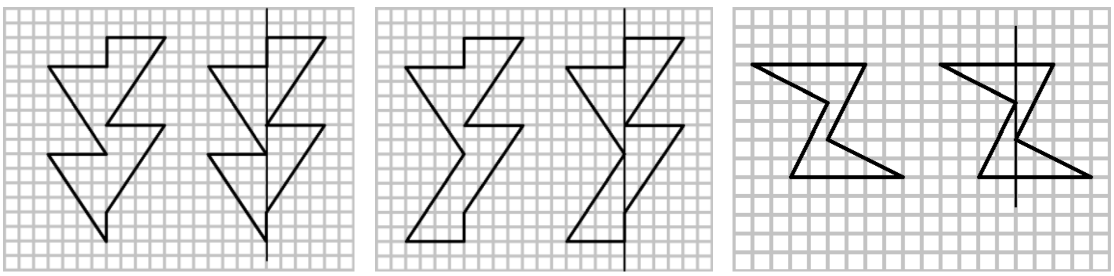
2.

12	2	16
14	10	6
4	18	8

Возможное решение: Рассмотрим сумму всех чисел в таблице: $2 + 4 + .. + 19 = 90$. Следовательно, после расположения их в строках квадрата сумма чисел в каждом столбце будет 30. Расположим числа, например, так: $\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 8 \\ 18 & 14 & 16 \end{matrix}$. То есть, в каждом столбце одинаковая сумма. Теперь будем перемещать цифры в столбцах для того, чтобы и в каждой строке была сумма 30. Например, так: $\begin{matrix} 2 & 12 & 16 \\ 10 & 14 & 6 \\ 18 & 4 & 8 \end{matrix}$. Теперь, перемещаем столбцы (меняем местами столбцы 1 и 2) так, чтобы по диагонали также была сумма 30. Итог: $\begin{matrix} 12 & 2 & 16 \\ 14 & 10 & 6 \\ 4 & 18 & 8 \end{matrix}$.

3. Цифра 1. *Возможное решение*: Переберём все возможные варианты цифр. Если последняя цифра числа – чётная, то само число является четным и одним из его делителей будет число 2, тогда по условию второе число заканчивается на 2 и произведение их – на 4. То есть, из чётных чисел искомых – нет. Ищем среди нечетных такие, что их произведение заканчивается на ту же цифру. Такие цифры только 1 и 5. Проверим каждое из них: а) Число 1271. Переберём двузначные простые числа, оканчивающиеся на 1. Таких пять: 11, 31, 41, 61, 71. Среди трёхзначных чисел искать не имеет смысла, так как второй делитель при этом будет не более, чем двузначное число, а все такие возможные мы уже перебрали. Из оставшихся пяти чисел числа 31 и 41 подходят по условию задачи. б) Число 1275 по свойствам делимости делится не только на 5, но и на 25 и 5×25=125 – противоречие. Замечание. Число 1 не является простым (у него только один делитель). Таким образом, единственное решение задачи – цифра 1.

4. Способов много. Например, несколько вариантов с прямоугольным треугольником:



5. 5 девочек. *Возможное решение*: Составим уравнения по условиям задачи. Пусть количество оставшихся в классе мальчиков – x, а количество девочек – y. Тогда, после прихода 10 мальчиков в класс, их количество в классе становится $(x + 10)$. По условию, их количество в 2 раза больше, чем девочек, то есть, $x + 10 = 2y$. Заметим, что $x = 2(y - 5)$, то есть, девочек в классе не менее 5. Теперь, после того, как z девочек выйдут из класса, их останется $(y - z)$. Это количество в 2 раза меньше, чем мальчиков, $2(y - z) = x$. Отсюда, получаем $2y - x = 2z$. Из первого уравнения можно получить такое же выражение, $2y - x = 10$. Таким образом, заключаем, что $2z = 10$, и окончательно, $z = 5$.

6. Персик. *Возможное решение*: см. № 8 на стр. 14

7. 10899. *Возможное решение*: Рассмотрим наибольшее из четырёхзначных чисел – 9999, наибольшее из четырёхзначных чисел с разными цифрами – 9876. Последнее не делится нацело на 7, остаток от деления – 6. Тогда, уменьшая на 6 единиц данное число, получим 9870. Аналогично, наименьшее из четырёхзначных чисел – 1000, наименьшее из четырёхзначных чисел с разными цифрами – 1023. Последнее не делится нацело на 7, остаток от деления – 1. Увеличивая на 6 единиц данное число, получим 1029.
Итого, сумма найденных чисел $9870 + 1029 = 10899$.

8. 3 числа. *Возможное решение*: Пусть два числа, удовлетворяющие условию задачи кратны числу n. Тогда вид этих чисел $n \cdot k$ и $n \cdot m$, где k и m – некоторые целые числа. Пусть $k < m$. Тогда, если числа k и m отличаются более, чем на единицу, то число $(nk + n)$ также находится в диапазоне от 200 до 400, что противоречит условию задачи. Следовательно, числа k и m – последовательные целые и для определённости $m = k + 1$. Рассмотрим отрезок числовой прямой, содержащий значения 200 и 400. На отрезке располагаются и два выбранных числа, nk и $n(k + 1)$. Очевидно, что расстояние между ними соответствует числу n и не более 200 (случай чисел 200 и 400) и не может быть меньше 67 (случай трёх чисел, грубая оценка). Соответствующими значениями k и $k + 1$ могут быть только два последовательных числа из набора $1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, для любого выбранного числа n $(67 < n < 200)$ не более трёх чисел располагаются на рассматриваемом отрезке числовой прямой. Очевидно, что это же верно и для числа $(n + 1)$.
Найдём случай, при котором выполнено условие задачи. Например, числу $n + 1 = 100$ соответствует ровно три числа (200, 300 и 400). Тогда, число $n = 99$ является искомым (числа $99 \cdot 3 = 297$ и $99 \cdot 4 = 396$).

7 класс

ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА (ШЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.4 из 2	0.5 из 2	1.1 из 2	1 из 2	0.8 из 3	0.5 из 2	0.4 из 3	1.2 из 2	1 из 2	0.5 из 2	0.2 из 2	0.6 из 3

1. Космический корабль от Земли до Луны летел со средней скоростью 500 км/мин, а обратно возвращался со скоростью 300 км/мин. Какова его средняя скорость?

2. Найдите последнюю цифру числа 1! + 2! + 3! + ... + 2015! (n! – произведение всех натуральных чисел от 1 до n)
3. Друг с другом последовательно соединены 5 зубчатых колёс. У первого 40 зубьев, у второго – 16, у третьего – 12, у четвёртого – 15, а у пятого зубчатого колеса 10 зубьев. Размеры зубьев одинаковы. Первое колесо совершило полный оборот. Сколько оборотов сделало пятое колесо?
4. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются.
5. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A.
6. Сложили числа 9; 99; 999; ...; 99...99 (20 девяток). Сколько единиц в записи получившейся суммы?
7. В Центре управления полетами (ЦУП) работают 100 сотрудников. Известно, что среди любых пяти сотрудников найдется, по крайней мере, один мужчина. Сколько мужчин работает в ЦУП? Укажите все варианты.
8. В забеге участвовал 41 спортсмен. Число спортсменов, прибежавших раньше Васи, в 4 раза меньше числа тех, кто прибежал позже него. Какое место занял Вася?
9. Есть 19 гирек массами 1 г, 2 г, ..., 19 г, из которых 9 железных, 9 бронзовых и одна золотая. Известно, что масса всех бронзовых гирек на 90 г меньше, чем масса всех железных. Найдите массу золотой гирьки.
10. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью на 40% меньшей, чем было запланировано. Сможет ли он добраться до пункта назначения вовремя, если увеличит свою скорость (по сравнению с запланированной)? Если да, во сколько раз ему нужно увеличить скорость?
11. Назовём число хорошим, если оно делится на 3, 7 или 11. Сколько хороших чисел в диапазоне от 1 до 1000?
12. В отряде космонавтов провели опрос. На вопрос: "Что Вы предпочитаете на десерт во время полета: коврижки или сладкие палочки?" большая часть ответила: "Коврижки", меньшая часть ответила: "Палочки", а один космонавт затруднился ответить. Среди любителей палочек 30% предпочитают палочки из айвы, а 70% – палочки из персиков. Среди любителей коврижек 55% предпочитают медовые, 40% – монастырские, а один затруднился ответить, какие именно коврижки он предпочитает. Сколько космонавтов было опрошено?

ОТВЕТЫ:

1. 375 км/мин
2. 3
3. 4 оборота
4. 60 чисел
5. 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31
6. 18 единиц
7. 96, 97, 98, 99, 100 мужчин
8. 9 место
9. 10 г
10. Да, сможет; в 3 раза
11. 480 хороших чисел

12. 31 космонавт *Возможное решение.* Один космонавт, затруднившийся ответить на вопрос о коврижке, составляет 5% от общего числа любителей коврижек. Значит, всего любителей коврижек – 20. Пусть палочки из айвы любит k космонавтов. Тогда всего любителей палочек – 10k/3, т.е. их число делится на 10. Поскольку оно по условию меньше 20, то оно равно 10, а всего был опрошен 20 + 10 + 1 = 31 космонавт.

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.7 из 4	2.4 из 4	0.8 из 3	1.8 из 5	1.8 из 5	0.6 из 4	1.5 из 4	1.6 из 3	1.6 из 4	1.4 из 3	2.8 из 5	1.5 из 4

1. Собаки Белка и Стрелка грызли одну косточку (с двух концов). Белка грызла кость вдвое медленнее, чем Стрелка, но начала грызть на минуту раньше, чем Стрелка. В итоге, оказалось, что кость досталась им поровну. За какое время Белка сгрызла бы кость в одиночку?

2. Для некоторого двузначного числа к нему справа и слева приписали цифру 2, после чего полученное число в 32 раза стало больше первоначального двузначного числа. Найти первоначальное двузначное число.

3. На глобусе проведены параллели и меридианы. Меридиан – это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель – это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью). На сколько частей разделена поверхность глобуса, если проведены 11 параллелей и 12 меридианов?

4. В комнате находятся 12 человек. Некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. "Здесь нет ни одного честного человека", – сказал первый. "Здесь не более одного честного человека", – сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый – что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?

5. Сколько существует шестизначных целых положительных чисел, делящихся на 5?

6. В отряде космонавтов есть мужчины и женщины, но мужчин-космонавтов больше 94% численности отряда. Какое минимальное число космонавтов может быть в отряде?

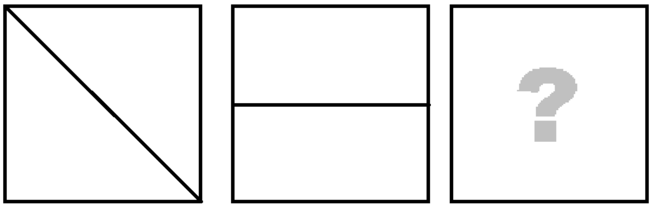
7. Допишите к числу 523 три цифры справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9. Напишите полученное шестизначное число.

8. Какое число нужно вычесть из числителя дроби 153/147 и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить 1/5?

9. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например, 2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/x. Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

10. Математический ребус: Определить трехзначное число ABB, произведение цифр которого – двузначное число AC, произведение цифр этого числа равно C (цифры в записи числа заменены буквами; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

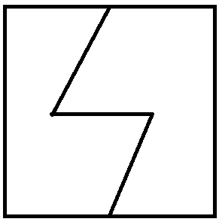
11. Известно, что легко разрезать квадрат на два равных треугольника и на два равных четырехугольника. Как разрезать квадрат на два равных шестиугольника?



12. Некоторая область карты звездного неба размера 4×4 содержит 15 звезд. Всегда ли найдется в этой области квадрат размером 1×1, не содержащий ни одной звезды? Ответ обосновать.

ОТВЕТЫ:

1. 4 минуты
2. 91
3. На 144 части
4. 6 человек
5. 180000 чисел
6. 17 космонавтов
7. 523656
8. 103
9. 365
10. 144
11. Способов много. Например, так



12. Да, всегда найдется. *Возможное обоснование:* Разделим область 4×4 на 16 квадратов размера 1×1. 15 звезд располагаются так, что занимают не более 15 клеток размера 1×1 из 16 клеток. Следовательно, найдется хотя бы одна клетка, не содержащая ни одной звезды.

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА (МЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2 из 1	0.3 из 2	0.5 из 2	0.4 из 2	0.4 из 2	0.8 из 2	0.3 из 2	0.1 из 3	0.1 из 3	0.5 из 3

1. Из Гагарино в Титово вышел путник. Одновременно с ним из Титово в Гагарино вышел второй путник. Они шли всю дорогу с одной и той же скоростью каждый, но скорости у них были разными. В момент встречи первому оставалось пройти еще 16 часов, а второму еще 9. Через сколько часов после выхода они встретились?

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 20. Какому максимальному числу может равняться их произведение?

3. 42 студента сдавали вступительные экзамены. Проходной балл составил 70. Средний балл всех 42 студентов составил 75,5, средний балл всех поступивших студентов составил 81, а средний балл всех не поступивших студентов составил 60. Сколько студентов поступили?

4. Человек шел со скоростью 3 км/час вдоль трамвайной линии и считал трамваи. И те, которые двигались ему навстречу, и те, которые обгоняли его. Человек насчитал 40 трамваев, обогнавших его, и 60 встречных. Предположим, что трамваи движутся равномерно, с одинаковыми интервалами между собой (в задаче это вполне возможно). Какова средняя скорость движения трамваев?

5. Два кашалота плыли рядом по прямой со скоростью 6 км/час. В 9 часов 15 минут один из них поплыл быстрее со скоростью 10 км/час, затем через некоторое время внезапно развернулся и поплыл назад с той же большей скоростью. Снова кашалоты встретились в 10^{00}. Когда первый кашалот повернул обратно?

6. Ученики утром приходят в школу группами по несколько человек. Первым пришел Петя (его можно считать первой группой из одного человека). Во второй группе пришедших было на 2 человека больше, чем в первой. В третьей группе было на 2 человека больше, чем во второй и т.д. Всего в школу пришло 576 учеников. Сколько групп учеников было?

7. Тимур выкидывал игральный кубик (кубик, на сторонах которого написаны числа от 1 до 6) 10 раз. Произведение всех десяти выпавших чисел равно 7776. Чему равна самая большая возможная сумма этих 10 чисел?

8. В заседании Государственной Думы принимали участие две партии. Перед началом заседания каждый из присутствующих пожал руку всем членам своей партии. И всего было сделано 1486 рукопожатий. После заседания каждый из участников пожал руку каждому члену другой партии. И всего было сделано 1440 рукопожатий. По сколько человек из каждой партии принимало участие в заседании Госдумы?

9. Найдите наименьшее делящееся на 11 натуральное число с суммой цифр 2015.

10. Кот может съесть гирлянду сосисок за 37 минут, а пес – за 23 минут. Они начали есть с двух концов, и когда съели всю, то посчитали, сколько процентов от всей гирлянды досталось каждому. Оказалось, что коту досталось на 10% гирлянды больше, чем псу. Кто из них начал есть раньше и на сколько минут? Запиши решение задачи с объяснением.

ОТВЕТЫ:

1. 12 часов
2. 1458
3. 31 студент
4. 15 км/ч
5. В 9 часов 51 минуту
6. 24 группы
7. 35
8. 45 и 32 человека
9. 5399…9 (223 девятки)
10. 10 минут. *Возможное решение*. Очевидно, что кот съел 55% всей гирлянды, а пёс – 45%. Кот потратит на свою часть сосисок 37×0,55=20,35 минут, а пёс – 23×0,45=10,35 минут. Следовательно, кот начал есть гирлянду раньше на 10 минут.

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.4 из 4	0.9 из 3	0.5 из 3	0.9 из 3	1.2 из 3	0.6 из 3	0.2 из 3	0.6 из 2	0.9 из 3	0.5 из 3

1. Транспортировка космического корабля для запуска от ангара к стартовой площадке происходит по рельсам (пара рельс). Специальные типы рельсов изготавливаются под заказ только с длинами 7 и 12 метров. Сколько разных способов составить (выложить) путь длиной в 100 метров до стартовой площадки из двух типов рельс, если делить рельсы на части нельзя?
2. Поставь вместо звездочек такие цифры, чтобы число 32∗35717∗ делилось на 45. В ответе запишите исходное число.
3. Есть две большие ёмкости с соляным раствором 10% и 15%. Есть также ёмкости 3, 4 и 5 литров. Как с помощью переливаний получить 1 литр 12% раствора соли?
4. Взяли четыре натуральных числа, сумма которых равна 111. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

   Выпиши пример, подтверждающий твой ответ.
5. Известно, что из восьми монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на двухчашечных весах без стрелок?
6. Докажите, что сумма любых двадцати последовательных натуральных чисел не делится на 4.
7. Как с помощью только линейки и циркуля разделить прямоугольник (не квадрат) одной прямой линией так, чтобы из двух полученных частей можно было составить ромб?
8. Лифт десятиэтажного дома, двигаясь равномерно, поднимается на 5-ый этаж за 0,5 минуты. За какое время лифт поднимется на 10-ый этаж?
9. Найти наименьшее натуральное число, суммой цифр которого является число 2017.
10. Клетки шахматной доски 8 × 8 раскрашены обычным образом в белый и черный цвета. С доской проводят следующие действия: за каждый шаг разрешается поменять местами два любых горизонтальных ряда или два любых вертикальных. Можно ли за несколько шагов сделать половину шахматной доски белой, а вторую половину – чёрной (например, левая и правая половины)? Ответ обосновать.

ОТВЕТЫ:

1. Наиболее полный ответ - 210^2 способов. Возможный ответ: 210.

   Возможное решение: 1) Сначала решим задачу о возможных наборах двух типов рельс, из которых будет составлен путь в 100м. Для этого, допустим, что x и y – необходимое количество рельсов длиной 7 и 12 метров соответственно. Тогда, составим уравнение в целых числах: $7x + 12y = 100$, для решения которого сначала воспользуемся свойством кратности. Два слагаемых из трёх кратны 4, поэтому и третье $7x \vdots 4$, откуда следует $x \vdots 4$, где для удобства обозначим $x = 4x_1$. Подставляя обратно в уравнение и разделив на 4, получим окончательно

$7x_1 + 3y = 25$. Тут проще перебрать возможные целые решения для x_1 (0, 1, 2, 3). Подойдет только вариант $x_1 = 1$, откуда решением уравнения является пара $x = 4$, $y = 6$.
Итого, для устройства пути (пара рельс) потребуется комплект из 8-ми 7-метровых и 12-ти 12-метровых рельс.

2) Теперь про укладку путей (два параллельных отрезка по 100 метров). Рассмотрим укладку одного отрезка в 100 м: необходимо расположить четыре 7-метровых и шесть 12-метровых рельса, укладывая их в разных комбинациях. Расположим сначала 7-метровые: четыре рельса на 10 возможных мест – количество комбинаций, соответствующее количеству сочетаний из 10 по 4, итого $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = 210$ комбинаций. На оставшиеся места укладываем 12-метровые рельсы единственным способом. Итого, составить отрезок из 10 рельсов двух разных длин в нашем случае можно 210 способами (примечание: можно сначала укладывать 12-метровые рельсы, количество комбинаций также будет 210).

3) Так как второй отрезок (параллельный, 100 м) можно укладывать независимо от первого, то количество всех возможных комбинаций по правилу произведения равно $210 \cdot 210 = 210^2$.

2. 323357175 и 328357170. Варианты цифр вместо звёздочек – 3 и 5, 8 и 0

3. Набрать 10% раствора в 3-х литровую ёмкость и перелить в 5-ти литровую. Затем долить до полной 5-литровую 15% раствора (например, с помощью 3-х литровой). Затем, перелить из 5-ти литровой в 4-х литровую. Оставшееся в 5-ти литровой ёмкости – 1 литр 12% соляного раствора.

Возможное решение: 1) Сначала решить задачу о смесях: найти отношение количества 10% и 15% растворов для получения 12%. Например: x и y – количества (в литрах) растворов для получения смеси 12%. Тогда уравнение $\frac{0,1x+0,15y}{x+y} = 0,12$ может быть записано в виде $0,02x = 0,03y$, откуда нужное соотношение объёмов для смешивания – $3:2$.

2) Остаётся смешать, например, 3л 10%-го раствора и 2л 15%-го раствора в 5-литровой ёмкости и отмерить 1 литр полученного 12% раствора. Например, так: набрать 10% раствора в 3-х литровую ёмкость и перелить в 5-ти литровую. Затем долить до полной 5-литровую 15% раствора (например, с помощью 3-х литровой). Затем, перелить из 5-ти литровой в 4-х литровую. Оставшееся в 5-ти литровой ёмкости – 1 литр 12% соляного раствора.

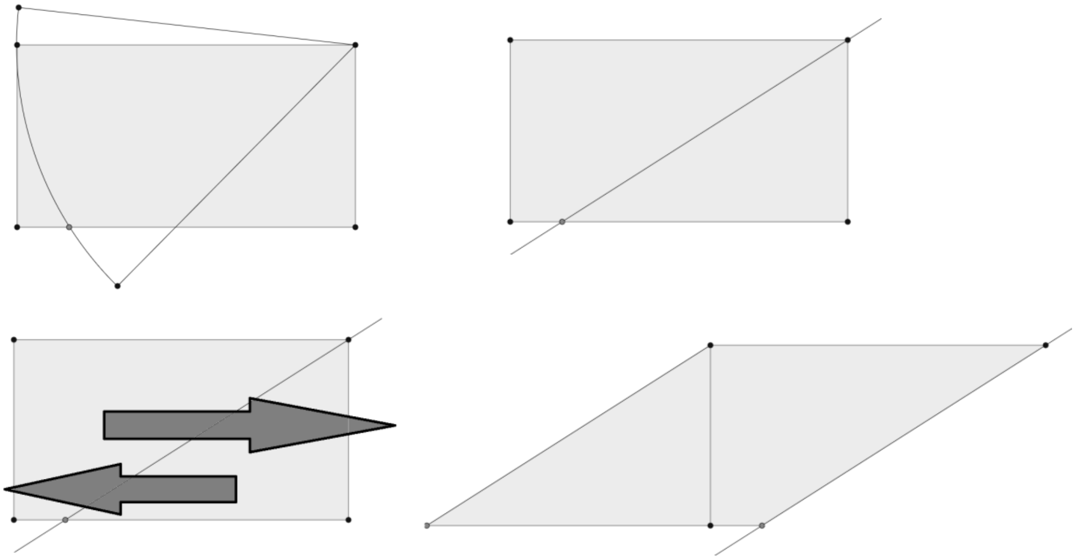
4. 3. Четыре числа, кратные 3 и в сумме дающие 111. *Возможное решение*: см. № 9 на стр. 21

5. *Возможное решение*: см. № 6 на стр. 21

6. *Возможное решение*: Обозначим данные числа как $n, n+1, n+2, \ldots, n+19$. Их сумма есть число $20n + (1+2+3+\ldots+19)$ = $20n + ((1+19)+(2+18)+(3+17)+\ldots+(9+11)+10)$ = $20n + 9\cdot 20 + 10 = 20(n+9) + 10$, где первое слагаемое делится нацело на 4, а второе, 10 – не делится. Следовательно, по свойству делимости, вся сумма из двадцати чисел не делится на 4. Что и требовалось доказать.

7. *Возможное решение*: Графическое решение, связанное с построением с помощью циркуля и линейки. 1) Для начала выясним некоторые свойства разреза. Ромб – фигура с четырьмя равными сторонами, потому разрез и будет, в итоге, стороной ромба или линией склейки фигуры (но склейка только с частью более длинной стороны). Рассмотрим первый вариант. Склеивать куски будем по малой стороне прямоугольника (эта линия будет короче длины стороны будущего ромба). Тогда,

длина стороны ромба может быть равной только длине большей стороны прямоугольника. То есть, длина разреза должна быть равной длине большей стороны. 2) Один из способов построения: проведём линию разреза через одну из вершин прямоугольника, равную по длине большей стороне (это можно сделать с помощью циркуля, поставив иглу в одну из вершин и взяв раствором расстояние большей стороны, отметить точку на противоположной большей стороне – это и будет вторая точка разреза).



8. 1,125 минуты ($9/8$ минуты) или 67,5 секунды.

Возможное решение: Заметим, что при подъёме на 5-ый этаж лифт проходит 4 этажа, то есть один этаж за $1/8$ минуты, а при подъёме на 10-ый этаж проходит 9 этажей – за $9 \cdot 1/8 = 9/8$ минуты.

9. 1999…99, где девяток в составе числа ровно 224 штуки.

Возможное решение: см. № 7 на стр. 21

10. Нет, нельзя.

Возможное решение: Доказательство от противного или, используя метод инвариантов. При перестановке имеет смысл менять только разные ряды, которые первоначально соответствовали рядам разной чётности. Однако, при любой перестановке в каждом ряду будет 4 белых и 4 чёрных клетки (это инвариант задачи). Это означает, что в окончательном варианте перестановок любой ряд (вертикальный или горизонтальный) будет иметь ровно 4 белых и 4 чёрных клетки, что противоречит требуемому по условию варианту раскраски шахматной доски.

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА (РЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
0.8 из 2	2.2 из 4	1.8 из 4	0.4 из 4	0.8 из 4	2.2 из 6	1.7 из 6	0.1 из 6

1. Юрий Алексеевич придумал натуральное число, которое имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом двоек на 19 больше, чем четверок. Найдите остаток от деления этого числа на 9.

2. Трое игроков играют в настольный теннис, причем тот, кто не принимает участия в данной партии, в следующей игре играет с победителем. В результате первый игрок сыграл 10 партий, второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

3. В ряд выписаны в порядке возрастания числа, делящиеся на 9: 9, 18, 27, 36, ... Под каждым числом этого ряда записана его сумма цифр. На каком месте во втором ряду впервые встретится число 81?

4. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскуток граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков черного цвета?

5. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четные?

6. Восстановите числа в примере СТАЯ + ВОРОН = ЛЕТЕЛА, если разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы – одинаковые цифры, и число СТО делится на 139.

7. Ежедневно в полдень из Москвы в Астрахань и из Астрахани в Москву выходит рейсовый теплоход. Теплоход, вышедший из Москвы, идет до Астрахани ровно четверо суток, затем двое суток стоит, и в полдень, через двое суток после своего прибытия в Астрахань, отправляется в Москву. Теплоход, вышедший из Астрахани, идет до Москвы ровно пять суток и, после двухсуточного отдыха в Москве, отправляется в Астрахань. Какое наименьшее количество теплоходов должно работать на линии Москва – Астрахань – Москва при описанных условиях движения?

8. Саша и Андрей играют в одну карточную игру. У Саши есть колода из 52 карт, и он вытаскивает по очереди 4 произвольные карты из этой колоды. Сколько есть способов выдать Андрею карты так, чтобы среди них были три одинакового достоинства?

ОТВЕТЫ:

1. 2.
2. 11 партий
3. На 111111111 месте
4. 12 лоскутков черного цвета
5. 1996 чисел
6. 8375+94642=103017 или 8372+94645=103017
7. 13 теплоходов
8. 60216 способов

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
1 из 3	1.2 из 3	0.2 из 3	0.2 из 3	0.4 из 3	0.3 из 3	0.2 из 3	0.5 из 3

1. Докажите, что число 29^{15} не более чем 23-значное (состоит не более чем из 23 цифр).

2. Докажите, что число $2017^2 + 2^{2017}$ взаимно простое с числом 2017 (оба не имеют общих делителей, кроме 1).

3. В деревенской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

4. Можно ли расставить на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых шести нашлись 3, лежащие на одной прямой. Если можно, приведите пример расположения.

5. Петя выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова ИНТЕГРИРОВАНИЕ, а Вася сделал то же самое со словом СУПЕРКОМПЬЮТЕР. У кого получилось больше разных слов? Ответ обоснуйте.

6. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры? Ответ обоснуйте.

7. Докажите, что доску размером 10×10 клеток нельзя разрезать на фигурки в форме буквы Т, состоящие из четырех клеток.

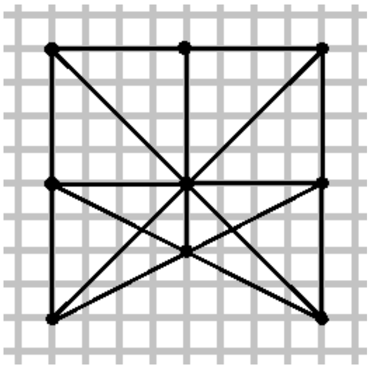
8. В вершинах кубика написали числа от 1 до 8, а на каждом ребре – модуль разности чисел, стоящих в его концах. Какое наименьшее количество различных чисел может быть написано на ребрах? Ответ обоснуйте.

ОТВЕТЫ:

1. *Возможное решение*: Например, достаточно показать, что
$29^{15} < 30^{15} = 3 \cdot 3^{14} \cdot 10^{15} = 3 \cdot 9^{7} \cdot 10^{15} < 3 \cdot 10^{15+7} < 10^{23}$.

2. *Возможное решение*: Доказательство от противного. Пусть оба числа имеют общие делители. Число 2017^2, очевидно имеет с числом 2017 общий делитель. По свойству делимости суммы двух чисел, если первое имеет данный делитель с числом 2017, то его имеет и второе число. Но число 2017 – нечетное, и все его делители суть нечетные числа, а число 2^{2017} не имеет других делителей, кроме степеней числа 2, то есть все его делители – четные числа. Противоречие, так как нет делителей одинаковой чётности. Следовательно, утверждение доказано. Могут быть и другие идеи доказательства (кратность, эквивалентность по модулю, перебор делителей).

3. *Возможное решение*: Возьмём любого ученика, у которого есть 2 деда – обозначим дедов как A и B. Теперь сгруппируем всех учеников в 3 группы: 1) все ученики, у которых дедами являются A и B (оба), 2) ученики, у которых один из дедов A, а второй не B, 3) ученики, у которых один из дедов B, а второй не A. Если из групп 2 и 3 только одна непустая, то у всех 20 учеников есть один общий дед. Если группы 2 и 3 обе непустые, то у них должен быть общий дед – обозначим его как C. Если предположить, что имеется четвёртый дед (в группах 2 и 3), то обязательно найдутся ученики (из разных групп), у которых нет общего деда. Противоречие. Таким образом, в этом случае дедов не более 3-х. Применим принцип Дирихле. Пусть, например, на 23 февраля каждый ученик напишет поздравление каждому из своих дедов. Тогда, всего поздравлений $2 \cdot 20 = 40$ штук (кролики) и предназначаются они трём дедам (клетки). Тогда, по принципу Дирихле, имеем: $40 = 3 \cdot 13 + 1$, откуда верно утверждение, что найдётся хотя бы один дед, у которого не менее 14 поздравлений от его внуков и внучек. Возможно доказательство с использованием графов.



4. Можно. Вариантов много, например: см. рисунок.

5. У Васи. *Возможное решение*: Заметим, что оба слова, ИНТЕГРИРОВАНИЕ и СУПЕРКОМПЬЮТЕР имеют одинаковое количество символов. Поэтому, вычёркивая по две буквы из каждого слова, количество вариантов вычёркивания в обоих случаях одинаково, если считать, что все получающиеся слова различны. Также заметим, что одинаковые слова могут получаться при вычеркивании одной и той же пары букв, хотя бы одна из которых стоит на разных местах в исходном слове. В слове СУПЕРКОМПЬЮТЕР только три повторяющихся буквы (П, Е и Р), и стоят они несимметрично, а в слове ИНТЕГРИРОВАНИЕ есть симметричное вхождение букв И и Р (интегРИРование), при вычёркивании которых в сочетании РИ и ИР, получаем одно и то же слово ИНТЕГРОВАНИЕ. Следовательно, у Пети выписано, как минимум, на одно слово меньше, чем у Васи.

6. 8455680. *Возможное решение*:. Количество всех семизначных чисел, наименьшее из которых есть 1000000, а максимальное – 9999999, находится как $9999999 - 1000000 + 1 = 9000000 = 9 \cdot 10^6$. Это количество состоит из суммы всех семизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры и чисел, в записи которых все цифры различны. Найдём количество последних. Рассмотрим такое число поразрядно: на первом месте (старший разряд) стоит какая-либо цифра, кроме 0, на втором – одна из 9 возможных, отличная от первой. На третьем месте – одна из 8 возможных, отличная от первых двух, и так далее. По правилу произведения, количество таких чисел $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, откуда количество чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры, есть $9 \cdot 10^6 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Вычисляя, получим 8455680.

7. *Возможное решение*: Используем шахматную раскраску доски для доказательства. Заметим, что при любом расположении фигуры Т на доске она занимает либо одну, либо три чёрные клетки. Так как по условию необходимо разрезать всю доску на фигурки, то количество их будет определяться числом $\frac{10 \cdot 10}{4} = 25$. Так как каждая содержит нечётное число чёрных клеток, то всего черных клеток на 25 фигурках будет также нечётное число, а это противоречие, так как при шахматной раскраске количество чёрных клеток на всей доске $\frac{100}{2} = 50$ – чётное количество. Следовательно, такое разрезание доски невозможно.

8. 3 числа. *Возможное решение*: Каждая вершина куба соединена ребрами с тремя другими вершинами, поэтому разных модулей разностей между любыми четырьмя числами не меньше двух. Если рассмотреть вершины с цифрами 1 или 8, то для них количество разностей равно трём. Покажем, что три и есть искомое число. Подберём пример с количеством разных модулей разностей. Рассмотрим один квадрат, в вершинах которого находятся числа $1, 3, 5, 7$, расположенных по часовой стрелке. Второй квадрат (равный первому) – аналогично с числами $2, 4, 6, 8$. Соединим теперь попарно вершины двух квадратов рёбрами, длина которых равна стороне квадратов в следующем порядке: $1 — 2$, $3 — 4$, $5 — 6$, $7 — 8$. Заметим, что в таком случае разных модулей разности на всех рёбрах будет три: $1, 2$ и 6. Есть и другие способы расположения чисел в вершинах кубика, подтверждающие ответ.

8 класс

ЗАДАНИЯ ШКОЛЬНОГО ЭТАПА (ШЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.5 из 2	0.7 из 2	1.4 из 2	0.9 из 2	1 из 2	0.8 из 2	0.8 из 2	0.6 из 2	0.3 из 2	0.5 из 2	0.4 из 2	0.2 из 4

1. Космический шаттл от Земли до Марса летел со средней скоростью 600 км/мин, а обратно возвращался со скоростью 400 км/мин. Какова его средняя скорость?
2. Прямая, проходящая через вершину A и точку E на стороне BC прямоугольника $ABCD$, делит прямоугольник на две части: треугольник ABE и трапецию $AECD$. Известно, что $S_{ABE} : S_{AECD} = 1/7$. Найдите $BE : EC$.
3. Над озёрами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и ещё полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озёрах. Сколько было гусей?
4. Сколько существует пятизначных чисел, десятичная запись которых начинается с 1 и содержит ровно две одинаковые цифры?
5. Юля задумала четыре целых числа, а затем нашла все их попарные суммы. Пять из них оказались равны 70, 110, 120, 180 и 230. Чему равна шестая сумма?
6. Сколькими способами можно расставить числа 1 и -1 во всех клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма всех чисел в каждой строке и в каждом столбце была равна 0?
7. Радиоуправляемая машинка выезжает из некоторой точки. Она движется по прямой, а по команде может поворачивать налево ровно на 17° (относительно прежнего направления движения). Какое наименьшее число команд необходимо, чтобы машинка вновь прошла через точку старта?
8. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби $19/(n+21)$, $20/(n+22)$, $21/(n+23)$, ..., $91/(n+93)$ несократимы.
9. Все четырехзначные числа, цифры которых различны и стоят в порядке возрастания, выписали друг за другом – снова в порядке возрастания. Какое число стоит на 99-м месте?
10. Из класса головоломку решили не все, но не менее 85% учеников. Найти наименьшее количество учеников в классе.
11. Найдите 2015-й член последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...
12. Пять работников, живущие в разных городах, получили зарплату, одни больше, другие меньше: 14300, 23300, 31300, 41000 и 41300 рублей. Каждый из них может послать деньги другому по почте. При этом почта берёт за перевод 10% от пересылаемой суммы денег (чтобы пришло 100 рублей, надо уплатить 110 рублей). Они хотят переслать деньги так, чтобы у всех оказалось поровну количество денег, а почта получила как можно меньше. Сколько будет денег у каждого при самом экономном способе пересылки?

ОТВЕТЫ:

1. 480 км/мин
2. 1:3
3. 127 гусей
4. 5040 чисел
5. 190
6. 90 способами
7. 11 команд
8. 95
9. 3478
10. 7 учеников
11. 35
12. 29800 рублей

Возможное решение: Если бы почта не брала денег за перевод, то после пересылки у каждого было бы 151200 : 5 = 30240 рубля. Пусть все получат по x рублей, ясно, что $23300 < x < 31300$. Значит, трое самых «богатых» должны послать деньги двоим самым «бедным». Итак, получено по почте $(x - 14300) + (x - 23300) = 2x - 27600$ рубля и почта получит 10% от этой суммы. Получим уравнение: $151200 - 0{,}1(2x - 27600) = 5x$, решая которое, найдем $x = 29800$ (рублей)

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.3 из 3	1.4 из 3	1.7 из 4	1.1 из 3	2 из 5	1.2 из 4	2.5 из 4	0.5 из 4	2 из 5	1.3 из 3	0.6 из 5	1.2 из 5

1. Метеорит, вертикально падающий на Землю, был замечен за 200 км до входа в атмосферу. Средняя скорость его в безвоздушном пространстве 40 км в секунду, а при входе в атмосферу средняя скорость уменьшается и составляет 10 км в секунду. Какова средняя скорость метеорита за время наблюдения до момента его падения на Землю? Высоту атмосферы Земли принять за 100 км (линия Кармана).
2. Биссектрисы смежных углов A и B параллелограмма ABCD пересекают стороны BC и AD в точках M и N соответственно. Найдите периметр параллелограмма, если MC = 3 м и AN = 8 м.
3. Собаки Белка и Стрелка грызли одну косточку (с двух концов). Белка грызла кость вдвое медленнее, чем Стрелка, но начала грызть на минуту раньше, чем Стрелка. В итоге, оказалось, что кость досталась им поровну. За какое время Белка сгрызла бы кость в одиночку?
4. На глобусе проведены параллели и меридианы. Меридиан – это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель – это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью). На сколько частей разделена поверхность глобуса, если проведены 17 параллелей и 24 меридиана?
5. В группе находятся 12 человек. Некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека», – сказал первый. «Здесь не более одного честного человека», – сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый – что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в группе на самом деле?

6. В созвездии Треугольника три звезды образуют треугольник ABC. Расстояние AC равно 3,14 парсек, расстояние BC равно 0,67 парсек. Перечисли через запятую возможные расстояния между звездами A и B, если известно, что эта величина выражается целым числом парсек. (1 парсек = 3,26 световых года)

7. Для некоторого двузначного числа к нему справа и слева приписали цифру 2, после чего полученное число в 32 раза стало больше первоначального двузначного числа. Найти первоначальное двузначное число.

8. Два космических корабля курсируют между двумя планетами звездной системы. Достигнув планеты, они сразу же отправляются обратно. Корабли стартовали с разных планет одновременно и первый раз встретились в пути в 7 а.е. (астрономических единицах) от одной из планет, а во второй раз – в 4 а.е. от другой планеты. Найти расстояние между этими планетами в астрономических единицах. (За 1 а.е. принимают расстояние от Земли до Солнца, это примерно 150 млн. км)

9. У марсианина на руке 4 пальца. Как-то на закате солнца сел он посчитать: первый – мизинец, второй – безымянный, третий – указательный, четвертый – большой, пятый – снова указательный, шестой – безымянный, седьмой – мизинец, восьмой – безымянный и т.д. Какой палец будет по счету 2017-м? Ответ обосновать.

10. Решите задачу: «То» да «это», да половина «того» да «этого» – сколько это будет процентов от трёх четвертей «того» да «этого»?

11. Найдите остаток от деления числа 3^{2016} на 7.

12. Могут ли быть неравными два треугольника, у которых есть одна равная сторона и по два каких-то равных угла? Ответ обосновать.

ОТВЕТЫ:

1. 20 км/с
2. 38 м
3. 4 минуты
4. На 432 части
5. 6 человек
6. 3 парсека
7. 91
8. 17 а.е.
9. Мизинец

Возможное обоснование:

Рассмотрим распределение номеров по пальцам: мизинец – номера 1-7-13-19-..., безымянный – 2-6-8-12-14-18-..., указательный – 3-5-9-11-15-17-..., большой – остальные четные номера. Заметим, что нечетные номера распределены на мизинец и указательный палец. Осталось найти закономерность: у мизинца это все номера, остаток от деления на 6 которых дают число 1 – такое же, как и у числа 2017.

10. 200%

11. 1 *Возможное обоснование*: Достаточно рассмотреть небольшие степени числа 3 и найти остатки от деления на 7, например, $3^2=9$ при делении на 7 дает остаток 2, тогда по свойству остатков от произведения чисел остаток от 3^{2016} при делении на 7 такой же, как и у числа 2^{1008}. У числа $2^3=8$ остаток от деления на 7 равен 1. Тогда из-за кратности трем степени 1008 остаток от деления 2^{1008} на 7 есть 1.

12. Да, могут *Возможное обоснование*: Свойство таких треугольников таково, что три угла одного треугольника равны трем углам другого. Достаточно теперь выбрать у первого треугольника равную сторону и углы при этой стороне, а в другом треугольнике при равной стороне только один из равных данных углов – второй напротив равной стороны. Например, это верно для прямоугольного египетского треугольника с катетами 3 и 4 и гипотенузой, равной 5, и прямоугольного египетского треугольника с гипотенузой 4 и катетами 12/5 и 16/5.

ЗАДАНИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА (МЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.3 из 1	0.5 из 2	0.3 из 2	0.6 из 2	1.3 из 2	1.1 из 2	0.3 из 2	0.5 из 3	0.4 из 3	0.3 из 3

1. Герман Степанович загадал число больше 40 и меньше 90. Это простое число. Обе цифры этого числа тоже являются простыми числами. Если вычесть цифру единиц из цифры десятков, то получится число, не равное двум. Что за число загадал Герман Степанович?

2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен одной из медиан. Какой угол образует эта медиана со вторым катетом?

3. Найдите наибольшее натуральное число, состоящее из различных цифр, которое делится на каждую из своих цифр.

4. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если бы количество кошельков было на 1% меньше, а денег в каждом кошельке – на копейку больше, то общая сумма денег была бы меньше. А если бы, наоборот, количество кошельков было больше на 1%, а денег в каждом кошельке – на копейку меньше, то общая сумма денег также была бы меньше. Во сколько раз увеличится общая сумма денег, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелек добавить по рублю?

5. У Пети при умножении натурального числа N на 3 получилось число, сумма цифр которого равна N. Найдите наименьшее возможное значение N.

6. Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов команда получала четыре очка, за ничью – два очка и за поражение – одно. Сумма очков, набранных обеими командами, оказалась равна 46. Сколько было ничьих?

7. В сентябре 1968 года советский космический аппарат «Зонд-5» с живыми существами на борту (черепахи, плодовые мухи, черви, растения, семена, бактерии) впервые вернулся на Землю после облета Луны, а первая высадка человека на Луну (Н. Армстронг) состоялась в июле 1969 года в рамках американской лунной экспедиции корабля «Аполлон-11», доставившего на Землю, в том числе и пробы лунного грунта. Найдите предпоследнюю цифру в десятичной записи числа

$$S = 1969^{1968} + 1969^{1969}.$$

8. У Клима были монеты достоинством в 1 рубль и 1 копейку, причем копеек было меньше, чем на рубль. Покупая продукты, Клим потратил половину всей суммы. После этого у него снова оказались только рубли и копейки, причем копеек оказалось столько, сколько вначале было рублей, а рублей оказалось вдвое меньше, чем вначале было копеек. Сколько денег было у Клима первоначально?

9. Назовем натуральное число замечательным, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

10. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй – через 10 минут после первого, третий – через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 минут – первый. Через сколько минут после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

ОТВЕТЫ:

1. 73

2. 30°

3. 9867312

4. в 2 раза

5. 9

6. 4 ничьи

7. 7

8. 99 рублей и 98 копеек

9. 5391

10. Через 200 минут

Возможное решение: Пусть v_1, v_2 и v_3 – скорости первого, второго и третьего автомобилей соответственно (выраженные, например, в километрах в минуту). Используя скорости сближения автомобилей, составим систему уравнений и преобразуем ее: $\begin{cases}(v_3 - v_2)\cdot 30 = v_2 \cdot 20\\ (v_3 - v_1)\cdot 40 = v_1 \cdot 30\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3v_3 = 5v_2\\ 4v_3 = 7v_1\end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{21}{20}.$$

Пусть искомое время равно t (минут), тогда $(v_2 - v_1)t = v_1 \cdot 10 \Leftrightarrow \frac{10}{t} = \frac{v_2}{v_1} - 1$.

С учетом найденного отношения скоростей, получим, что t = 200.

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.6 из 3	1 из 3	0.2 из 3	0.8 из 3	1.3 из 3	1 из 3	0.2 из 4	0.4 из 3	0.2 из 4	0.5 из 3

1. Докажите, что число $2017^{2016} + 2016^{2017}$ взаимно простое как с числом 2017, так и с 2016 (не имеют общих делителей, кроме 1).

2. На поле размером 8 × 8 для игры «Морской бой» удалили одну угловую клетку. Можно ли расположить на такой доске 21 трехпалубный корабль (корабли размером 3×1 или 1×3), если по правилам можно ставить корабли рядом? Ответ обосновать.

3. Натуральные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$, в количестве 101 штуки таковы, что сумма их равна числу 2016. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель? Ответ обосновать.

4. Есть две большие ёмкости с соляным раствором 10% и 15%. Есть также ёмкости 3, 4 и 5 литров. Как с помощью переливаний получить 1 литр 12% раствора соли?

5. Найти наименьшее натуральное число, суммой цифр которого является число 2017.

6. В классе учится 30 человек. Во время написания диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а все остальные – или меньше, или не сделали ни одной. Докажите, что в классе есть по крайней мере три ученика, сделавших одно и то же число ошибок.

7. Докажите, что не найдется ни одной пары натуральных x и y, удовлетворяющих уравнению:
$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y + 2 = 2017.$$

8. Даны отрезки длиной 1, 2, 3 и 4 метра. Используя отрезки как стороны, можно составлять треугольники (равнобедренные и равносторонние в том числе). Сколько разных треугольников можно составить, если стороны нельзя составлять из нескольких отрезков?

9. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD (точка D лежит на стороне AB) и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на стороне AC). Доказать, что $CE=2AD$.

10. Клетки шахматной доски 8 × 8 раскрашены обычным образом в белый и черный цвета. С доской проводят следующие действия: за каждый шаг разрешается поменять местами два любых горизонтальных ряда или два любых вертикальных. Можно ли за несколько шагов сделать половину шахматной доски белой, а вторую половину – чёрной (например, левая и правая половины)? Ответ обосновать.

ОТВЕТЫ:

1. *Возможное решение*: От противного: пусть какая-то пара не является взаимно простыми, тогда, если число имеет общие делители с одним из слагаемых, то должно иметь хотя бы один из делителей и с другим слагаемым. Но числа 2016 и 2017 взаимно простые, потому не имеют общих делителей, кроме 1, ни 2017^{2016} с 2016, ни 2016^{2017} с 2017.

2. Нельзя. *Возможное решение*: Заметим, что количество клеток урезанного поля – 63 и если бы была возможность поставить 21 трехпалубный корабль, то были бы заняты все клетки поля. Однако, если сделать трехцветную раскраску поля, как показано на рисунке, то очевидно, что каждый корабль должен закрывать по одной клетке каждого цвета. Следовательно, при постановке 21 корабля будут заняты по 21 клетке каждого цвета. А текущая раскраска поля дает количество таких клеток в количестве: 20, 21 и 22. Следовательно, такая расстановка невозможна. Возможны и другие доказательства.

3. 18. *Возможное решение*: Заметим, что число $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Также заметим, что так как сумма всех взятых чисел делится на 2, 3 и 7, то среди этих чисел, а также их произведений соответственно входящим степеням при разложении числа 2016 и нужно искать общие делители всех чисел. Покажем, что наибольшим возможным из них будет 18. Действительно, если бы все четыре числа делились на число, большее 18 (например, на 21), то их сумма была бы как минимум $101 \cdot 21 = 2121$, что противоречит условию. Следовательно, наибольшим возможным будет 18. Покажем теперь, что можно подобрать такие числа, в количестве 101 штуки, для которых это будет верно. Например: $18, 18, 18, \dots, 18, 216$ (первые 100 чисел – 18, последнее – 216).

4. Набрать 10% раствора в 3-х литровую ёмкость и перелить в 5-ти литровую. Затем долить до полной 5-литровую 15% раствора (например, с помощью 3-х литровой). Затем, перелить из 5-ти литровой в 4-х литровую. Оставшееся в 5-ти литровой ёмкости – 1 литр 12% соляного раствора.

   Возможное решение: см. № 3 на стр. 31

5. 1999…99, где девяток в составе числа ровно 224 штуки.

   Возможное решение: см. № 7 на стр. 21

6. *Возможное решение*: Рассмотрим множество из 29 учеников, которые сделали менее 12 ошибок или не сделали их совсем. Среди них можно выделить 12 подмножеств учеников, сделавших ровно 11 ошибок, ровно 10 ошибок, и т.д., последнее подмножество – ученики, написавшие диктант без ошибок. Тогда, по обобщенному принципу Дирихле, $29 = 2 \cdot 12 + 5$ (29 кроликов размещаем по 12 клеткам), что означает, что найдется хотя бы одно подмножество учеников (из 12), в котором будет хотя бы три ученика. Что и требуется доказать по условию задачи.

7. *Возможное решение*: Уравнение в целых числах перепишем в виде: $(x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1) = 2016$ или, $(x + y)^2 + (y + 1)^2 = 2016$. Правая часть делится на 3 (и на 9 тоже). Из свойств делимости квадрата целого числа на 3 (остатки от деления не могут быть равны 2) имеем то, что сумма двух квадратов будет делится на 3 только в случае, если каждый делится на 3. Отсюда следует делимость на 9 обоих квадратов, то есть $(x + y) \vdots 3$ и $(y + 1) \vdots 3$, или, для удобства, $(x + y) = 3n$, $y + 1 = 3m$, где $n \geq m$ – некоторые натуральные числа. Подставляя в уравнение и поделив обе части на 9 имеем новое: $n^2 + m^2 = 224$. Остаётся только показать, что данное уравнение не имеет решений в натуральных числах. Это можно показать разными способами – перебором или с использованием кратности. Для перебора, например, достаточно показать, что в силу неравенства $n \geq m$ и проверки, что $n = m$ – не решение (112 – не является полным квадратом), можно получить $n^2 + m^2 < 2n^2$, которое ведёт к ограничению $2n^2 > 224$, и в итоге, $n \geq 11$. С другой стороны, $n^2 < 224$, откуда $n \leq 14$. Остаётся перебрать 4 числа в качестве решения для ($n = 11, 12, 13\ 14$) и убедиться, что решений ни в одном из случаев нет.

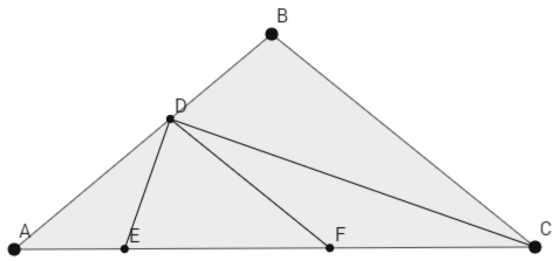
8. 13 разных треугольников. *Возможное решение*: Основанием для возможности составления треугольников из сторон, длины которых заданы отрезками известной длины является неравенство треугольника – каждая из длин сторон должна быть не больше суммы длин двух других. Поэтому, переберем все возможные разные треугольники. Перебор будем осуществлять по следующему принципу: переберём равносторонние, равнобедренные и разносторонние, обозначая только длины трех сторон, из которых составляется треугольник.

1) Равносторонние: (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4) – 4 штуки.
2) Равнобедренные: (1,2,2), (1,3,3), (1,4,4), (2,3,3), (2,4,4), (3,2,2), (3,4,4), (4,3,3) – 8 штук.
3) Разносторонние: (2,3,4) – 1 штука.

Итого, в сумме разных треугольников 13 штук.

9. *Возможное решение*: Рассмотрим исходный треугольник ABC и проведём биссектрису CD, перпендикуляр DE и рассмотрим точку F – середину отрезка CE.

1) Рассмотрим ΔCED – он прямоугольный по условию. По свойствам прямоугольного треугольника, медиана, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе равна половине гипотенузы (этот факт может быть доказан и непосредственно). То есть, $DF = FC$, откуда ΔDFC – равнобедренный и углы при основании CD равны: $\angle FCD = \angle FDC$.



2) Обозначим для краткости $\angle FCD = \varphi$. Тогда, $\angle DFE = 2\varphi$ как внешний угол ΔDFC (равен сумме внутренних углов, не смежных с ним). Отметим также, что $\angle BCA = 2\varphi$ по условию (свойство биссектрисы $\angle C$). Условие равнобедренности ΔABC даёт $\angle BAC = \angle BCA = 2\varphi$.

3) Рассмотрим ΔADF – он равнобедренный, так как $\angle DAF = \angle DFA = 2\varphi$. Следовательно, $DA = DF$, а так как $DF = FC = EF$, то требуемое равенство $CE = 2AD$ доказано.

10. Нет, нельзя. *Возможное решение*: см. № 10 на стр. 32.

ЗАДАНИЯ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА (РЭ)

• 2015-2016 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
0.5 из 2	0.9 из 4	0.8 из 4	0.6 из 4	0.2 из 4	0.5 из 6	0.9 из 6	0.7 из 6

1. Из Гагарино в Титово вышел путник. Одновременно с ним из Титово в Гагарино вышел второй путник. Они шли всю дорогу с одной и той же скоростью каждый, но скорости у них были разными. В момент встречи первому оставалось пройти еще 4 часа, а второму еще 9. Через сколько часов после выхода они встретились?

2. На стороне *BC* квадрата *ABCD* во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник *BEC* с основанием *BC*. Известно, что угол *EAD* равен 75°. Найдите угол *BEC*.

3. Найдите наименьшую возможную сумму десяти различных натуральных чисел, таких, что произведение любых пяти из них четно, а сумма всех десяти чисел нечетна.

4. На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине – произведения чисел на трех гранях с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма в вершинах равна 70.
5. В произведении ДО×РЕ×МИ×СИ одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться это произведение?
6. Вася задумал 10 целых чисел (не обязательно различных), а затем вычислил все возможные суммы любых девяти чисел из десяти. У Васи получились числа 92, 93, ... , 100 (повторяющиеся суммы Вася назвал только один раз). Какие числа он задумал?
7. В полдень из пункта А в пункт В выехала «Лада Калина». Одновременно из В в А по той же дороге выехала «Лада Приора». Через час «Лада Калина» находилась на полпути от А до «Лады Приоры». Когда она окажется на полпути от «Лады Приоры» до В? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое)
8. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?

ОТВЕТЫ:

1. Через 6 часов
2. 60º
3. 65
4. 14
5. 5 нулей
6. 7, 8, 8, 9, ..., 15
7. В 14 часов
8. 8 квадратов

• 2016-2017 учебный год

1	2	3	4	5	6	7	8
0.6 из 3	0 из 4	0.4 из 4	0.4 из 3	0.2 из 3	0.6 из 4	0.2 из 3	0.1 из 4

1. Докажите, что число $4 \cdot 26^{15}$ не более чем 23-значное (состоит не более чем из 23 цифр). Ответ обоснуйте.
2. Найдите сумму n членов последовательности: $a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$.
3. Найдите наименьшее натуральное число, при умножении которого на 3 достаточно перенести первую цифру числа в конец числа, а при умножении на 5 – последнюю в начало. Ответ обоснуйте.
4. Для чисел вида $(n^4 + 4n^2 + 4)$ и $(n^3 + 3n)$, где n – целое число, найдите наибольший возможный общий делитель среди простых чисел k.
5. Имеются два слитка золота разной пробы массами 60 г и 20 г. От каждого слитка отрезаются одинаковые по массе куски и сплавляются с остатком другого слитка. Всегда ли можно подобрать такую массу кусков, чтобы после указанной процедуры переплавки пробы в полученных слитках стали одинаковыми? Ответ обоснуйте.

6. В классе у каждого из 26 учеников есть ровно два любимых предмета, причем у любых двух учеников есть хотя бы один общий любимый предмет. Докажите, что найдется такой предмет, у которого не менее 18 поклонников среди учеников этого класса.

7. Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b. Докажите, что расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до меньшей боковой стороны есть величина постоянная и не зависит от высоты трапеции.

8. В некотором шахматном турнире участвовали гроссмейстеры и мастера. При подведении итогов турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мастерами. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа. (Правила турнира: каждый участник сыграл с каждым по одной партии, победа – 1 очко, ничья – ½ очка, поражение – 0 очков).

ОТВЕТЫ:

1. *Возможное решение*: Например, достаточно показать, что

$4 \cdot 26^{15} < 4 \cdot 26 \cdot 30^{14} = 104 \cdot 3^2 \cdot 3^{12} \cdot 10^{14} = 104 \cdot 9 \cdot 9^6 \cdot 10^{14} = 936 \cdot 9^6 \cdot 10^{14} < 1000 \cdot 10^6 \cdot 10^{14} = 10^{23}$. Возможны и другие способы.

2. $\frac{na^{n+2}-na^{n+1}-a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$

Возможное решение:

Рассмотрим будущую сумму $S = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$ и вместе с ней выражение $a \cdot S = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \ldots + na^{n+1}$, а также их разность $a \cdot S - S = (a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \ldots + na^{n+1}) - (a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n) = -a - a^2 - a^3 - \ldots - a^n + na^{n+1}$.

Первые n слагаемых есть сумма геометрической прогрессии, потому $a \cdot S - S = -\frac{a^{n+1}-a}{a-1} + na^{n+1} = \frac{na^{n+2}-na^{n+1}-a^{n+1}+a}{a-1}$. Откуда можно выразить искомую величину $S = \frac{na^{n+2}-na^{n+1}-a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$.

3. 142857. *Возможное решение*:

1) Пусть $\overline{a_n A a_1}$ – исходное число, где отдельно выделены его первая и последняя цифры. Так как при умножении его на 5 по условию не изменяется разрядность числа (те же n символов в результате), то первая цифра числа может быть только $a_n = 1$.

2) Составляя уравнение для результата умножения числа на 3, получим равенство $3 \cdot \overline{a_n A a_1} = \overline{A a_1 a_n}$, откуда: $3 \cdot 10^{n-1} + 3 \cdot 10A + 3 \cdot a_1 = 100A + 10 \cdot a_1 + 1$. Преобразуем выражение для выявления кратности: $7(10A + a_1) = 3 \cdot 10^{n-1} - 1$, или, короче, $7 \cdot \overline{A a_1} = 299 \ldots 9$, где последнее число содержит $(n-1)$ девяток и делится нацело на 7. Так как по условию требуется найти наименьшее из возможных чисел, то подбором найдем наименьшее из возможных чисел вида $299 \ldots 9$: таким является 299999, при $n = 6$. Тогда, $\overline{A a_1} = \frac{299999}{7} = 42857$. Тогда, очевидно, что 142857 – наименьшее из возможных чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Могут быть представлены другие доказательства.

4. 2.

Возможное решение:

Рассмотрим выражения $n^4 + 4n^2 + 4 = (n^2 + 2)^2$ и $n^3 + 3n = n(n^2 + 3)$. Общие делители у обоих выражений могут находиться среди их множителей. Рассмотрим пары множителей: $n^2 + 2$ и $n^2 + 3$, $n^2 + 2$ и n. У первой пары нет общих делителей – можно доказать либо с помощью эквивалентности, либо из-за свойств делимости. Таким образом, общие делители могут быть только у второй пары. Тогда, из свойств кратности для чисел $n^2 + 2$ и n следует, что если k – общий делитель данных чисел, то n^2 кратно k и 2 также делится на число k. Таким образом, число $k = 2$. Данное утверждение даёт только возможность (необходимость) наличия общего делителя. Проверим, что найдётся такое число n, для которого $k = 2$ является решением задачи. Можно проверить, что при $n = 2$ условие выполняется, что подтверждает оценку для $k = 2$.

5. Всегда. 15 г.

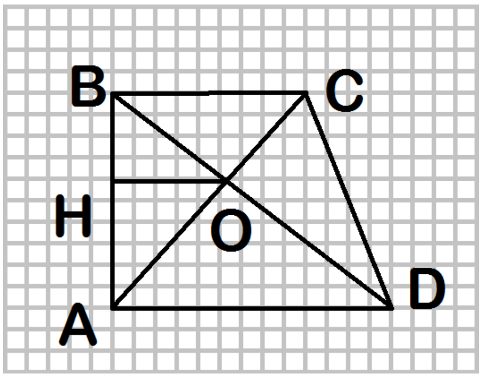
Возможное решение:

Пусть p_1 и p_2 – пробы золота в первом (60г) и втором (20г) куске золота. Пусть x – вес кусков золота, отрезаемого по условию задачи и сплавляемого с остатком другого куска. Тогда, по закону сохранения вещества, определим пробу золота в сплавленных кусках. Количество золота в первом куске $\frac{p_1(60-x)+p_2x}{100\%}$, во втором $\frac{p_2(20-x)+p_1x}{100\%}$. По условию задачи после переплавления у кусков должна получиться одна и та же проба. Следовательно, $\frac{p_1(60-x)+p_2x}{60} = \frac{p_2(20-x)+p_1x}{20}$. Решим уравнение относительно переменной x. В итоге, получим, что $60(p_1 - p_2) = 4x(p_1 - p_2)$. То есть, $x = 15$г в случае, если $p_1 \neq p_2$. Если же $p_1 = p_2$, то задача решается положительно для любого значения $x < 20$, в том числе и для $x = 15$г. Таким образом, отрезав куски по 15г и переплавив с остатками другого куска получим золото одинаковой пробы.

6. *Возможное решение*:

Возьмём любого ученика, у которого есть любимых предмета – обозначим предметы как A и B. Теперь сгруппируем всех учеников в 3 группы: 1) все ученики, у которых любимыми предметами являются A и B (оба), 2) ученики, у которых один из любимых предметов A, а второй не B, 3) ученики, у которых один из любимых предметов B, а второй не A. Если из групп 2 и 3 только одна непустая, то у всех 26 учеников есть один общий любимый предмет. Если группы 2 и 3 обе непустые, то у них должен быть общий любимый предмет – обозначим его как C. Если предположить, что имеется четвёртый любимый предмет (в группах 2 и 3), то обязательно найдутся ученики (из разных групп), у которых нет общего любимого предмета. Противоречие. Таким образом, в этом случае любимых предметов не более 3-х. Применим принцип Дирихле. Пусть, например, каждый ученик отметит каждый из двух своих любимых предметов. Тогда, всего отметок будет сделано $2 \cdot 26 = 52$ штуки (кролики) и предназначаются они трём предметам (клетки). Тогда, по принципу Дирихле, имеем: $52 = 3 \cdot 17 + 1$, откуда верно утверждение, что найдётся хотя бы один предмет, у которого не менее 18 поклонников среди учеников. Возможно доказательство с использованием графов.

7. *Возможное решение*:



Обозначим вершины трапеции $ABCD$. Пусть для определенности, углы при вершинах A и B прямые. Проведём диагонали AC и BD. Точку их пересечения назовём точкой O. Из точки O проведём перпендикуляр OH на сторону AB. Заметим, что так как AD перпендикулярно прямой AB, то прямые AD и OH параллельны. Следовательно, треугольники BDA и BOH – подобные по трём углам.

Рассмотрим теперь треугольники BOC и AOD – они подобны по трём углам. Коэффициент подобия есть отношение соответствующих сторон. Например, $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$. Тогда, для треугольников BOH и BDA имеем отношение подобия: $\frac{OH}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{a}{a+b}$, откуда видим, что $OH = AD\frac{BO}{BD} = \frac{ab}{a+b}$ не зависит от высоты трапеции, а только от длин оснований. Что и требовалось доказать.

8. *Возможное решение*:

Рассмотрим a и b – количество гроссмейстеров и мастеров, участвующих в турнире. Рассмотрим количество очков, разыгрываемых на турнире. Мастера играют с мастерами и с гроссмейстерами, по условию ровно половина очков у каждого мастера от игры с мастерами (таких игр - $\frac{a(a-1)}{2}$), то есть в сумме очков у мастеров при игре с гроссмейстерами – $\frac{a(a-1)}{2}$. Аналогично, у гроссмейстеров при игре с мастерами в сумме баллов столько же, сколько и при игре с гроссмейстерами, то есть $\frac{b(b-1)}{2}$. Следовательно, общее количество очков, выигранных мастерами у гроссмейстеров и гроссмейстерами у мастеров есть сумма $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}$. Но при игре гроссмейстеров и мастеров разыгрывалось ровно ab очков, следовательно, имеем равенство $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = ab$, или $a(a-1) + b(b-1) = 2ab$. Далее, преобразовывая последнее, получим $(a-b)^2 = a + b$, что означает, что количество участников турнира $a + b$ есть полный квадрат. Доказано.


КУБОК
ГАГАРИНА
олимпиада школьников
www.kubok-gagarina.ru
vk.com/kubok_gagarina
kubokgagarina@list.ru
(347) 246-45-29, (347) 246-45-30
г. Уфа, пр. Октября, 132/3, офис 301