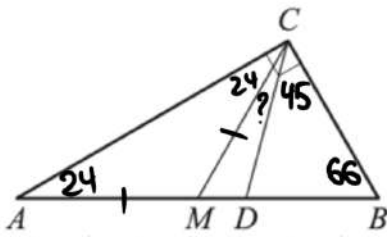


1

Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



$$90 - 45 - 24 = 21$$

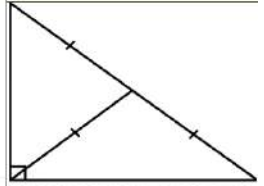
ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2017
Основная волна 2021
Основная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2023

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

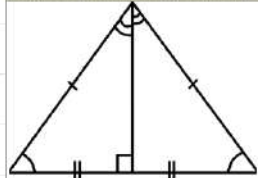
180°

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

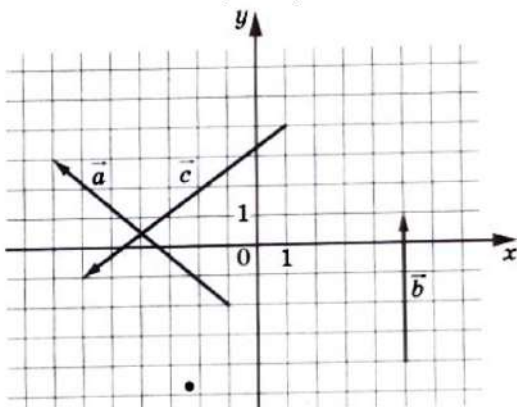


Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ОТВЕТ | 21

2

На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.



$$\textcircled{1} \vec{a} = (-6; 5)$$

$$\vec{b} = (0; 5)$$

$$\vec{c} = (-7; -5)$$

$$\textcircled{2} \vec{b} + \vec{c} = (-7; 0)$$

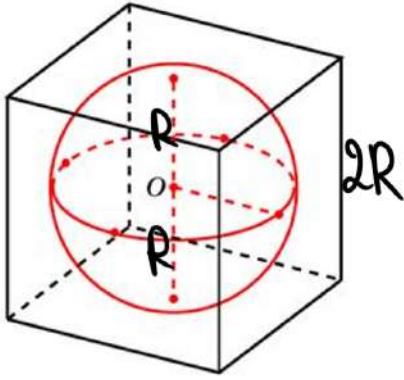
$$\textcircled{3} 42 + 0 = 42$$

ИСТОЧНИКИ

Яценко (36 вариантов) 2024

ОТВЕТ | 42

3 Шар, объем которого равен 35л, вписан в куб. Найдите объем куба.



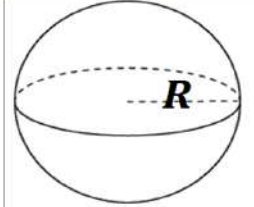
$$\textcircled{1} V_{\text{ш}} = 35 \text{ л} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$R^3 = \frac{35 \cdot 3}{4}$$

$$\textcircled{2} V_{\text{к}} = (2R)^3 = 8R^3 = 8 \cdot \frac{35 \cdot 3}{4} = 210$$

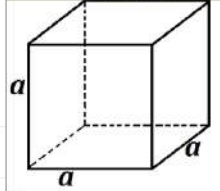
ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2014
ОБЪЕМ ШАРА



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ОБЪЕМ КУБА



$$V = a^3$$

ОТВЕТ | 2 | 1 | 0

4

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Биолог» начнёт игру с мячом все три раза.



A203F4

V	V	V
V	V	П
V	П	V
V	П	П

П	П	П
П	П	V
П	V	П
П	V	V

$$P = \frac{1}{8} = 0,125$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2023
Досрочная волна 2019
Досрочная волна 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$$

ОТВЕТ | 0 | , | 1 | 2 | 5

5

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,9. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

73B69F

$$\textcircled{1} P(\text{все три светят}) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,729$$

$$\textcircled{2} P(\text{хотя бы одна не светит}) = 1 - 0,729 = 0,271$$

ОТВЕТ 0,271

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Сумма вероятностей наступления противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ПРИМЕР:

Событие A — выпадение орла
Событие \bar{A} — выпадение решки

Если при одном бросании монеты не выпал орёл, то точно выпадет решка

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022

НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

Независимые события — это события, когда вероятность наступления второго события не зависит от уже наступившего первого события

ПРИМЕР:

Событие A — в кофе-автомате из Москвы закончится кофе
Событие B — в кофе-автомате из Читы закончится кофе

Если в московском кофе-автомате закончится кофе, то это никак не повлияет на кофе-автомат в Чите, а если бы кофе-автоматы стояли рядом, то повлияло бы и события бы были зависимые

Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

6

Найдите корень уравнения $\log_{27} 3^{5x+5} = 2$.

C62378

$$27^2 = 3^{5x+5}$$

$$(3^3)^2 = 3^{5x+5}$$

$$3^6 = 3^{5x+5}$$

$$6 = 5x + 5$$

$$x = 0,2$$

ОТВЕТ 0,2

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018
Пробный ЕГЭ 2013
Основная волна (Резерв) 2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

СТЕПЕНИ

$$1 \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2 \quad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3 \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4 \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$5 \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$6 \quad a^0 = 1$$

$$7 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$8 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

7

Найдите значение выражения $\frac{51 \cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8$.

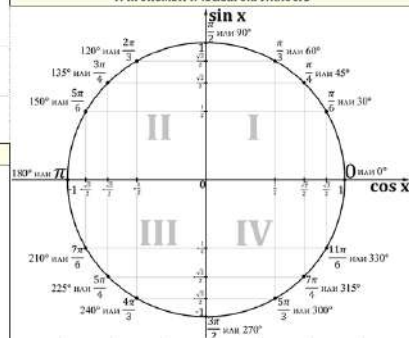
$$\cos(90-4) = \sin 4$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Досрочная волна 2013

AD1B06

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π , то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

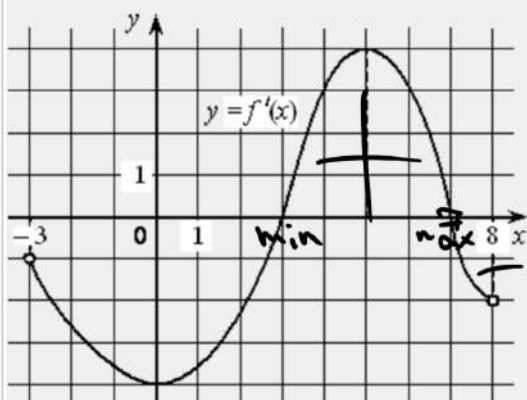
Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

ОТВЕТ | 5 | 9

8

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2023

ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ



FFD023

ОТВЕТ | 7

9

Сила тока в цепи I (в А) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону

Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в В), R — сопротивление электроприбора (в Ом). В электросеть

включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 2,5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к сети в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2019
Основная волна 2018

06534C

$$I \leq 2,5$$

$$\frac{U}{R} \leq 2,5$$

$$\frac{220}{R} - 2,5 \leq 0$$

$$\frac{220 - 2,5R}{R} \leq 0 \quad | \cdot R$$

$$220 - 2,5R \leq 0$$

$$2,5R \geq 220$$

$$R \geq 88$$

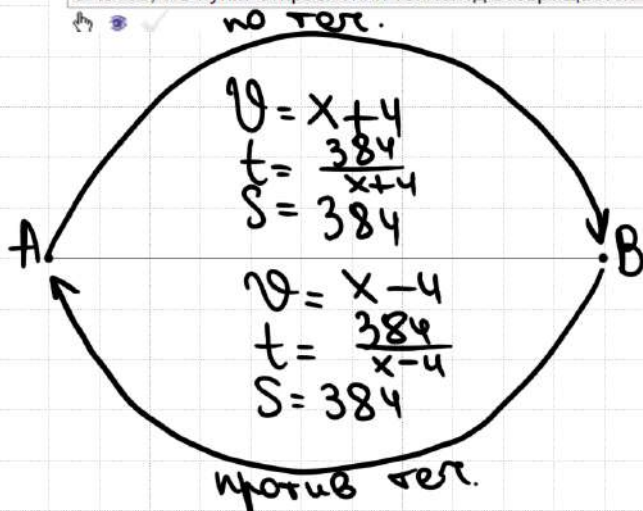
ОТВЕТ 88

10

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 384 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2022
Досрочная волна 2018



$$t \rightarrow + 8 + t \leftarrow = 48$$

$$\frac{384}{x+4} + \frac{384}{x-4} = \frac{40}{1}$$

$$\frac{384x - 384 \cdot 4 + 384x + 384 \cdot 4}{x^2 - 16} = \frac{40}{1}$$

$$\frac{2 \cdot 384 \cdot x + 96}{x^2 - 16} = \frac{40}{1} \quad \cancel{205} \quad \begin{matrix} 100^2 \\ 104 \cdot 106 \\ 110 = \end{matrix}$$

$$5x^2 - 80 = 96x$$

$$5x^2 - 96x - 80 = 0$$

$$D = 9216 + 4 \cdot 5 \cdot 80 = 10816 = 104^2$$

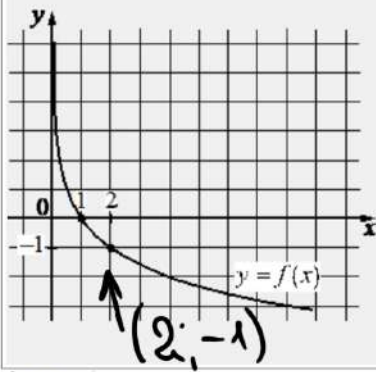
$$x = \frac{96 \pm 104}{10}$$

$$x = 20$$

ОТВЕТ 20

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -1 &= \log_a 2 \\ a^{-1} &= 2 \\ a^1 &= \frac{1}{2} \\ a &= \frac{1}{2} \\ f(x) &= \log_{\frac{1}{2}} x \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad f(16) = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$$

ОТВЕТ | - 4

12

Найдите точку максимума функции $y = 1 + 27x - 2x\sqrt{x}$.

$$\textcircled{1} \quad y = 1 + 27x - 2 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad y' &= 27 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \\ 27 - 3\sqrt{x} &= 0 \\ 3\sqrt{x} &= 27 \\ \sqrt{x} &= 9 \\ x &= 81 \end{aligned}$$

ОТВЕТ | 81

ИСТОЧНИКИ

ФИР (старый банк)
ФИР (новый банк)
Досрочная волна 2023
Основная волна 2022

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2023
Досрочная волна 2022
Основная волна 2019

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1 = 1:2$, точка K — середина DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MCK , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

а) ① $(BB_1C_1) \parallel (A_1D_1E)$

т.к. $BC \parallel AD$

$AA_1 \parallel BB_1$

Построим CN

такую в м-ти

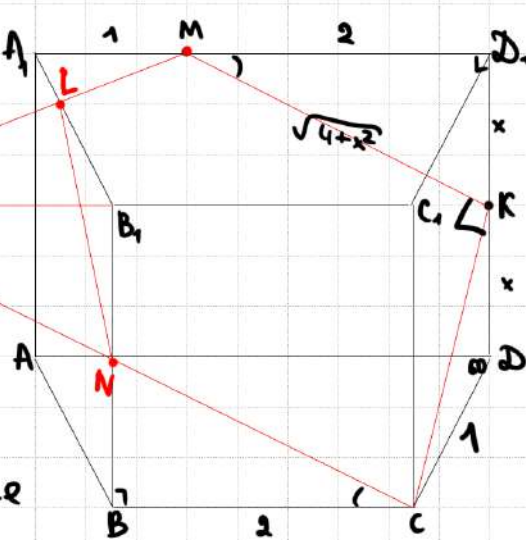
BCC_1 , что $CN \parallel MK$

Получаем

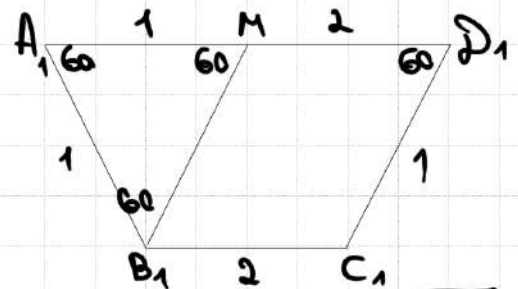
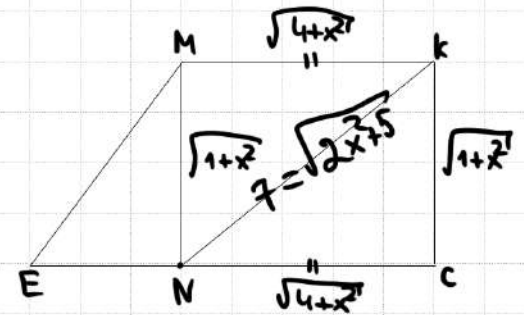
$CN \cap B_1C_1 = E$

$EM \cap A_1B_1 = L$

$LMKCN$ — сечение



б) ① $S_{\text{сеч.}} = S_{MKCE} - S_{ELN}$
 $MKCE$ — равноуг. трапеция



② $\triangle BCN = \triangle KD_1M$ по $УСУ$
 (...)

$\Rightarrow BN = D_1K = \frac{1}{2} BB_1$

N — середина BB_1 ■

по \cos : $B_1D_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{7}$
 $\sqrt{7} = \sqrt{2x^2 + 5}$
 $2x^2 = 2$
 $x = 1$

$S_{MKCE} = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1,5\sqrt{10}$

② $\triangle A_1ML \sim \triangle B_1EL$ по 2 углам
 $k = \frac{1}{2} = \frac{LM}{LE}$

$\frac{S_{LMN}}{S_{LEN}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot LM \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot LE \cdot h} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{ELN} = \frac{2}{3} \cdot S_{EMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{10}$

$S_{\text{сеч.}} = \frac{3}{2} \sqrt{10} - \frac{1}{3} \sqrt{10} = \frac{7}{6} \sqrt{10}$

Ответ: $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

$$\frac{3 - 4^x}{2 - 2^x} \geq \frac{3}{2}$$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$

$$\frac{(3-t)^2}{2-t} - \frac{3}{2} \geq 0$$

$$\frac{6 - 2t^2 - 6 + 3t}{2 \cdot (2-t)} \geq 0$$

$$\frac{t \cdot (3-2t)}{2 \cdot (2-t)} \geq 0$$



$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1,5 \\ t > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq 2^x &\leq 1,5 \\ 2^x &\leq 2^{\log_2 1,5} \\ x &\leq \log_2 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &> 2 \\ 2^x &> 2^1 \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; \log_2 1,5] \cup (1; +\infty)$.

16 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Пусть S - сумма долга
март-месяц платежа
 $x = 2,16$ млн

Дата	Сумма долга
и	S
л	$1,2 \cdot S$
м	$1,2 \cdot S - x$
л	$1,2^2 \cdot S - 1,2x$
м	$1,2^2 \cdot S - 1,2x - x$
л	$1,2^3 \cdot S - 1,2^2x - 1,2x$
м	$1,2^3 \cdot S - 1,2^2x - 1,2x - x = 0$

$$\frac{6^3}{5^3} \cdot S = \frac{6^2}{5^2} x + \frac{6^{15}}{5} x + \frac{x}{1} \quad (5^2)$$

$$\frac{6^3}{5^3} \cdot S = \frac{36x + 30x + 25x}{5^2}$$

$$\frac{6^3}{5^3} \cdot S = \frac{91x}{5^2}$$

$$S = \frac{91 \cdot 216 \cdot 5^2}{5^2 \cdot 100 \cdot 5^3} = 4,55 \text{ млн}$$

Ответ: 4,55.

Дан треугольник ABC . Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC , при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC .

- а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
 б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

а) по т. $\cos A = \frac{4^2 + 3^2 - \sqrt{37}^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$
 $\angle A = 120^\circ$

$\angle A + \angle D = 120 + 60 = 180^\circ$
 \Rightarrow околн $ABDC$ можно описать окр. т.б. ■

④ по т. о биссектрисах: $\triangle ABC$:
 $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$
 $BK = \frac{4}{7} \cdot BC = \frac{4}{7} \sqrt{37}$
 $BK = \frac{1}{2} \sqrt{37}$
 $KK = BK - BK = \frac{4}{7} \sqrt{37} - \frac{1}{2} \sqrt{37} = \frac{1}{14} \sqrt{37}$

⑤ $\triangle EKK$

$$EK = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{37}}{14}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{37}}{2\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{37 \cdot 12}{14^2} + \frac{37}{12}} = \sqrt{\frac{37 \cdot 208}{14^2 \cdot 12}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 13 \cdot 37}{7 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 3}}$$

Ответ:
 $\frac{\sqrt{481}}{7\sqrt{3}}$

б) ① Окружность описанная и $\triangle BDC$ т.б. т.е. Пусть E — центр опис. окр. K — точка пересек. диаг. DM — высота $\triangle BDC$
 $E \in DM$
 (т.к. центр описанной около равност. тр-ка окр-ти лежит на высоте)

② $DK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{37}$

$EK = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{37} = \frac{\sqrt{37}}{2\sqrt{3}}$

③ $\angle BAD = 120^\circ = \angle CAD$
 (т.к. ка нек осп. угол 60°)

$\angle BAD = \angle CAD$
 $\Rightarrow AD$ — биссектриса $\angle BAC$

$$\frac{|4x| - 2x - 3 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

$$\begin{cases} \textcircled{1} |4x| - 2x - 3 - a = 0 \\ \textcircled{2} x^2 - 2x - a \neq 0 \end{cases}$$

Решим ур. $\textcircled{1}$

1 Случай

Если $x=0$
 $|4 \cdot 0| - 2 \cdot 0 - 3 - a = 0$

т.е. $a = -3$ будет единств. реш. $x=0$

$a \neq -3$

2 Случай

Если $x > 0$, то
 $4x - 2x - 3 - a = 0$

$$2x = 3 + a$$

$$x = \frac{3+a}{2}$$

$$\frac{3+a}{2} > 0$$

$$3+a > 0$$

т.е. $a > -3$ будет положительный корень $x = \frac{3+a}{2}$

3 Случай

Если $x < 0$, то
 $-4x - 2x - 3 - a = 0$

$$6x = -3 - a$$

$$x = -\frac{3+a}{6}$$

$$-\frac{3+a}{6} < 0$$

$$-3-a < 0$$

т.е. $a > -3$ будет отрицательный корень $x = -\frac{3+a}{6}$

$x = \frac{3+a}{2}$ и $x = -\frac{3+a}{6}$ не совпадают, т.к. один положит., другой отрицат.

Найдём, при каких a $x = \frac{3+a}{2}$ и $x = -\frac{3+a}{6}$ удовл. нер-ву $\textcircled{2}$
 $x^2 - 2x - a \neq 0$

Если $x = \frac{3+a}{2}$, то

$$\left(\frac{3+a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3+a}{2}\right) - a \neq 0 \quad | \cdot 4$$

$$(3+a)^2 - 4(3+a) - 4a \neq 0$$

$$9 + 6a + a^2 - 12 - 4a - 4a \neq 0$$

$$a^2 - 2a - 3 \neq 0$$

$$a \neq 3$$

$$a \neq -1$$

Если $x = -\frac{3+a}{6}$, то

$$\left(-\frac{3+a}{6}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3+a}{6}\right) - a \neq 0 \quad | \cdot 36$$

$$(3+a)^2 - 12 \cdot (-3-a) - 36a \neq 0$$

$$9 + 6a + a^2 + 36 + 12a - 36a \neq 0$$

$$a^2 - 18a + 45 \neq 0$$

$$a \neq 3$$

$$a \neq 15$$

2 разл. реш. будет при $a \in$

Ответ: $(-3; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 15) \cup (15; +\infty)$

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

а) $8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$

или

$7 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$

Ответ: а) да

б) Пусть $a < b < c < d < e < f$

≥ 9

≤ 11

b не может быть меньше 9
 e не может быть больше 11

Тогда $c \geq 10$ $d \leq 10$

т.е. c и d не смогут быть

разными, что противоречит условию.
Ответ: б) нет.

в) Пусть $a < b < c < d$

Тогда ≥ 9 ≤ 11

Получаем

①	a	9	10	d
②	a	9	11	d
③	a	10	11	d

Случай 1

$a=7$ $b=9$ $c=10$ $d=11$
 $a=8$ $d=12$
 $d=13$

$S \geq 37$
Случай 2

$a=7$ $b=9$ $c=11$ $d=12$
 $a=8$

$S \geq 39$
Случай 3

$a=7$ $b=10$ $c=11$ $d=12$
 $a=8$

$S \geq 40$
 $a=9$

Получаем $S \geq 37$

Покажем, что $S=37$ можно быть

$7 \quad 9 \quad 10 \quad 11$

Ответ: в) 37