

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ  
Тренировочный вариант № 451

Профильный уровень  
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

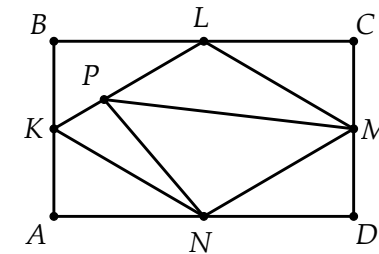
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

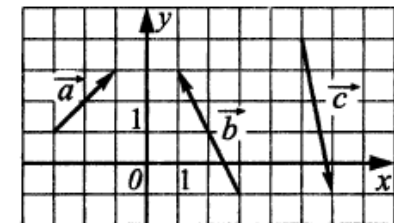
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

**1.** Точки K, L, M и N – середины сторон прямоугольника ABCD, точка P принадлежит отрезку KL. Найдите площадь прямоугольника ABCD, если площадь треугольника MNP равна 63.



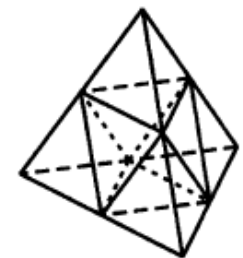
Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Вектор  $\vec{c}$  разложен по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$ , где  $k$  и  $l$  – коэффициенты разложения. Найдите  $k$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.** Площадь поверхности правильной треугольной пирамиды равна 0,9. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины ребер данной пирамиды.



Ответ: \_\_\_\_\_.

4. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратов со стороной 1 см и среди этих квадратов случайным образом выбирают один. Какова вероятность того, что расстояние от любой из сторон выбранного квадрата до границы листа составит не менее 3 см?

Ответ: \_\_\_\_\_.

5. За круглый стол на 12 стульев в случайном порядке рассаживают 8 мальчиков и 4 девочки. Найдите вероятность того, что все четыре девочки будут сидеть рядом. Ответ округлите до тысячных.

Ответ: \_\_\_\_\_.

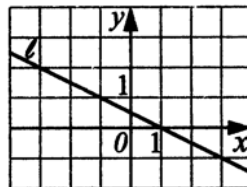
6. Решите уравнение  $49^{10x+8} = 0,07 \cdot 10^{20x+17}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7. Найдите  $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ , если  $\cos \alpha = 0,7$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

8. На рисунке изображена прямая  $l$ , которая является касательной к графику функции  $y = x^3 + bx + c$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$ . Найдите значение коэффициента  $c$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

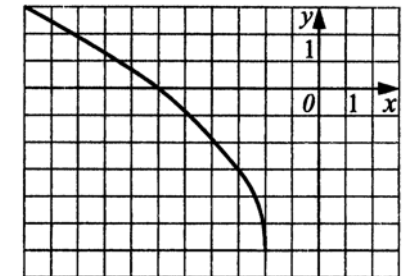
9. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде  $P \cdot V^\alpha = \text{const}$ , где  $P$  (Па) — давление в газе,  $V$  — объем газа в кубических метрах, а  $\text{const}$  и  $\alpha$  — постоянные величины. Найдите минимальное значение  $\alpha$ , при котором уменьшение объема газа в 16 раз приводит к увеличению давления не менее, чем в 32 раза.

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. В течение календарного года налоги, подлежащие уплате некоторой фирмой, увеличивались ежемесячно на одну и ту же величину. Сумма налогов фирмы за апрель и май составила 95000 рублей, а налоги за октябрь составили 75000 рублей. Какую сумму налогов (в рублях) должна была заплатить фирма за июнь?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. На рисунке изображен график функции  $y = \sqrt{ax + b} + c$ , где числа  $a, b$  и  $c$  — целые. Пользуясь рисунком, найдите значение коэффициента  $b$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Найдите точку минимума функции  $y = (17 - 6\sqrt{x})e^{1-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение  $\log_3\left(\frac{1}{1+tg^2x} - \frac{5}{12}\right) = -1$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left[-4\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ .

14. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания равна 9, боковое ребро равно 14. Точка  $K$  принадлежит ребру  $A_1 B_1$  и делит его в отношении 2:7, считая от вершины  $A_1$ .

А) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $C$  и  $K$ , является равнобедренной трапецией.

Б) Найдите площадь этого сечения.

15. Решите неравенство:  $\log_{3-x} \frac{x+4}{(x-3)^2} \geq -2$

16. Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 30000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 30000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $5000Q + 3000000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 15000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 5000Q - 3000000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

17. Дан угол величиной  $120^\circ$  с вершиной  $C$ . Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка  $O$  так, что  $OC = \sqrt{3}$ . С центром в точке  $O$  построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках  $A$  и  $B$ .

А) Докажите, что  $OC = BC = CA$ .

Б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

18. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} = 7\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{a^2 - 9a + 18}$$

имеет единственное решение.

19. На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 8, а зелёные числа кратны 3. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

А) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше  $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ , если на доске написаны только кратные 3 числа?

Б) Может ли сумма чисел быть 1066, если только одно число красное?

В) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1066.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.