

9 класс

Первый день

- 9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x) + g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.)
- 9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки $\text{АБ}\underline{\text{АБББА}}\text{АБ}$ можно одной операцией получить строку $\text{АБ}\underline{\text{ББААБ}}\text{АБ}$.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке?
- 9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1?
- 9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

9 класс

Второй день

- 9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, . . . , в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leq 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых n камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.)
- 9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.
- 9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD , пересекаются в точке E . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD , пересекаются в точке F . Докажите, что точки E , F и G лежат на одной прямой.
- 9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.)

10 класс

Первый день

- 10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T , покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T .
- 10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.
- 10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?
- 10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами.

10 класс

Второй день

- 10.5. Найдите наибольшее натуральное число n , для которого произведение чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 20$ делится на квадрат какого-то одного из них.
- 10.6. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2 . Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения?
- 10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD , пересекаются в точке E . Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и $B CD$, пересекаются в точке F . Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой.
- 10.8. Дано число $a \in (0, 1)$. Положительные числа x_0, x_1, \dots, x_n удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n + a$ и $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.

11 класс

Первый день

- 11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.
- 11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.
- 11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?
- 11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC , в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MN . Прямые MN , BI и AB ограничивают треугольник T_b , а прямые MN , CI и AC ограничивают треугольник T_c . Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.

11 класс

Второй день

- 11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?
- 11.6. Плоскость α пересекает рёбра AB , BC , CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X , Y , Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω , построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω . Докажите, что середины рёбер AB , BC , CD , DA и точка P лежат в одной плоскости.
- 11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k . Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d , и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.
- 11.8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \dots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k -оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \dots, N$ существует k -оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \dots, k$.