

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Новогодний тренировочный вариант № 448/48
 (совместный проект alexlarin.net и egemathschool.ru)

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

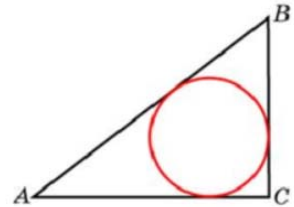
$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

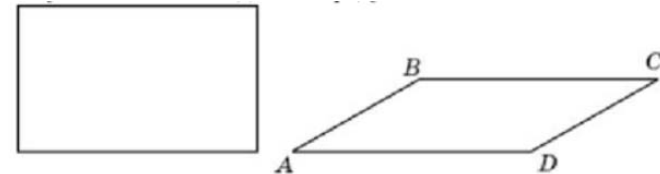


1.1 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а радиус вписанной окружности этого треугольника равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



Ответ: _____.

1.2 Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

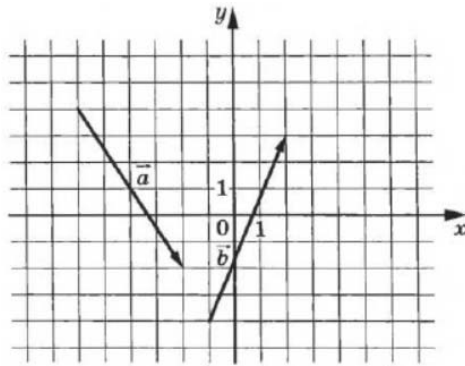


Ответ: _____.

2.1 Сторона правильного треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение вектора \vec{AB} на вектор $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Ответ: _____.

2.2 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение векторов $2\vec{a}$ и \vec{b} .

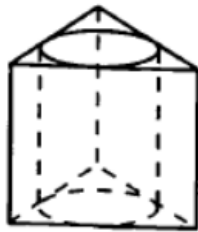


Ответ: _____.

3.1 Цилиндр и конус имеют общее основание, вершина конуса лежит на оси цилиндра, высота конуса относится к высоте цилиндра как 4:5. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 24.

Ответ: _____.

3.2 Цилиндр вписан в правильную треугольную призму, радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$, а высота цилиндра равна 14. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ: _____.

4.1 В новогодний хоровод, взявшись за руки, в случайном порядке встали 24 человека, среди них Наталья и Николай. Найдите вероятность того, что они не стоят рядом. Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

4.2 Ваня бросил игральный кубик, и у него выпало больше 2 очков; Петя бросил игральный кубик, и у него выпало меньше 6 очков. Найдите вероятность. того что у Пети выпало очков больше, чем у Вани.

Ответ: _____.

5.1 На предприятии по производству новогодних светодиодных свечей 10% произведенных свечей имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных свечей. Остальные свечи поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведенная светодиодная свеча попадет в продажу.

Ответ: _____.

5.2 На одной полке стоит 25 блюд: 16 красных и 9 синих. На другой полке стоит 25 чашек: 13 красных и 12 синих. Наугад берут два блюда и две чашки. Найдите вероятность, что из них можно будет составить две чайные пары (блюдце с чашкой), каждая из которых будет одного цвета.

Ответ: _____.

6.1 Решите уравнение $24^{x+1,5} - 24^{x-0,5} = 575$.

Ответ: _____.

6.2 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} + \sqrt{5} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

Ответ: _____.

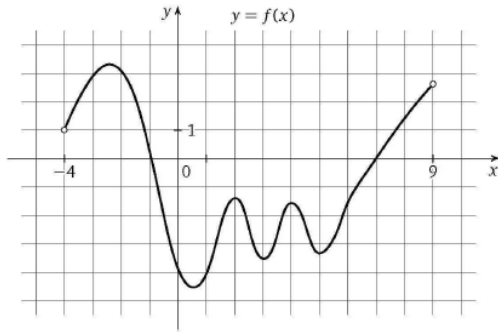
7.1 Найдите значение выражения $2025\sqrt{13}\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos^2 \alpha = \frac{9}{22}$ и $\alpha \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$.

Ответ: _____.

7.2 Найдите значение выражения: $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

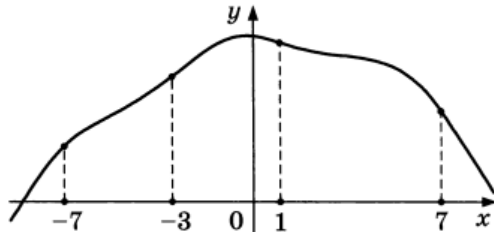
Ответ: _____.

8.1 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;9)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему перпендикулярна прямой $x = -2024$.



Ответ: _____.

8.2 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-7, -3, 1, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

9.1 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$,

где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка

магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,5, а оценка экспертов равна 0,22.

Ответ: _____.

9.2 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 20$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 см до 45 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 90 см до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполняется соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. На каком наименьшем

расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: _____.

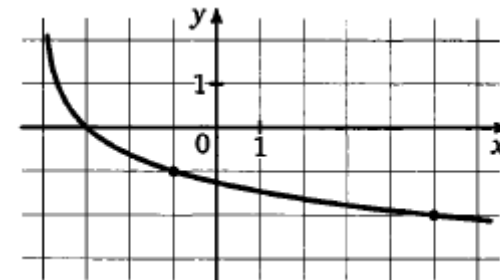
10.1 Средняя скорость обычной электрички на 20 км/ч меньше, чем у электрички «Новогодний экспресс», поэтому из города А в город В, расстояние между которыми равно 80 км, обычная электричка идет на 40 минут дольше. Найдите среднюю скорость электрички «Новогодний экспресс». Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

10.2 Толстовка дороже футболки на 19% и дешевле, чем кеды, на 30%. На сколько процентов кеды дороже футболки?

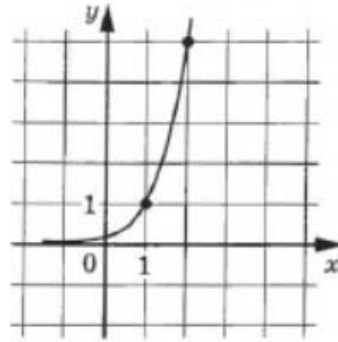
Ответ: _____.

11.1 На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(77)$.



Ответ: _____.

11.2 На рисунке изображен график функции $f(x) = pa^x$. Найдите $f(4)$.



Ответ: _____.

12.1 Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \cos x + 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}\pi + 2024$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.

12.2 Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(4x) + 16$ на отрезке $\left[\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания



Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13.1 А) Решите уравнение $\log_{2024}(\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x) = \log_{\frac{1}{2024}} 8$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[23\pi; 25\pi]$.

13.2. А) Решите уравнение $\frac{3 \sin x - 4}{\sin x - 1} + \frac{1}{\sin^2 x - \sin x} = 1$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

14.1 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а высота SO пирамиды равна 8. Через точку A параллельно BD проведена плоскость α , а через точки B и D параллельная ей плоскость β так, что сечения пирамиды этими плоскостями имеют равные площади.

А) Докажите, что плоскости α и β разбивают ребро SC на три равные части.

Б) Найдите расстояние между плоскостями α и β .

14.2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно 9, а высота пирамиды SO равна $3\sqrt{5}$, точки M и T – середины отрезков BC и SM соответственно.

А) Докажите, что AT – высота пирамиды, проведенная к грани SBC

Б) Найдите расстояние между прямыми AT и SB .

15.1 Решите неравенство:

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$$

15.2 Решите неравенство: $\log_{\frac{2-x}{2}} \frac{6}{2+x} \geq -1$

16.1 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита равна 2580 тыс. рублей. Найдите величину долга (в тыс. руб.) в конце июля 2032 года.

16.2 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до $t_1 = 2,5t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $9000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

17.1 В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Через точку C_1 параллельно высоте BB_1 проведена прямая, пересекающая высоту AA_1 в точке K.

А) Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.

Б) Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC, если $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = \sqrt{17}$.

17.2 Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D – основание высоты, опущенной из вершины C. O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD.

А) Докажите, что O_1 и O_2 лежат на отрезке EF.

Б) Найдите расстояние от точки C до прямой O_1O_2 , если $AC = 15$, $BC = 20$.

18.1 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{2023}\left(1012 + 1011 \cdot \frac{|x|}{x}\right) + (x-y)^2 = a, \\ \log_{2024}(3-y) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

18.2 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$h(x) = a - a^2$ имеет хотя бы один корень, если

$$h(x) + 3h(-x) = 4a + 16|x| + 16\sqrt{x^2 + 16} - 6|x + 4a| - 2|x - 4a| + 2x$$

19.1 Владелица супермаркета «Новогодняя халява от Алевтины» организовала распродажу новогодних сувениров. В течение дня покупатели приходили к кассиру, желая произвести различные платежи (сумма любого платежа – четное число рублей). Каждый протягивал купюру 5000 рублей, а кассир выдавал сдачу, имея только 300 монет по 10 рублей и 500 монет по 2 рубля. По итогам дня все монеты оказались потраченными на сдачу.

А) Могло ли за день быть 250 покупателей, если все они получили равную сдачу?

Б) Каким могло быть наибольшее число покупателей, если каждый получил одинаковую сдачу?

В) Для какого наибольшего числа покупателей кассир мог выдать на сдачу все монеты указанным образом при любом распределении сдач, не противоречащим условию?

19.2 Трёхзначное число A имеет k натуральных делителей (в том числе 1 и A).

А) Может ли k быть равно 7?

Б) Может ли k быть равно 25?

В) Найдите наибольшее значение k .

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.