Материалы для проведения заключительного этапа

XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2022–2023 учебный год

Сириус,
21–27 апреля 2023 г.

Москва, 2023

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также А. В. Антропов, Д. Ю. Бродский, Д. А. Демин, М. А. Дидин, И. А. Ефремов, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, Е. Г. Молчанов, А. В. Пастор, Д. А. Терешин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x)+g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.) (*И. Богданов*)

Первое решение. Заметим, что разность корней приведённого квадратного трёхчлена x^2+bx+c равна корню из его дискриминанта, то есть $\sqrt{b^2-4c}$.

Пусть два данных трёхчлена — это $f(x)=x^2+b_1x+c_1$ и $g(x)=x^2+b_2x+c_2$. Согласно условию, у них общий дискриминант $D=b_1^2-4c_1=b_2^2-4c_2$. Вместо суммы трёхчленов удобно рассмотреть их полусумму — она тоже является приведённым квадратным трёхчленом. Квадрат разности его корней (т.е. дискриминант) равен

$$\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2-2(c_1+c_2)=\frac{b_1^2+b_2^2}{2}-2(c_1+c_2)-\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2.$$

Значит, он не больше, чем $\frac{b_1^2+b_2^2}{2}-2(c_1+c_2)=\frac{D}{2}+\frac{D}{2}=D$. Отсюда и следует, что разность корней полусуммы не больше, чем $\sqrt{D}$, то есть разность корней каждого из данных трёхчленов.

Замечание. В оценке выше можно было воспользоваться неравенством о средних $\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{2}}\geqslant\frac{b_1+b_2}{2}$.

Второе решение. Заметим, что любой приведённый квадратный трёхчлен с двумя корнями имеет вид $(x-p)^2-q^2$ при $q\geqslant 0$. При этом разность его корней равна $2q$, а его наименьшее значение равно $-q^2$.

Теперь условие означает, что два данных трёхчлена имеют равные наименьшие значения $-q^2$. Наименьшее значение их полусуммы, очевидно, не меньше $-q^2$ (оно является полусуммой каких-то значений исходных трёхчленов), то есть оно равно $-r^2$

при $0 \leqslant r \leqslant q$. Поэтому и разность корней полусуммы, то есть $2r$, не превосходит $2q$.

Замечание. Практически такое же рассуждение показывает, что утверждение задачи остаётся верным, если вместо двух приведённых трёхчленов рассмотреть два произвольных квадратных трёхчлена с положительными старшими коэффициентами.

Комментарий. Доказано, что дискриминанты $f(x)$ и $g(x)$ равны (или что графики этих квадратных трёхчленов имеют равные ординаты вершин), дальнейших содержательных продвижений нет — 1 балл.

Утверждаются неверные факты, не повлиявшие в дальнейшем на решение (например, утверждается, что разность корней равна дискриминанту, а далее используется верная формула) — снимается 1 балл.

9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки А$\underbrace{\text{БАББАА}}$Б можно одной операцией получить строку А$\underbrace{\text{ББААБА}}$Б.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке? (*С. Берлов*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Пронумеруем позиции в строке слева направо числами от 1 до 250. Пусть в исходной строке x букв А стоят на нечётных местах (т. е. местах с нечётными номерами). Покажем, что в полученных строках это количество не изменится.

Действительно, пусть для некоторой операции выбран кусок, в котором по y букв А и Б, причём t из этих букв А стоят на нечётных местах. Тогда на чётных местах в куске стоят $y - t$ букв А и, следовательно, $y - (y - t) = t$ букв Б. После операции именно из этих t букв Б возникнут буквы А, стоящие на нечётных местах куска — значит, количество таких букв А не поменяется.

Итак, в любой полученной строке будет ровно x букв А на нечётных местах. Однако, если строка развернётся задом наперёд, то на нечётных местах должны оказаться ровно те буквы, которые раньше были на чётных местах, а там было ровно $125 - x$ букв А. Поскольку $125 - x \neq x$, требуемое невозможно.

Замечание. В решении выше предъявлен *инвариант* процесса (то есть величина, остающаяся постоянной) — количество букв А на нечётных местах. Существуют и другие похожие инварианты, позволяющие решить задачу. Например, можно показать, что сумма номеров мест, на которых стоят буквы А, является таким инвариантом.

Второе решение. Предъявим ещё один инвариант. В строке всего 125^2 пар, состоящих из буквы А и буквы Б. Назовём такую пару *левой*, если в ней А стоит левее Б, и *правой* иначе. Покажем, что при операции количество левых пар не изменяется. Из этого будет следовать невозможность требуемого, ибо при развороте строки все пары меняют тип, а значит, количество левых пар меняет чётность.

Рассмотрим одну операцию с куском длины $2y$. При этой операции пары из букв, не лежащих в куске, сохраняют свой тип. Далее, для каждой буквы вне куска было ровно y пар, содержащих её и букву из куска; столько же таких пар осталось, и все эти пары были и стали одного и того же типа.

Значит, осталось проследить за парами букв в самом куске. Но каждая пара сменила свой тип дважды: когда кусок развернулся и когда все буквы заменили на другие. Значит, количество левых пар в куске также не изменилось.

Замечание. Можно показать, что по количеству левых пар восстанавливается сумма номеров мест букв А (и наоборот). Таким образом, инвариант в этом решении — тот же, что и в предыдущем замечании.

Комментарий. Неверный инвариант или инвариант, который не всегда отличает строку от её обратной — 0 баллов.

Сформулирован верный инвариант и доказано, что он ВСЕГДА отличает строку и её обратную — 3 балла.

В решении с подсчётом пар АБ и БА не учитываются или неверно учитываются пары, в которых одна буква внутри куска, а другая вне — снимается 2 балла.

Вводится «локальная» нумерация букв в куске и в этой нумерации доказывается, что сумма номеров А не меняется, но нет объяснения, как эта сумма связана с «глобальной» суммой в строке — снимается 1 балл.

9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1? (*С. Берлов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Предположим, что это возможно.

Лемма. *Пусть число n синее; тогда n^2 — красное.*

Доказательство. Поскольку n синее, числа $n-1$ и $n+1$ красные, иначе два синих числа отличаются на 1. Поэтому число $n^2-1=(n-1)(n+1)$ синее. Значит, n^2 красное. □

Очевидно, что существует синее число $k>1001$; по лемме число k^2 красное. Рассмотрим два случая.

Пусть число k^3 синее. Тогда по лемме число $k^6=(k^3)^2$ красное. Поскольку $k^2\cdot k^4=k^6$, и числа k^2 и k^6 красные, то число k^4 обязано быть синим. По лемме число $k^8=(k^4)^2$ красное, но оно является произведением красных чисел k^2 и k^6. Этого не может быть.

Пусть теперь число k^3 красное. Тогда число $k^5=k^2\cdot k^3$ синее, и по лемме число $k^{10}=(k^5)^2$ красное. Поскольку $k^{10}= =k^2\cdot k^8=k^3\cdot k^7$ и числа k^2 и k^3 красные, числа k^7 и k^8 должны быть синими, а тогда, по лемме, числа $k^{14}=(k^7)^2$ и $k^{16}=(k^8)^2$ красные. Но тогда красное число k^{16} равно произведению красных чисел k^2 и k^{14}. Противоречие.

Второе решение. Опять же предположим противное. Начнём со следующего замечания. Пусть a и b — два различных красных числа; тогда число $ab+1$ тоже красное. Действительно, по условию число ab синее, а тогда $ab+1$ красное.

Цвета чисел не могут строго чередоваться — иначе все числа одной чётности будут красными, а тогда найдутся и два красных числа с красным произведением. Значит, есть два одноцветных числа, отличающихся на 1 — пусть это a и $a+1$. Из условия их общий цвет — красный.

Из замечания выше получаем сначала, что число $b = a^2 + a + 1 = a(a+1)+1$ красное, а затем — что число $c = a^3 + a^2 + a + 1 = ab + 1$ тоже красное. Значит, по условию, число $d = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1 = (a+1)c$ синее.

С другой стороны, из того же замечания число $p = (a + 1)b + 1 = a^3 + 2a^2 + 2a + 2$ красное. Значит, по условию, число $ap = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = d - 1$ тоже синее. Итак, мы нашли два соседних синих числа d и $d-1$, что невозможно.

Комментарий. Если в задаче был ответ «да», то ставилось 0 баллов, и пример не проверялся.

Доказательство того, что, начиная с некоторого места, цвета не могут чередоваться, не оценивалось.

Доказано, что если a — синее число, то a^2 — красное (или $a^2 - 1$ — синее), или доказано, что если a и b — красные числа, то a^2b^2 — красное — 1 балл.

Доказано, что произведение двух синих чисел является красным — 1 балл.

Доказано, что нет трёх последовательных красных чисел (или задача сведена к случаю, когда нет трёх последовательных красных чисел) — 1 балл.

При отсутствии иных продвижений, кроме описанных в трёх предыдущих критериях, больше 2 баллов не ставилось.

9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

(*Д. Бродский*)

Решение. Обозначим через Γ окружность с диаметром I_BI_C. Поскольку $CI_C \perp CI_B$ и $BI_C \perp BI_B$, точки B и C лежат на Γ (см. рис. 1).

Обозначим через I центр вписанной окружности ABC. Если точка X лежит внутри угла BIC, то углы XBI_C и XCI_B тупые, поэтому $XI_B > XC$ и $XI_C > XB$. Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

В противном случае точки X и A лежат в одной полу-

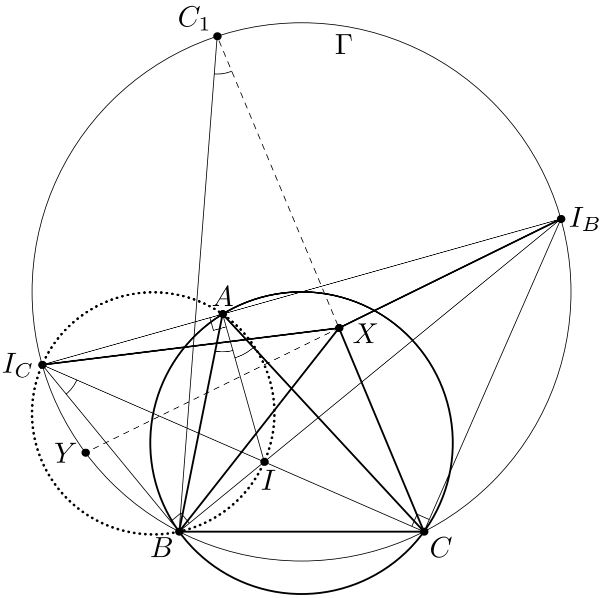

Рис. 1

плоскости относительно прямой BC. Продлим лучи CX и I_BX до пересечения с Γ в точках C_1 и Y соответственно. Поскольку четырёхугольник AI_CBI вписан в окружность с диаметром II_C, то $\angle XC_1B = \angle II_CB = \angle IAB = \frac{1}{2}\angle CAB < \frac{1}{2}\angle CXB = \frac{1}{2}(\angle XC_1B + \angle XBC_1)$, откуда $\angle XC_1B < \angle XBC_1$, поэтому $XC_1 > XB$. Кроме того, поскольку длина хорды окружности не превосходит длины диаметра, $I_BX + XI_C \geqslant I_BI_C \geqslant I_BY = I_BX + XY$, откуда $XI_C > XY$. Следовательно, $XI_B \cdot XI_C \geqslant XI_B \cdot XY = XC \cdot XC_1 > XC \cdot XB$.

Замечание. Если разрешить точке X находиться на описанной окружности треугольника ABC, то неравенство обращается в равенство в вершине A и в середине дуги CAB.

Комментарий. Переформулировка условия задачи без существенных продвижений — 0 баллов.

Формулировки известных геометрических теорем и фактов без продвижений в решении задачи — 0 баллов.

Недоведённый координатный или иной счёт — 0 баллов.

Доказательство требуемого неравенства для части круга, включающей сегмент, отрезаемый хордой BC и находящийся по другую сторону от вершины A — 1 балл.

Доказательство существования двух точек равенства (вершина A и середина дуги BAC) — 1 балл.

Баллы по предыдущим пунктам не суммируются.

Решение верное, но упущен случай, когда точки A и X находятся в разных полуплоскостях относительно прямой BC — 6 баллов.

9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, ..., в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leqslant 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых n камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.) *(Д. Храмцов)*

Ответ. $n = 5099$.

Решение. Если удалить полностью 51 кучку, то, очевидно, не останется много камней. Значит, искомое значение n меньше 5100. (Альтернативно, можно удалить из всех кучек по 51 камню.)

Осталось показать, что при удалении любых $n = 5099$ камней останется много камней. Пусть в кучках осталось $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ камней соответственно; можно считать, что $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{100} \leqslant 100$. Покажем, что $a_{i+50} \geqslant i$ при $i = 1, 2, \ldots, 50$, то есть кучки с номерами от 51 до 100 удовлетворяют требованиям.

Пусть это не так, то есть $a_{i+50} \leqslant i-1$. при некотором $i \leqslant 50$. Это значит, что каждая из первых $i + 50$ кучек содержит не более $i - 1$ камня, то есть из неё удалено хотя бы $101 - i$ камней. Поэтому общее количество удалённых камней не меньше, чем $(i + 50)(101 - i) = 5100 - (i - 1)(i - 50) \geqslant 5100$. Противоречие.

Комментарий. Пример, как при удалении 5100 камней может не остаться много камней — 1 балл.

Доказательство, что при любом удалении 5099 камней останется много камней — 6 баллов.

9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

(*И. Ефремов*)

Решение. Каждому остатку a от деления на 19 сопоставим остаток $b(a)$ такой, что $b(a) \equiv 3a \pmod{19}$. Заметим, что остаткам $0, 1, 2, 3, 7, 8, 9$ сопоставлены остатки $0, 3, 6, 9, 2, 5, 8$ соответственно. Более того, по остатку b восстанавливается остаток $a = a(b) \equiv -6b \pmod{19}$ такой, что $a(b(a)) \equiv -18a \equiv a \pmod{19}$ и $b(a(b)) = b$ (из аналогичных соображений).

Обозначим теперь через $\mathcal{A}$ множество чисел из условия, не содержащих цифр $4, 5, 6$, а через $\mathcal{B}$ — множество таких чисел, не содержащих $1, 4, 7$. Каждому числу $A = \overline{a_{99}a_{98}\ldots a_0} \in \mathcal{A}$ сопоставим число $B = \overline{b(a_{99})b(a_{98})\ldots b(a_0)}$. Заметим, что $b(a_i)$ — цифра (причём $b(a_{99}) \neq 0$), так что получилось 100-значное число. Кроме того,

$$B = b_0 + 10b_1 + \ldots + 10^{99}b_{99} \equiv$$
$$\equiv 3(a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^{99}a_{99}) = 3A \pmod{19},$$

так что B делится на 19 и $B \in \mathcal{B}$. Поскольку разным числам из $\mathcal{A}$ соответствуют разные числа из $\mathcal{B}$, количество чисел в $\mathcal{B}$ не меньше, чем в $\mathcal{A}$.

Наконец, каждому числу $B = \overline{b_{99}b_{98}\ldots b_0} \in \mathcal{B}$ соответствует число $A = \overline{a(b_{99})a(b_{98})\ldots a(b_0)}$, которое по аналогичным причинам лежит в $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что количества чисел в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны.

Комментарий. Не полностью описанное соответствие между числами — 0 баллов.

Недоведённое решение по индукции — 0 баллов.

Есть соответствие между разрешёнными (запрещёнными) цифрами с помощью умножения по модулю 19 — 1 балл.

Использование умножения по модулю 19 для построения отображения из некоторого множества 100-значных чисел, не покрывающее все разрешённые числа — 2 балла.

Не проверено, что соответствие сохраняет делимость на 19 — снимается 1 балл.

9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC

пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 2; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

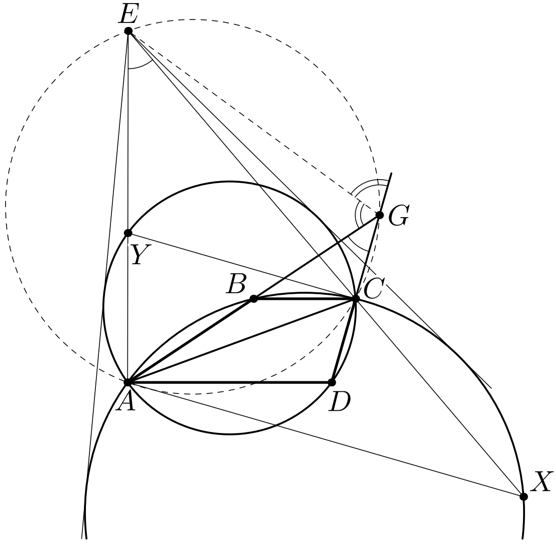

Рис. 2

Но $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к

AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка Микеля* этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

Комментарий. Получены результаты о конфигурации из центров окружностей и положении E и F относительно них (например, направления O_iO_j, подобие конструкции из центров и $ABCD$, $AE = EC$, $EO_1/EO_2 = r_1/r_2$, проекции EO_1 и FO_2 на AD равны, и эквивалентные продвижения) — баллы не добавляются.

Рассматриваются гомотетии, композиции гомотетий, применения теоремы о колпаках (без дальнейшего продвижения) — баллы не добавляются.

Показано, что отношения радиусов окружностей в парах равны (и равны отношению боковых сторон) — 1 балл.

Утверждается без доказательства, что EF есть внешняя биссектриса — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).

Пусть $BA'D'C$ — образ $ABCD$ при гомотетии с центром G. Задача сведена к факту совпадения центров гомотетии пар окружностей (ABC), $(D'BC)$ и (DBC), $(A'BC)$ — 1 балл.

Задача сведена к доказательству того, что точки E, G, A, C лежат на одной окружности — 2 балла.

В решении при помощи движения точек указано недостаточное количество промежуточных точек, для которых следует проверить утверждение — не более 2 баллов.

9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.) (*С. Берлов, Т. Коротченко*)

Решение. Покажем, что Петя сможет определить вес одной гири, даже если у него 8 000 гирь. Положим $n = 4\,000$.

Лемма. *Для любых n гирь Петя может найти две гири, для которых он знает их суммарный вес.*

Доказательство. Пусть Петя положит в прибор по очереди все возможные наборы из 10 гирь из наших n. Заметим, что каждое показание прибора — это вес какой-то из C_n^2 пар гирь (будем говорить, что это показание *использует* эту пару). В то же время, Петя получит C_n^{10} показаний. Значит, одна из пар будет использована хотя бы

$$D = \frac{C_n^{10}}{C_n^2} = \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-9)}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10}$$

раз.

Иначе говоря, найдутся D измерений таких, что (1) в них прибор показывает один и тот же вес S, и (2) во всех десятках, использованных в этих испытаниях, есть две общих гири a и b. Мы покажем, что при выполнении условий (1) и (2) суммарный вес a и b обязательно равен S, то есть вес этой пары Петя и сможет определить по показаниям прибора. Назовём десятки гирь, участвовавшие в этих D измерениях, *нужными*.

Предположим противное: сумма весов a и b не равна S. Рассмотрим все пары из n гирь, суммарные веса в которых равны S (назовём эти пары *хорошими*). Поскольку веса всех гирь различны, хорошие пары не пересекаются; в частности, их не больше, чем $n/2$. При этом в каждой нужной десятке есть не только гири a и b, но и хотя бы одна хорошая пара. Оценим теперь общее количество нужных десяток.

Пусть в нужной десятке хорошая пара не содержит ни a, ни b. Любую такую десятку можно получить, добавив к гирям a и b хорошую пару (не более чем $(n-2)/2$ способами), а затем дополнив шестью из оставшихся $n-4$ гирь. Итого, количество таких десяток не больше, чем $\frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^6$.

Во всех остальных нужных десятках хорошая пара содержит либо a, либо b. Если есть хорошая пара, содержащая a, то такая пара единственна. Для получения нужной десятки, содержащей эту пару, её надо дополнить гирей b и ещё семью гирями из оставшихся $n-3$; итого, таких нужных десяток не больше C_{n-3}^7. Аналогично, нужных десяток, содержащих хорошую пару с гирей b, тоже не больше C_{n-3}^7.

Итого, получаем

$$D \leqslant \frac{n-2}{2}\,C_{n-4}^6 + 2C_{n-3}^7 =$$

$$= D\cdot\left(\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4(n-3)} + \frac{8\cdot 9\cdot 10}{n-2}\right) < D\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = D.$$

Противоречие. □

Завершим решение задачи. Построим следующий граф. Сопоставим каждой гире вершину, Среди каждых n гирь найдём одну пару с известной суммой; две соответствующих вершины соединим ребром. Если в этом графе нет нечётных циклов, то, как известно, его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждое ребро соединяло вершины разных цветов. Но тогда вершин одного цвета не меньше n, и потому среди них мы провели ребро; противоречие.

Значит, в полученном графе есть цикл $w_1, w_2, \ldots, w_{2k+1}$, и Петя знает суммарные веса всех пар соседних гирь в этом цикле. Взяв полусумму всех этих весов, Петя узнаёт суммарный вес всех гирь цикла. Вычтя из него $(w_2+w_3)+(w_4+w_5)+\ldots+$ $+(w_{2k}+w_{2k+1})$, он узнает вес гири w_1.

Замечание. Оценивая чуть точнее, можно доказать лемму даже при $n = 2\,000$.

Комментарий. Доказательство того, что пары с одинаковой суммой не пересекаются — 0 баллов.

Доказательство того, что для победы достаточно найти нечётный цикл в графе из решения — 0 баллов.

Сведение задачи к лемме из решения (при $n = 5000$) — 1 балл.

Доказательство того, что один ответ прозвучал не менее C_n^{10}/C_n^2 раз — 1 балл.

Доказана лемма (возможно, при $n = 10000$) — 4 балла.

Во в целом верном решении при доказательстве леммы упущен случай, когда хорошая пара содержит a или b — снимается 2 балла.

Доказательство утверждения «если 9 элементов лежат в 10 десятках, на которые дали одинаковый ответ, то эти 9 элементов содержат пару с такой суммой» — 1 балл.

10 класс

10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T. *(Л. Емельянов)*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр его описанной окружности, D, E, F — середины его сторон BC, CA, AB соответственно, так что DEF подобен ABC с коэффициентом $1/2$ и $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$.

Комментарий. Пусть ABC — данный треугольник, $A'B'C'$ — треугольник после поворота, $A'' = BC \cap B'C'$ и т.д. Оцениваются (но не суммируются) такие продвижения:

Доказано, что $(AA'B''C'')$ есть окружность (или эквивалентное) — 1 балл.

Доказано подобие $A''B''C'' \sim ABC$ (или эквивалентное) — 2 балла.

Доказано, что $(AA'B''C''O)$ есть окружность (или эквивалентное) — 2 балла.

Доказано, что $CB'A''$ — равносторонний (или эквивалентное) — 1 балл.

Только счёт углов (угол между соответствующими прямыми равен 60° и т.п.) — баллы не добавляются.

Пусть при повороте вокруг O по часовой стрелке на угол 120° точка D переходит в D'. При таком повороте прямая BC переходит в перпендикуляр к OD', проходящий через D', пусть этот перпендикуляр пересекает BC в точке K (см. рис. 3). Видим, что прямоугольные треугольники ODK и $OD'K$ равны (симметричны относительно OK), и поэтому $\angle KOD = \angle DOD'/2 = 60^\circ$, значит, в прямоугольном треугольнике KOD верно $OK = 2OD$. Иными словами, K получается из D в результате поворотной гомотетии: поворота с центром O по часовой стрелке на угол 60° и последующей гомотетии с центром O и коэффициентом 2. Аналогичный результат получим

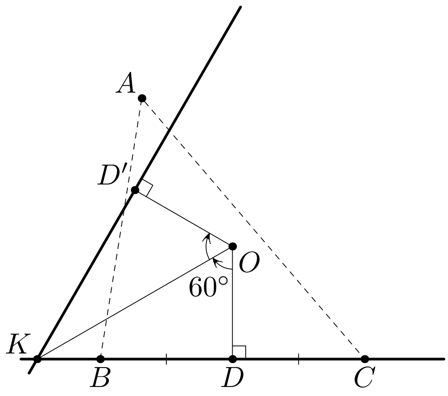

Рис. 3

для других точек L, M пересечения одноцветных прямых. Таким образом, треугольник KLM получается из DEF поворотной гомотетией с центром O и коэффициентом 2. Тогда KLM подобен DEF с коэффициентом 2, следовательно, равен ABC.

10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

Комментарий. Зафиксируем следующие продвижения:

(а) Выбираемые на первом шаге карточки различны.

(б) На втором шаге получаются целые и полуцелые средние арифметические.

(в) Остающиеся после последнего шага карточки различны.

(г) Не может быть такого, что кто-то взял на первом шаге карточку 50, и у кого-то после последнего шага осталась карточка 50.

Тогда следующие комбинации продвижений оцениваются следующим образом:

(а)+(б)+(в) без дальнейших продвижений — 0 баллов.

(а)+(б), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 1 балл.

(а)+(б)+(г) — 1 балл.

(а)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 2 балла.

Задача решена для набора чисел 1, 2, …, 101, но не сведена к исходной — 6 баллов.

10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geqslant 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

(*Т. Коротченко*)

Ответ. Существует при $b > 1$.

Решение. Легко видеть, что если $b = 1$, то всякий многочлен с коэффициентами от 0 до $b - 1$ является нулевым.

Пусть $b > 1$. Представим $a - b$ в b-ичной записи: $a - b = c_n b^n + \ldots + c_1 b + c_0$, где $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}$. Поскольку $a - b \geqslant b$, в этой записи $n \geqslant 1$.

Покажем, что $P(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ удовлетворяет условию. Действительно, для любого многочлена f с целыми коэффициентами $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$. Значит, $P(a) - P(b)$ делится на $a - b = P(b)$. Но тогда и $P(a) = (P(a) - P(b)) + P(b)$ делится на $P(b)$.

Комментарий. В решении упущен случай $b = 1$ — баллы не снимаются.

В решении, аналогичном официальному, не поясняется, почему полученный многочлен непостоянный — снимается 1 балл.

Замечено только, что $P(b)$ есть представление числа в b-ичной системе счисления — 1 балл.

Доказано только, что для $a = bq + r$ (деление a на b с остатком), и для многочлена $P(x) = (q - 1)x + r$ число $P(a)$ делится на $P(b)$ — 1 балл.

Предъявлен многочлен из официальных решений, но не доказано, почему он подходит — 3 балла.

Многочлен $P(x)$ получен из b-ичного представления числа a, после чего утверждается, что многочлен $P(x) - x$ подходит; при этом упущен случай, что коэффициент при x может оказаться равен -1 — 4 балла.

10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами. (*А. Грибалко*)

Решение. Будем изображать турнир в виде таблицы $n \times n$, в которой и столбцы, и строки пронумерованы числами от 1 до n. Столбцы будут соответствовать девочкам, а строки — мальчикам. Тогда каждая партия задаётся клеткой, координаты которой соответствуют номерам девочки и мальчика, играющих в этой партии. Поставим сначала фишку в клетку $(1,1)$. После победы девочки фишка будет перемещаться вверх, а в случае победы мальчика — вправо. При этом если фишка доходит до края таблицы, то из последней строки при движении вверх она перемещается в первую строку, а из последнего столбца при движении вправо — в первый столбец. Тогда условие задачи равносильно тому, что фишка обошла все клетки таблицы, побывав в каждой ровно по одному разу.

Раскрасим клетки таблицы в n цветов по диагоналям, идущим вправо-вниз: первую диагональ — в первый цвет, вторую — во второй, …, n-ю диагональ — в n-й цвет, а следующие диагонали — снова в цвета с первого по $(n-1)$-й. Заметим, что после каждой партии номер цвета клетки, в которой находится фишка, увеличивается на 1 по модулю n. Так как всего в турнире было проведено n^2 партий, что кратно n, то в конце фишка находится в клетке n-го цвета, то есть на главной диагонали (далее, говоря «диагональ», мы будем иметь в виду именно эту диагональ). Пусть финальная клетка в маршруте фишки расположена в столбце с номером m, тогда требуется доказать, что число m нечётно.

Из верхней клетки диагонали фишка не могла пойти вверх, так как уже была в клетке $(1,1)$. Значит, если эта клетка не финальная, то из неё фишка пошла вправо. Тогда и из следующей клетки диагонали она сделала ход вправо, и т.д. до клетки, расположенной в столбце с номером $m-1$. Аналогично из клеток диагонали, находящихся в столбцах с номерами от $m+1$ до n, фишка ходила вверх (см. рис. 4). Пусть первая клетка диагонали, в которую попала фишка, находится в столбце с номером k. Рассмотрим путь фишки от начальной

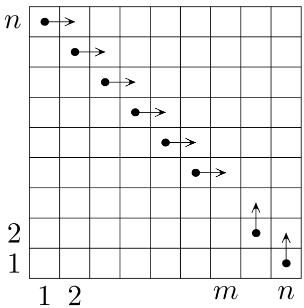

Рис. 4

клетки до неё. Все пути от клеток первого цвета до следующей клетки n-го цвета должны быть такими же, как и рассматриваемый путь, а именно, каждый такой путь получается из другого смещением на вектор $(1, -1)$. Действительно, если бы фишка из клетки $(a-1, b)$ сделала ход вверх, а из клетки $(a, b-1)$ — вправо, то в клетку (a, b) она бы не попала, а если из этих клеток она делала ходы вправо и вверх соответственно, то попала бы в одну клетку дважды; поэтому из каждых двух таких клеток фишка делала одинаковые ходы.

Без ограничения общности будем считать, что $k < m$. Клетки диагонали, находящиеся левее финальной клетки, будем называть *левыми*, а находящиеся правее — *правыми*. Пронумеруем левые клетки числами от 1 до $m-1$, а правые — от 1 до $n-m$ (и те, и другие нумеруем, двигаясь вправо-вниз). Посмотрим, в каком порядке фишка обходила эти клетки. С левых клеток она смещалась на k клеток вправо (поскольку с них в клетку первого цвета она делала ход вправо), а с правых клеток — на $k-1$ клетку вправо. Значит, для левых клеток нам важен лишь остаток от деления номера на k, а для правых — от деления на $k-1$. При этом, если правых клеток меньше k, то можно увеличить n на $2(k-1)$, добавив $2(k-1)$ правых клеток; это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Для удобства заменим все номера клеток на соответствующие остатки, причём для правых клеток вместо остатка 0 будем использовать число $k-1$.

Пусть число m при делении на k даёт остаток d. Тогда первый переход с левых клеток на правые был с числа 0 на число $k-d$, и в этот момент все клетки с нулём в левой части были посещены. На диагонали остались только числа от 1 до $k-1$. Дальше цепочка переходов между правыми и левыми клетками выглядит так: $k-d \to \dots \to d$. В этой цепочке каждое число от 1 до $k-1$ встречается два раза, начинается она на правых клетках, а заканчивается на левых. Переходы с правых клеток на левые будем называть переходами *первого типа*, а с левых на правые — *второго*. Тогда в цепочке $k-1$ переход первого типа и $k-2$ перехода второго, и они чередуются.

Докажем, что каждые два числа в цепочке, симметричные относительно её центра, дают в сумме k. Для крайних чисел это верно. Каждые два симметричных перехода имеют один тип, поэтому в них по модулю $k-1$ (для переходов первого типа) или по модулю k (для переходов второго типа) прибавляется одно и то же число. Значит, сумма следующих двух симметричных чисел (которые ближе к центру цепочки) снова равна либо 1 по модулю $k-1$, либо 0 по модулю k. Но сумма самих чисел не меньше 2 и не больше $2k-2$, поэтому она может быть равна только k.

Предположим, что число m чётно, и рассмотрим два случая.

1) Число k нечётно. Тогда центральный переход в цепочке имеет второй тип. У правой нижней клетки диагонали нечётный номер, поскольку число $n-m$ нечётно, а $k-1$ чётно. Левая верхняя клетка диагонали тоже имеет нечётный номер, поэтому при переходе первого типа чётность числа меняется. Пусть с числа 1 переход первого типа происходит на число $2s$. Тогда по модулю $k-1$ переходы первого типа выглядят так: $1 \to 2s$, $2 \to 2s+1$, $\ldots$, $k-1 \to 2s+k-2$. Суммы чисел в этих парах являются последовательными нечётными числами, поэтому при делении на $k-1$ они дают все нечётные остатки по два раза. В частности, есть переход, в котором сумма чисел равна 1 по модулю $k-1$. Как показано выше, эта сумма равна k. Но тогда для этого перехода симметричный ему тоже имеет первый тип и содержит те же самые числа, то есть один из переходов повторился, чего быть не должно.

2) Число k чётно. Тогда у центрального перехода в цепочке первый тип. Последняя левая клетка имеет нечётный номер, так как число $m-1$ нечётно, а k чётно. У первой правой клетки тоже нечётный номер, значит, при переходе второго типа чётность числа не меняется. Аналогично первому случаю можно показать, что среди них найдётся переход, пара чисел в котором даёт сумму k, и получаем такое же противоречие.

Замечание. После описания того, в каком порядке фишка обходит клетки диагонали (с левых сдвигается вправо на k клеток, а с правых — на $k-1$) решение можно завершить по-другому.

Пронумеруем все клетки диагонали числами от 1 до n слева направо. Проведём стрелку из каждой клетки в клетку, в которой фишка появляется в следующий раз; эти стрелки образуют путь, начинающийся в клетке k и заканчивающийся в клетке m. Добавим стрелку, ведущую из клетки m в клетку k; получим цикл, проходящий по всем клеткам диагонали.

Этот цикл определяет перестановку σ чисел $1, 2, \ldots, n$, где $\sigma(i)$ — это номер клетки, в которую ведёт стрелка из клетки i. Эта перестановка — цикл на n элементах. Напомним, что перестановка, являющаяся циклом на b элементах, имеет чётность, отличную от чётности числа b. Поэтому перестановка σ чётна.

С другой стороны, σ получается как композиция (последовательное применение) двух перестановок: τ, которая отправляет $x \mapsto x + (k-1) \bmod n$, и θ, действующей как $k \mapsto (k+1) \mapsto$ $\mapsto (k+2) \mapsto \ldots \mapsto (m+k-1) \mapsto k$. Перестановка τ состоит из нескольких циклов одинаковой длины; поэтому эти циклы нечётной длины, и потому τ чётна. Значит, и θ чётна, что как раз и означает, что m нечётно.

Комментарий. В решении произведён переход к таблице $n \times n$ — 0 баллов.

Доказано только, что номера имеют одинаковую чётность — 0 баллов.

Сформулировано и доказано только, что сумма номеров даёт остаток 1 при делении на n; иными словами, что последняя клетка будет на главной диагонали — 1 балл.

Доказано, что во всех клетках одной диагонали, кроме главной, ходы были одинаковы — 1 балл.

Доказано, что все ходы из главной диагонали до конечной клетки направлены в одну сторону, а после — в другую — 0 баллов.

Доказано, что последняя клетка на диагонали, а также что разница между соседними посещениями клеток главной диагонали равна k или $k+1$ — 3 балла. Это продвижение не суммируется с предыдущими.

10.5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого произведение чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них. (*А. Храбров*)

Ответ. 20!.

Решение. При $n = 20!$ имеем $\dfrac{n(n+1)(n+2)\dots(n+20)}{n^2} =$ $= \dfrac{(n+1)(n+2)\dots(n+20)}{20!} = C_{n+20}^{20}$ — целое число.

Пусть теперь $n > 20!$ и пусть $P = n(n+1)(n+2)\dots(n+20)$ делится на k^2, где $k = n+i$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$. Имеем $P/k =$ $= (k-i)(k-i+1)\dots(k-1)(k+1)(k+2)\dots(k+j)$, где $j = 20-i$. Заметим, что число $P/k \equiv (-1)^i i!j! \pmod k$ должно делиться на k. Но $0 < i!j! \leqslant i!\cdot(i+1)(i+2)\dots(i+j) = 20! < n \leqslant k$, значит, $i!j!$ не делится на k. Противоречие.

Комментарий. Только (верный) ответ — 1 балл.

Проверка, что ответ подходит — 1 балл.

Оценка — 5 баллов.

Непроведённые вычисления, требующие от жюри существенной работы по проверке — снимается 1 балл.

Арифметическая ошибка, приводящая к неправильному вычислению одного из показателей — снимается 2 балла.

Явно сформулированное неравенство $k!(20-k)! \leqslant 20!$ принимается без доказательства.

Используется, но не доказано, что произведение $|i-k|$ по всем i, кроме k, меньше $20!$ — снимается 1 балл.

Утверждение о том, что если $(x, y) = d$, то x/d взаимно просто с y — снимается 2 балла.

Неправильная работа с неравенствами при подсчёте степени вхождения — снимается 1 балл.

10.6. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения? (*С. Берлов*)

Ответ. 100.

Решение. *Пример.* Верхнюю и нижнюю горизонтали разобьём на горизонтальные доминошки — они окажутся в квадратах 2×2. Остальной прямоугольник 98×100 разобьём на вертикальные доминошки — они не окажутся в квадратах 2×2.

Оценка. Рассмотрим квадраты A_1, A_3, …, A_{99} размеров 1×1, 3×3, …, 99×99, у которых левый нижний угол совпадает с левым нижним углом исходного квадрата 100×100. Для каждого из квадратов A_i ($i = 1, 3, 5, \ldots, 99$) найдётся доминошка X_i, пересекающая его сторону (поскольку квадраты нечётной площади не разбиваются на доминошки). Легко видеть, что X_i лежит внутри квадратика 2×2 из разбиения.

Аналогично, рассматривая квадраты B_1, B_3, $\ldots$, B_{99} размеров 1×1, 3×3, $\ldots 99\times99$, у которых правый верхний угол совпадает с правым верхним углом исходного квадрата 100×100, находим ещё 50 нужных нам доминошек Y_j ($j = 1, 3, 5, \ldots, 99$).

Это завершает решение (очевидно, что все доминошки X_1, X_3, $\ldots$, X_{99}, Y_1, Y_3, $\ldots$, Y_{99} различны).

Замечание. Приведём схему несколько другого доказательства оценки.

Пусть внутри квадратов 2×2 оказалось не более 99 доминошек.

Проведём 50 вертикальных линий сетки v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} так, что v_i отделяет i столбцов слева. Легко видеть, что любая доминошка, пересекаемая одной из линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99}, нам подходит. Каждая вертикальная линия пересекает чётное количество доминошек, так как слева от этой линии чётное количество клеток. Значит, среди линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} есть линия v_i, не пересекающая доминошек, иначе мы уже нашли хотя бы $2\cdot50 = 100$ нужных нам доминошек. Проведём аналогичное рассуждение для 50 горизонтальных линий сетки h_1, h_3, h_5, $\ldots$, h_{99} и найдём среди них линию h_j, не пересекающую доминошек. Но v_i и h_j делят доску на области с нечётным количеством клеток, поэтому хотя бы одна из этих двух линий обязана пересекать доминошку. Противоречие.

Комментарий. Только пример — 1 балл.

Доказано лишь, что число доминошек чётно — 0 баллов.

Критерии решения с путями из хороших (лежащих в квадратах 2×2) доминошек следующие.

Только идея путей — 0 баллов.

Доказано, что рядом с каждой хорошей доминошкой есть ещё хотя бы одна хорошая, и есть идея построения пути из этих доминошек — 1 балл.

Для полного решения задачи осталось решить проблему зацикливания и пересечения путей из доминошек, при этом НЕТ разбиения на области сдвигом сетки и построения из них графа с чётными степенями вершин, и есть пример — всего 3 балла.

Для полного решения задачи осталось решить проблему зацикливания и пересечения путей из доминошек, при этом ЕСТЬ разбиение на области сдвигом сетки и построения из них графа с чётными степенями вершин, и есть пример — 5 баллов.

Попытка закрыть проблему зацикливания тем, что в таком случае получается область нечётной области, БЕЗ полного и верного доказательства — 0 баллов.

Задача решена, но с доказательством пересечения путей есть незначительные ошибки — 6 баллов.

Критерии решения с разбиением на области, каждая из которых содержит хорошую (лежащую в квадрате 2×2) доминошку, следующие.

Разбиение на области, в каждой из которых действительно есть хотя бы одна хорошая доминошка (но это не доказано) — 1 балл.

Есть разбиение на области и доказательство, что задача решена, если бы мы доказали, что в каждой области есть хотя бы одна хорошая доминошка; но само это утверждение не доказано или содержит существенные ошибки — всего 3 балла.

Есть разбиение на области и доказательство, что задача решена, если бы мы доказали, что в каждой области есть хотя бы одна хорошая доминошка, но само это утверждение доказано с небольшими помарками — 5 или 6 баллов.

Попытки подсчёта числа границ квадратов 2×2 (внутренних или внешних), не доведённые до верного решения — 0 баллов.

10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 5; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

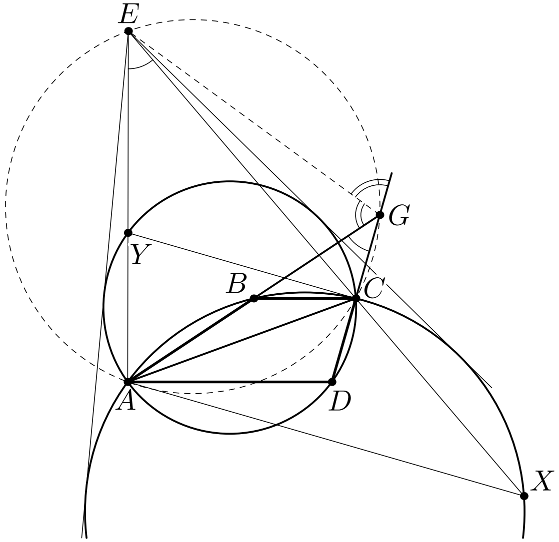

Рис. 5

Но $\angle AXC = 180° - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180° - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка*

Микеля этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

Комментарий. Показано, что отношения радиусов окружностей в парах равны (и равны отношению боковых сторон) — баллы не добавляются.

Получены результаты о конфигурации из центров окружностей и положении E и F относительно них (например, направления O_iO_j, подобие конструкции из центров и $ABCD$, $AE = EC$, $EO_1/EO_2 = r_1/r_2$, проекции EO_1 и FO_2 на AD равны, и эквивалентные продвижения) — баллы не добавляются.

Утверждается без доказательства, что EF есть внешняя биссектриса — баллы не добавляются.

Рассмотрены инверсия + симметрия (меняющие местами окружности (ABC) и (ADC)) — баллы не добавляются.

Рассматриваются гомотетии, композиции гомотетий, применения теоремы о колпаках (без дальнейшего продвижения) — баллы не добавляются.

Пусть $BA'D'C$ — образ $ABCD$ при гомотетии с центром G. Задача сведена к факту совпадения центров гомотетии пар окружностей (ABC), $(D'BC)$ и (DBC), $(A'BC)$ — 1 балл.

10.8. Дано число $a \in (0, 1)$. Положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$ и $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$. (*А. Храбров*)

Ответ. $n + a^2$.

Решение. Заметим, что равенство достигается при $x_0 = a$ и $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

Запишем $\sum x_k^2 = \sum(1-x_k)^2 + 2\sum x_k - (n+1) = \sum(1-x_k)^2 +$

$+ n - 1 + 2a$. Достаточно доказать, что $\sum(1 - x_k)^2 \geqslant (1 - a)^2$. Пусть x_0 — наименьшее из чисел.

При $x_0 \leqslant a$ имеем $\sum(1 - x_k)^2 \geqslant (1 - x_0)^2 \geqslant (1 - a)^2$.

Если же $x_0 \geqslant a$, то $\sum(1 - x_k)^2 = \sum x_k \left(\frac{1}{x_k} - 2 + x_k\right)$, что, поскольку выражения в скобках неотрицательны, не меньше, чем $a \sum \left(\frac{1}{x_k} - 2 + x_k\right) = a\left(n + \frac{1}{a} - 2(n+1) + n + a\right) = a\left(\frac{1}{a} - 2 + a\right) = (a-1)^2$.

Комментарий. Доказано, что каждая переменная не меньше a — 1 балл.

Ответ с примером без обоснований — 0 баллов.

Неполное решение, основанное на методе множителей Лагранжа (не упоминается, что точка минимума существует и/или что точка минимума не является граничной) — 0 баллов.

Неполное решение, основанное на pqr-методе. Например, не доказывается строго, что при фиксации отношения q/r в точке максимума какие-то два корня совпадают. Как правило, в качестве «доказательств» приводятся или подмены утверждений на равносильные («тут ещё были решения, а тут нет, поэтому какие-то два совпадают»), или неформализуемые рассуждения про движения графиков («график движется непрерывно, поэтому корни совпадают») — 0 баллов.

11 класс

11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. (*Н. Агаханов*)

Решение. Положим $a = \sin x + \operatorname{tg} x$ и $b = \cos x + \operatorname{ctg} x$. Введём обозначения: $u = \sin x + \cos x$ и $v = \sin x \cdot \cos x$. По условию рациональными являются числа $c = a + b = u + \frac{1}{v}$ и $d = a \cdot b = v + u + 1$. Отсюда $k = d - c = v + 1 - \frac{1}{v}$. Значит, $t = \sin 2x = 2v$ — корень квадратного уравнения $t^2 + 2t - (4 + 2kt) = 0$ с рациональными коэффициентами, откуда следует требуемое.

Комментарий. Деление на выражение, которое может обращаться в 0, при отсутствии разбора случая, когда оно равно 0 (как правило, в таких случаях получалось ошибочное утверждение, что $\sin 2x$ есть рациональное число) — не более 1 балла.

Ошибка в алгебраических преобразованиях, не влияющая на ход решения — снимается 1 балл.

11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

Комментарий. Зафиксируем следующие продвижения:

(а) Выбираемые на первом шаге карточки различны.

(б) На втором шаге получаются целые и полуцелые средние арифметические.

(в) Остающиеся после последнего шага карточки различны.

(г) Не может быть такого, что кто-то взял на первом шаге карточку 50, и у кого-то после последнего шага осталась карточка 50.

Тогда следующие комбинации продвижений оцениваются следующим образом:

(а)+(б)+(в) без дальнейших продвижений — 0 баллов.

(а)+(б), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 1 балл.

(а)+(б)+(г) — 1 балл.

(а)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г) — 1 балл.

(а)+(б)+(в)+(г), при этом найдено количество элементов в объединении множеств возможных средних арифметических на 1 и 2 шаге — 2 балла.

Задача решена для набора чисел 1, 2, …, 101, но не сведена к исходной — 6 баллов.

11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

(*М. Антипов*)

Ответ. 2^{99}.

Решение. Сопоставим строке $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ чисел от 1 до 100 последовательность из 99 знаков $<$ и $>$ в соответствии с тем, как упорядочены соседние числа. То есть если $x_k < x_{k+1}$, то k-й знак в этой последовательности равен $<$, в противном случае он равен $>$. Заметим, что разрешённые операции над строкой не меняют соответствующую ей последовательность знаков. Действительно, из пары чисел x_k и x_{k+1} меняется не более одного и не более чем на 1. Поэтому знак неравенства между ними не может измениться на противоположный. Сопоставим каждой перестановке знаков расстановку чисел по следующему правилу (далее такие расстановки будем называть *выделенными*). При $k = 1, 2, \ldots, 99$ если $x_k > x_{k+1}$ (т.е. k-й знак $<$) поставим на место x_k наибольшее из не выбранных ранее чисел, если же $x_k < x_{k+1}$ — наименьшее из не выбранных ранее чисел. Заметим, что при такой последовательности операций числа, не выбранные за первые k шагов, будут образовывать отрезок натурального ряда (а выбранными окажутся несколько наибольших и несколько наименьших чисел от 1 до 100). В частности, $x_1 = 1$ или $x_1 = 100$. Число x_{100} заменим на единственное оставшееся число.

Нетрудно видеть, что полученная расстановка чисел соответствует выбранной последовательности знаков. Всего выделенных расстановок будет столько же, сколько и различных последовательностей знаков, то есть 2^{99}. В силу сказанного выше, разрешёнными операциями никакие две из выделенных строк разрешёнными операциями нельзя сделать одинаковыми. Таким образом, заполнив таблицу 100×2^{99} выделенными строками, мы получаем пример для $n = 2^{99}$.

Теперь докажем, что из любой строки A длины 100 можно получить выделенную строку B с той же расстановкой знаков. Из этого последует, что $n \leqslant 2^{99}$. Предположим, что первые $t-1$ знаков данной строки $A = (x_1, \ldots, x_{100})$ и выделенной строки $B = (y_1, \ldots, y_{100})$ совпадают. Если $t = 100$, то и сами строки совпадают. Пусть $t < 100$. Без ограничения общности будем считать, что $x_t < x_{t+1}$. В силу сказанного выше наборы чисел $y_t, \ldots, y_{100}$ и $x_t, \ldots, x_{100}$ совпадают и образуют отрезок натурального ряда с наименьшим числом x_t. Поскольку $y_t < y_{t+1}$, можно менять в строке A на месте t с числом на единицу меньшим, пока на месте t не окажется число x_t. Таким образом, мы добились совпадения первых t символов у нашей строки с выделенной строкой B. Значит, такими операциями можно из любой строки получить выделенную строку, что завершает доказательство оценки.

Комментарий. Баллы за все указанные ниже продвижения **не** суммируются.

Только ответ — 0 баллов.

Совершён переход к обратным перестановкам — 0 баллов.

Указан правильный набор представителей — 1 балл.

Указан правильный набор представителей и доказано, что от каждой перестановки можно перейти к какому-то представителю. Не доказано, что между представителями нельзя перейти — 3 балла.

Доказано (главное — сформулировано), что сохраняется последовательность знаков разностей соседних чисел — 2 балла.

Доказано, что $n \leqslant 2^{99}$ — 3 балла.

Незавершённая индукция — 0 баллов.

11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим точки пересечения прямой MH с прямыми AB, AC, BI и CI через P, Q, X и Y соответственно (см. рис. 6). Пусть прямые AI, BI и CI повторно пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, $\angle ABI = \angle CBI = \beta$, $\angle ACI = \angle BCI = \gamma$, тогда $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ из суммы углов треугольника ABC. Поскольку $MH \perp AI$, имеем $\angle AQM = 90^\circ - \alpha$. Так как четырёхугольник

ABA_1C — вписанный, $\angle MA_1C = 90^\circ - \angle BCA_1 = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle MA_1C + \angle MQC = 180^\circ$, поэтому четырёхугольник A_1CQM — вписанный. Следовательно, $\angle AQA_1 = 90^\circ$. Аналогично $\angle APA_1 = 90^\circ$, откуда следует, что точки A, A_1, P, Q лежат на окружности γ, построенной на отрезке AA_1 как на диаметре.

Теперь заметим, что $\angle QC'C = \angle QYC = 90^\circ - \angle CIA_1 = 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta$. Однако из вписанности четырехугольника $BC'CB_1$ мы получаем, что $\angle CC'B_1 = \angle B_1BC = \beta = \angle CC'Q$. Следовательно, точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой. Аналогично, точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой.

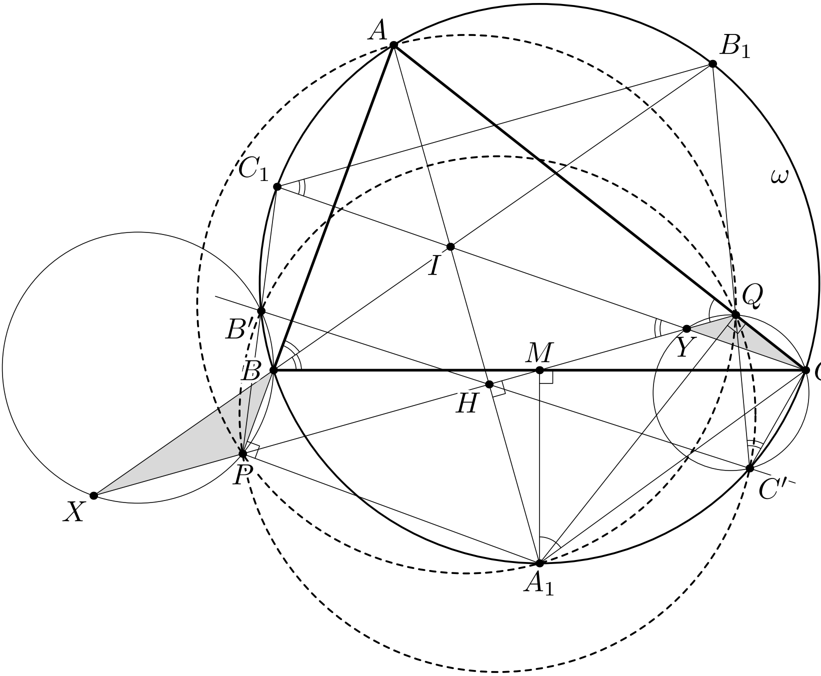

Рис. 6

В силу сказанного выше и вписанности четырёхугольника C_1B_1CB имеем, что $\angle CC_1B_1 = \beta = \angle CYQ$, поэтому $C_1B_1 \parallel PQ$. Поскольку четырёхугольник $B'C_1B_1C'$ вписанный, $\angle PB'C' = \angle C_1B_1C' = \angle PQC'$. Значит, четырехугольник $B'QC'P$ — вписанный. Тогда радикальные оси его описанной окружности, окружности γ и окружности ω пересекаются в одной точке, а это прямые $B'C'$, PQ и AA_1. Следовательно, точка H лежит на прямой $B'C'$, что и требовалось доказать.

Замечание. Приведём другой способ закончить решение после того, как установлено, что точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой, и точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой. Обозначим через N середину дуги BAC. Пусть прямая AX повторно пересекает окружность ω в точке T. Заметим, что $\angle CC'Y = \angle AQY = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle CC'B$. Следовательно, $C'Y$ — биссектриса угла $CC'B$, поэтому на прямой $C'Y$ лежит точка N. Аналогично, она лежит на прямой XB'. Применяя теорему Паскаля для точек $ATC'B_1BC$ мы получаем, что точка X, точка Q и точка пересечения $C'T$ и BC лежат на одной прямой. Следовательно, прямые BC, XQ и $C'T$ пересекаются в одной точке, то есть точка M лежит на $C'T$. Теперь применяем теорему Паскаля для точек $ATC'B'NA_1$ и получаем, что точки X и M вместе с точкой пересечения AA_1 и $B'C'$ лежат на одной прямой. Значит, точка H лежит на $B'C'$, что и требовалось.

Комментарий. Общие критерии по задаче отражены в группах (G), (M), (Z). Критерии трёх основных планов решения указаны под буквами (A), (B) и (C). Продвижения внутри одной из групп (A), (B), (C) суммируются, продвижения внутри разных групп не суммируются (выставляется максимальный балл за части (A), (B), (C)).

(G) В неоконченном счётном решении оцениваются лишь продвижения, явно сформулированные в работе и имеющие геометрический смысл.

(M) Отмечена и используется в решении точка пересечения прямых $B'C_1$ и B_1C', при этом полностью игнорируется случай, когда эти прямые параллельны — снимается 1 балл.

(Z) Далее сгруппированы продвижения, которые оцениваются в **0 баллов**.

(Z1) Отмечены точки C_1, A_1, B_1 (середины «меньших» дуг AB, BC, CA).

(Z2) Отмечена середина T дуги BAC.

(Z3) Счёт углов без построения новых точек, подобие треугольников T_b и T_c.

(Z4) Доказано, что AT, PQ, B_1C_1 параллельны, и все они перпендикулярны биссектрисе AI.

(Z5) Доказано, что пятёрки точек X, B', I, Q, C и P, B, I, Y, C' лежат на одной окружности.

(A) Схема оценивания официального решения (пересечение трёх радикальных осей).

(A0) Доказано, что четырёхугольники $PBMA_1$ и A_1MQC вписанные (или что PQ — прямая Симсона точки A_1 относительно треугольника ABC) — 0 баллов.

(A1) Явно сформулировано и доказано, что четырёхугольник APA_1Q вписанный — 1 балл.

(A2) Доказано, что точки P, B', C_1 лежат на одной прямой — 1 балл.

(A3) Доказано, что четырёхугольник $PB'QC'$ вписанный — 2 балла.

(B) Схема оценивания решения, в котором доказывается, что $B'C'H$ — прямая Симсона точки A_1 относительно треугольника XTY.

(B0) Доказано, что $XBYC$ вписанный — 0 баллов.

(B1) Доказано, что точка T лежит на XB' (и YC') — 1 балл.

(B2) Доказано, что TXA_1Q — вписанный четырёхугольник — 3 балла.

(C) Схема оценивания решения с помощью проективных отображений.

(C0) Доказано, что $BP = CQ$ — 0 баллов.

(C1) На AC отмечена точка V так, что $CQ = QV$, и доказано, что BV и AI перпендикулярны — 0 баллов.

(C2) Доказано, что прямые A_1Q и BV пересекаются в некоторой точке U, лежащей на окружности ω — 1 балл.

(C3) Основные свойства проективных отображений (двойное отношение четырёх точек сохраняется при центральной проекции, проективное отображение однозначно задается образами трёх точек и т.д.) считаются известными.

11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша? (*Г. Никитин*)

Ответ. Побеждает Гриша.

Решение. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$. Гриша разобьёт числа на доске на две группы по 5 и будет возводить в квадрат числа из первой группы и из второй группы по очереди. Легко видеть, что квадраты целых чисел, не кратных 7, при делении на 7 могут давать лишь остатки 1, 2 и 4. Следовательно, после увеличения максимум на 2 числа на доске будут давать при делении на 7 только остатки 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Значит, ни одно из чисел не будет делиться 7, а поэтому не будет делиться и на 2023.

Замечание. Существуют и другие решения.

Комментарий. Число 2023 неверно разложено на простые множители, но это не влияет на решение задачи — снимается 1 балл.

При переборе квадратичных вычетов по модулю 7 пропущен вычет, отличный от 0 — снимается 2 балла.

Приведено рассуждение, решающее задачу для простых чисел p вида $8k + 7$, но в качестве p выбрано составное число или число, не являющееся делителем 2023 — не более 2 баллов.

11.6. Плоскость α пересекает рёбра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X, Y, Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω, построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω. Докажите, что середины рёбер AB, BC, CD, DA и точка P лежат в одной плоскости. (*А. Кузнецов*)

Решение. Из условия задачи мы сразу получаем, что $\angle XYZ = 90^\circ = \angle XTZ$. Обозначим через Q точку пересечения прямых XY и ZT, через R — точку пересечения прямых ZY и XT (см. рис. 7). Без ограничения общности можно считать, что точка Z лежит на отрезках RY и QT. Поскольку точка R лежит и в плоскости ABD, и в плоскости BCD, то она лежит на прямой BD. Аналогично, точка Q лежит на прямой AC.

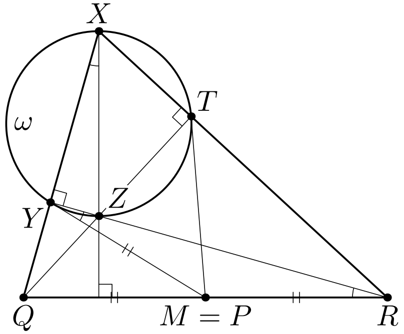

Рис. 7

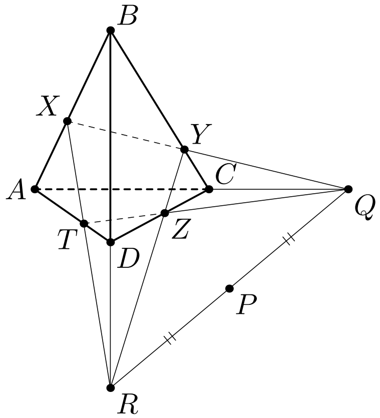

Рис. 8

Заметим, что RY и QT — высоты треугольника XQR. Тогда Z — точка пересечения высот этого треугольника, и поэтому $XZ \perp QR$. Пусть M — середина отрезка QR. Поскольку $\angle QYR = 90^\circ$, то $YM = MR = RQ$ по свойству медианы прямоугольного треугольника. Значит, $\angle MYR = \angle YRQ = 90^\circ - \angle XQR = \angle ZXQ$. Следовательно, прямая YM касается окружности ω. Аналогично, прямая TM тоже касается окружности ω, поэтому точки M и P совпадают.

Рассмотрим две параллельные плоскости β и γ, одна из которых содержит отрезок AC, а другая — отрезок BD. Заметим, что середины всех отрезков, соединяющих точку из плоскости β и точку из плоскости γ, лежат в одной плоскости, параллельной β и γ. Действительно, если ввести декартовы координаты так, что одна из плоскостей задаётся уравнением $z = 0$, а другая — уравнением $z = h$ (где h есть расстояние между плоскостями β и γ), то середины всех рассматриваемых отрезков лежат в плоскости $z = h/2$. Применяя это наблюдение для отрезков AB, BC, CD, DA, QR, мы получаем, что их середины лежат в одной плоскости, что и требовалось.

Комментарий. Общие критерии приведены в группах (G), (M), (X). Схема оценивания официального решения в критериях

(A)–(C). Продвижения (B1) и (B2) не суммируются, все остальные — суммируются.

(G) В неоконченном счётном решении оцениваются лишь продвижения, явно сформулированные в работе и имеющие геометрический смысл.

(M1) Решение не работает лишь в некотором специальном случае (например, одна из вершин X, Y, Z, T — середина ребра тетраэдра) — снимается 1 балл.

(M2) Использование неверных стереометрических утверждений или некорректных построений (например, используется «точка пересечения» скрещивающихся прямых и т.д.) — снимается не менее 2 баллов. (X) (Невозможный) случай, когда $XYZT$ — прямоугольник (или, эквивалентно, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны) не оценивается.

(A0) Используется без доказательства, что прямые XY, ZT и AC пересекаются в одной точке — баллы не снимаются.

(A) Построены (и явно определены) точки Q и R из официального решения (в частности, указано, что каждая из них лежит на продолжении ребра тетраэдра и продолжениях двух сторон четырёхугольника $XYZT$) — 1 балл.

(B1) Доказано, что точка P лежит на прямой QR — 1 балл.

(B2) Доказано, что P есть середина отрезка QR — 2 балла.

(C0) Утверждение о том, что середины отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых (или в двух параллельных плоскостях) лежат в одной плоскости, можно использовать без доказательства.

(C1) Задача сведена к тому, что на прямых AC и BD есть такие точки U и V, что P есть середина отрезка UV — 1 балл.

11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый. (*И. Богданов, Г. Челноков*)

Решение. Многочлен $P(x)$ называется *целозначным*, если $P(k)$ — целое число при любом целом k. Нам надо доказать, что, если многочлены $P(x)$ и $P'(x)$ целозначны, причём степень $P(x)$ равна d, то старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — целозначный многочлен степени d. Тогда все коэффициенты многочлена $d! \cdot P(x)$ целые.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} P(i) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-(i-1))(x-(i+1))\ldots(x-d)}{(i-0)(i-1)\ldots(i-(i-1))(i-(i+1))\ldots(i-d)}.$$

Его степень не больше d, и его значения совпадают с соответствующими значениями $P(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, d$. Это означает, что многочлен $P(x) - Q(x)$ имеет степень не выше d, а также обнуляется в $d+1$ точке. Поэтому он нулевой, то есть $P(x) = Q(x)$. (Формула выше — это частный случай *интерполяционной формулы Лагранжа.*)

Осталось заметить, что в формуле выше в i-м слагаемом знаменатель равен $(-1)^{d-i} i!(d-i)!$; это число делит $d!$, поскольку $\frac{d!}{i!(d-i)!} = C_d^i$. Значит, при умножении каждого слагаемого на $d!$ получается многочлен с целыми коэффициентами. □

Перейдём к решению задачи. Индукция по d. База при $d = 0$ тривиальна. Для перехода индукции рассмотрим бицелозначный многочлен $P(x)$ степени d; пусть его старший коэффициент равен a.

Если d не является простым числом, то $N_d = dN_{d-1}$. Заметим, что многочлен $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ также бицелозначный, имеет степень $d-1$ и старший коэффициент ad. По предположению индукции, число $N_{d-1} \cdot ad = N_d a$ является целым, что и требовалось доказать.

Пусть теперь d — простое число; тогда $N_d = N_{d-1}$, и то же рассуждение даёт, что число $dN_d a$ является целым. Предположим, что $N_d a$ — нецелое число; тогда знаменатель числа a (в несократимой записи) делится на простое число d.

Заметим, что сумма всех коэффициентов многочлена $P(x)$ — это целое число $P(1)$. Поскольку знаменатель числа a делится на d, среди коэффициентов многочлена $P(x)$ найдётся ещё один, у которого знаменатель делится на d; пусть это коэффициент b при x^i, $i < d$. Заметим, что $i > 0$, так как число $P(0)$ целое.

Но тогда у целозначного многочлена $P'(x)$ коэффициент при x^{i-1} равен ib и также имеет знаменатель, кратный d. Поскольку d — простое число, отсюда вытекает, что коэффициент при x^{i-1} у многочлена $(d-1)!P'(x)$ нецелый, что противоречит лемме.

Замечание 1. Случай простого d можно разобрать и другими способами. Приведём один из них.

Предположим, что число $dN_d a$ целое, а $N_d a$ — нет, так что $N_d a = t/d$ для некоторого целого t, не кратного d. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = N_d P(x) - N_d a \cdot (x-1)(x-2)\ldots(x-d). \qquad (*)$$

Он целозначен, поскольку при любом целом k число $(k-1)(k-2)\ldots(k-d)$ делится на $d!$. Кроме того, его степень меньше d. Из леммы вытекает, что знаменатели коэффициентов многочлена $Q(x)$ не делятся на d.

Рассмотрим теперь целое число $c = N_d P'(d)$. Из формулы $(*)$ нетрудно получить, что

$$c = Q'(d) + \frac{t}{d} \cdot (d-1)(d-2)\ldots(d-(d-1)).$$

При этом первое слагаемое — это несократимая дробь со знаменателем, не делящимся на d, а второе — с делящимся. Это невозможно для целого c.

Замечание 2. Как доказали D. Brizolis и E. G. Straus, наименьшее N, для которого старший коэффициент многочлена $NP(x)$ обязательно целый, равно $d!\prod_p p^{-k(p,d)}$, где произведение берётся по всем простым p, а $k(p,d)$ — это наибольшее целое неотрицательное число k, для которого верно неравенство $kp^k - (k-1)p^{k-1} \leqslant d$.

Комментарий. (Z1) Доказательство факта, что любой целозначный многочлен степени n после домножения на $n!$ имеет целые коэффициенты — 0 баллов.

(Z2) Выписанный многочлен Лагранжа — 0 баллов.

(Z3) Доказательство факта, что C_x^k является базисом целозначных многочленов — 0 баллов.

(Z4) Доказательство для любого конечного множества различных d — 0 баллов.

(M) Грубые ошибки в доказательстве стандартных утверждений — снимается не менее 1 балла.

(A) Доказан переход индукции для составного d — 1 балл.

(B) Доказано, что в знаменателе многочлена нет простого множителя $p > d/2$, или доказано иное утверждение, из которого немедленно следует переход индукции для простого d — 3 балла.

(C) Показано, что достаточно рассмотреть случай многочлена, кратного $x^2 - 1$ балл. Не суммируется с критерием (B).

11.8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k-оптимальной.* Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует k-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$. (*В. Буслов*)

Решение. Рассматриваемые сети из $N-k$ дорог называем далее *k-сетями.* Рассмотрим неориентированный граф, образованный дорогами k-сети. В нём не более чем k компонент связности, поскольку в каждой есть выделенный город. С другой стороны, компонент не менее k, поскольку рёбер всего не более чем $N-k$. Поэтому компонент ровно k, каждая из них есть дерево, содержит единственный выделенный город и — вспоминая про ориентацию — рёбра каждого дерева направлены по направлению к выделенному городу. В частности, из каждого не выделенного города должна выходить ровно одна дорога, а из выделенного 0 дорог.

Рассмотрим $(k+1)$-оптимальную сеть A с выделенными городами $y_0, y_1, \ldots, y_k$ и k-оптимальную сеть B с выделенными городами $x_1, \ldots, x_k$. Не умаляя общности, ни из одного x_i нельзя добраться в сети A до города y_0. Пусть U — множество городов, из которых в A можно добраться до y_0, а α, β — множества дорог, выходящих из U в сетях A, B соответственно. Имеем $|\alpha| = |U| - 1$, $|\beta| = |U|$.

Рассмотрим сеть $D := (A \setminus \alpha) \cup \beta$. Утверждается, что это k-сеть для выделенных городов $y_1, \ldots, y_k$. В самом деле, число дорог в ней равно $|D| = N - k - 1 - (|U| - 1) + |U| = N - k$. Из каждого города, кроме $y_1, \ldots, y_k$ выходит ровно одна дорога. Выезжая из любого города вне U и используя дороги сети, мы по-прежнему можем попасть в один из городов $y_1, \ldots, y_k$. Выезжая из города в U, мы либо попадаем вне U — и далее в один из городов $y_1, \ldots, y_k$, — либо зацикливаемся в U. Но тогда β содержит цикл, что невозможно.

Рассмотрим сеть $C := (B \setminus \beta) \cup \alpha$. Утверждается, что это $(k+1)$-сеть для выделенных городов $x_1, \ldots, x_k, y_0$. В самом деле, $|C| = n - k - 1$, и выезжая из любого города по дорогам сети C, мы либо попадаем в U — и тогда по α доезжаем до y_0, — либо ни разу не попадаем в U и тогда доезжаем до одного из городов $x_1, \ldots, x_k$.

Итак, C, D — k-сеть и $(k+1)$-сеть. Сумма их стоимостей такая же, как у A и B. Значит, они обе оптимальны. Таким образом, для сети A удалось выкинуть выделенный город и найти оптимальную k-сеть с оставшимися выделенными городами. Теперь можно построить требуемую нумерацию в обратном порядке (начиная с пустой N-сети).

Комментарий. В 0 баллов оценивается:

a) Описание структуры k-сети.

b) Попытка построить решение на использовании (неверного) свойства наследуемости.

c) Разбор случаев маленького N.

d) Нахождение номера вершины A, если ребро AB имеет строго наименьшую цену.

e) Попытка решить жадным алгоритмом без указания, в какой момент мы отойдём от жадного алгоритма.