

## Разбор задач

### Задача 1. Василисы Премудрые

Ответ:

Новгородское княжество имеет знамя белого цвета и ответственно за кораблестроение.

Смоленское княжество имеет знамя зеленого цвета и ответственно за грамоту.

Московское княжество имеет знамя красного цвета и ответственно за арифметику.

Казанское княжество имеет знамя желтого цвета и ответственно за звездознание.

Ростовское княжество имеет знамя синего цвета и ответственно за строительство.

Решение:

Смоленское княжество, исходя из утверждения 4, в ответе за грамоту.

Наука Ростовского княжества – строительство, так как из утверждения 3 видно, что их наука – не кораблестроение и не арифметика (т.к. они ничего не расскажут ни о кораблях, ни о цифрах), а из второго выражения известно, что Казанское княжество в ответе за звездознание.

Новгородское княжество в ответе за кораблестроение, так как ни читать, ни считать в княжестве не любят.

Московское княжество становится ответственным за арифметику.

Из условия известно:

У Новгородского княжества знамя белое, а у Ростовского – синее.

Так как ни у Смоленского, ни у Казанского княжеств знамя не красного цвета, значит, знамя красного цвета принадлежит Московскому княжеству.

Казанское княжество имеет желтое знамя, а Смоленское – зеленое.

### Задача 2. Львы и тигры

Всего имеется 5 различных правильных вариантов:

LTTLTTLTT

LTTLTTTTL

LTTTLTTLT

LTTTTLTTL

TTLTTLTTL

Покажем, что это все возможные варианты. Рассмотрим самую большую по длине последовательность тигров.

Она не может иметь длину шесть, так как тогда на каких-то из трех оставшихся мест окажутся два льва подряд, что запрещено.

Она не может иметь длину пять, так как тогда один оставшийся тигр не будет иметь соседа-тигра.

Если она имеет длину четыре, то оставшиеся два тигра должны выходить вместе. Если упомянутые четыре тигра выбегают первыми или последними, то среди оставшихся пяти подряд идущих мест три достанутся львам, а так как два тигра бегут вместе, то два из трех львов также выбегут подряд, что запрещено. Два варианта, когда группа из четырех тигров выбегает либо после первого льва, либо перед последним львом, являются правильными и имеют вид LTTTTLTTL и LTTLTTTTL. Остальные варианты расположения группы из четырех тигров подразумевают два свободных места с какого-то края, которые нельзя заполнить ни двумя львами (это запрещено), ни двумя тиграми (тогда максимальная группа из тигров будет иметь длину шесть, а это мы уже рассмотрели), ни тигром и львом, так как в этом случае либо два оставшихся тигра окажутся одинокими, либо в максимально длинной последовательности окажется больше четырех тигров.

Если наибольшая группа тигров имеет длину три, то оставшиеся три тигра также должны выходить вместе, иначе один из них останется в одиночестве. Чтобы львы выходили по одному, в этом случае возможен только один следующий вариант: LTTTLTTLT.

Если наибольшая группа тигров имеет длину два, то все тигры должны быть разбиты на пары рядом стоящих. Получится два варианта: LTTLTTLTT и TTTLTTLTTL. Так как два льва подряд выпустить нельзя, только эти два варианта и будут возможными в этом случае.

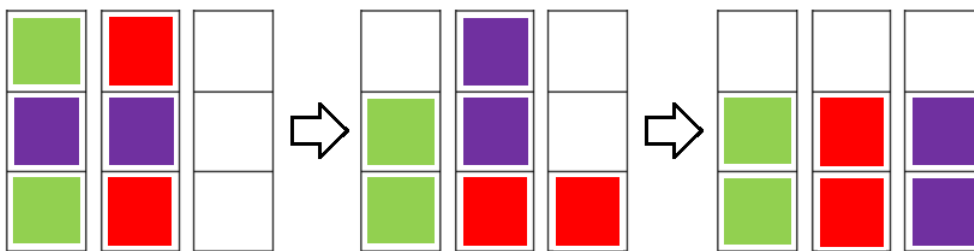
Так как тигров нельзя выпускать поодиночке, то других вариантов быть не может.

### Задача 3. Кубики

Одно из коротких решений требует не менее 8 перемещений:

2 3  
 1 3  
 1 2  
 3 1  
 3 1  
 2 3  
 2 3  
 1 2

Добиться того, чтобы в одном из двух первых столбиков оказались только кубики одного цвета (причём только того же цвета, что и у лежащих снизу кубиков), получится не менее чем за 4 перемещения. После этого ещё за 4 перемещения можно добиться требуемого расположения.

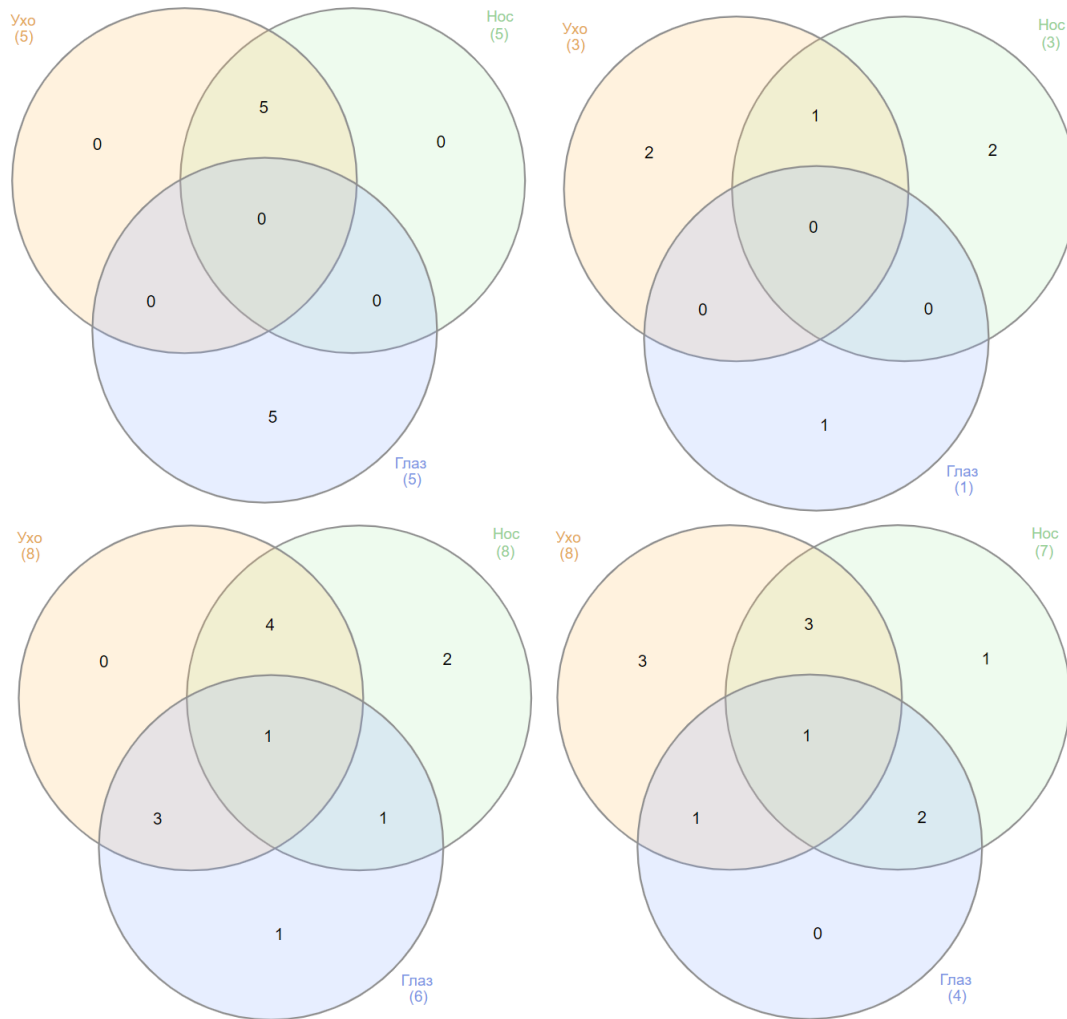


### Задача 4. Крэги Уйлера

Так как в условии гарантируется, что во всех пунктах существует единственный ответ, достаточно придумать пример распределения крэгов, удовлетворяющий условию, а затем посчитать их общее количество. На следующих рисунках приведены примеры (как и в условии, числа обозначают количество крэгов, имеющих ровно такой набор сенсорных органов, который соответствует этой области).



Выше изображён пример для первого пункта задачи. В этом случае подсчёты Уйлера дали бы последовательность чисел (в том же порядке, какой указан в самом начале задачи) «2, 2, 0, 0, 0, 0, 0», что соответствует исходному набору. Общее количество крэгов равно сумме всех семи чисел на диаграмме, поэтому ответом является число 4. Аналогично для остальных подпунктов имеем:



Итого, ответами на данную задачу являются числа:

1. 4;
2. 10;
3. 6;
4. 12;
5. 11.

## Задача 5. Прямые и окружности

Первая подзадача:  $n = 0$  (нет прямых, только окружности). Каждая построенная окружность увеличивает количество разбиений плоскости на 1. Ответ –  $m + 1$ .

Вторая подзадача:  $m = 0$  (нет окружностей, только прямые). Каждая построенная прямая увеличивает количество разбиений плоскости на 2. Ответ –  $2 \times n$ .

Полное решение: каждая новая прямая увеличивает количество разделений плоскости на 2 (кроме самой первой, которая увеличивает на 1), а каждая окружность добавляет ещё столько же областей, на сколько все прямые разделили плоскость. В общем случае будет  $2 \times n \times (m + 1)$  областей, а при  $n = 0$  – только  $m + 1$ .

```
n = int(input())
m = int(input())
if n == 0:
    ans = m + 1
```

```
else :  
    ans = 2 * n * (m + 1)  
print(ans)
```

## Задача 6. Братья и сёстры

Первая подзадача: неполное решение (полный перебор по мальчикам и девочкам). При указанных ограничениях ( $a, b \leq 100$ ) количество девочек  $y$  не может быть больше 101, а количество мальчиков  $x$  не превысит 10000. Переберём вложенным циклом все возможные значения пары  $x$  и  $y$  и проверим, выполняются ли условия задачи.

```
a = int(input())  
b = int(input())  
for x in range(1, 10001):  
    for y in range(2, 102):  
        if x % (y - 1) == 0 and x // (y - 1) == a:  
            if (x - 1) % y == 0 and (x - 1) // y == b:  
                print(x, y)
```

Улучшение решения: перебор только по мальчикам. Из первого утверждения следует, что у Ани братьев в  $a$  раз больше, чем сестёр, значит, если  $x$  – количество мальчиков, а  $y$  – количество девочек в семье, то  $a = \frac{x}{y-1}$ ,  $y - 1 = \frac{x}{a}$ , что означает, что  $x$  кратно  $a$ . Будем перебирать количество мальчиков, для каждого такого количества вычислять количество девочек и определять, является ли оно корректным.

```
a = int(input())  
b = int(input())  
x = a  
y = x // a + 1  
while (x - 1) % y > 0 or (x - 1) // y != b:  
    x += a  
    y = x // a + 1  
print(x)  
print(y)
```

Полное решение:

Пусть  $x$  – количество мальчиков, а  $y$  – количество девочек. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a = \frac{x}{y-1} \\ b = \frac{x-1}{y} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a \times (y - 1) = x \\ b \times y = x - 1 \end{cases}$$

Подставим  $x$  во второе уравнение:

$$b \times y = a \times y - a - 1$$

Отсюда

$$y \times (b - a) = -a - 1$$

Окончательно:

$$\begin{cases} y = \frac{a+1}{a-b} \\ x = a \times (y - 1) \end{cases}$$

```
a = int(input())  
b = int(input())  
y = (a + 1) // (a - b)  
x = b * y + 1  
print(x)  
print(y)
```

## Задача 7. Шестёрки

Частичное решение сводится к вычислению квадрата числа и поиску нужной позиции:

```
n = int(input())
k = int(input())
ans = str(int('6' * n) ** 2)[k - 1]
print(ans)
```

При больших значениях  $n$  вычисление результата будет производиться очень долго и может не уложиться в отведённую память.

Полное решение: давайте попробуем перемножить числа традиционным образом (в столбик) и найти закономерность.

При умножении числа, состоящего из  $n$  шестёрок, на одно число 6 получится число  $39\dots96$ , длина которого равна  $n + 1$ .

Теперь нам нужно  $n$  раз сложить эти числа со сдвигом (например, при  $n = 4$ ):

```
...39996
..39996
.39996
39996
```

При этом возникает перенос единиц в следующий разряд, причём их переносится столько, сколько девяток складывается в очередном разряде. В результате получится число, у которого первые  $n - 1$  цифр – четвёрки, потом идёт одна цифра 3, ещё  $n - 1$  цифр 5, и на последней позиции стоит цифра 6. Это позволяет нам упростить алгоритм:

```
n = int(input())
k = int(input())
if k < n:
    print('4')
elif k == n:
    print('3')
elif k < 2 * n:
    print('5')
else:
    print('6')
```