Разбор задач

Задача 1. Игра Арсения

Для удобства пронумеруем столбцы слева-направо, а строки снизу-вверх. Тогда, если изначально выбрать клетку на пересечении i-й строки и j-го столбца, то покраска таблицы займет $max(i-1, n-i) + max(j-1, m-j)$. Нетрудно видеть, что минимум этой суммы достигается при $i = n/2, j = m/2$ и равен $n/2 + m/2$.

Ответ: 2, 6, 12, 124.

Задача 2. Капибары

В этой задаче следовало подобрать ответ для случаев с маленьким n, после чего заметить закономерность: оптимально оставить капибар с номерами, дающими остаток один при делении на три. Например, $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$.

Задача 3. Секретные слова

В данной задаче следовало выписать все перестановки букв слова «БАЙТ», а которых не было бы запрещенных пар рядом стоящих символов.

Всего существует 18 способов так переставить символы:

байт, батй, бйат, бйта, бтай, бтйа, айбт, айтб, атбй, атйб, йбат, йбта, йатб, йтба, тбай, тбйа, тайб, тйба.

Задача 4. Трехзначный вариант

В данной задачи даны три трехзначных числа a, b, c. Требуется придумать еще одно трехзначное число x такое, чтобы у x и у каждого из чисел a, b, c совпадал бы ровно один разряд.

Для этого достаточно выписать из каждого числа отдельно разряды сотен, десятков и единиц и посмотреть, есть ли повторяющиеся значения внутри каждой группы. При наличии повторяющихся значений можно взять для итогового числа таковые, и тогда у нас появляется возможность использовать минимально возможную цифру, отсутствующую в наших наборах для записи ее в старший разряд. Например, в последнем примере нам даны числа $147, 545, 126$. Разряд сотен представлен числами $1, 5$, разряд десятков — $2, 4$, а единиц — $5, 6, 7$. Если мы для нового числа возьмем из сотен самую маленькую цифру 1, то мы уже получим совпадение по разрядам с числами $147, 126$. Нам останется выбрать из возможных вариантов совпадения десятков и единиц с числом 545. Здесь возможны два варианта: взять 4 для десятков или 5 для единиц. В первом случае мы добавляем к 4 в десятке минимальное неиспользуемое число для единиц, а это — 0. Тогда ответ будет 140. Во втором случае у нас не использован разряд десятков и мы можем поместить туда 0 и получить ответ — 105. Это явно меньше первого варианта и будет ответом.

Ответ: 159, 183, 324, 105.

Задача 5. Вирус

Как сказано в условии, изначально вирус должен заразить хотя бы k компьютеров. Так как каждый день вирус заражает по t компьютеров, то ему потребуется $(k+t-1)/t$ дней, чтобы заразить хотя бы k компьютеров. После чего вирус будет обезврежен спустя m дней.

Таким образом, ответ на задачу: $(k + t - 1)/t + m$.

Для решения на частичные баллы можно было смоделировать процесс, а также не выполнять округления при делении вверх, что работает в случаях, когда k делится на t.

Задача 6. Кинотеатр

В этой задаче есть два разных случая. Чтобы решить задачу на полный балл, нужно было рассмотреть оба из них. А за корретный анализ одного из случаев можно было получить частичный балл.

В первом случае последний человек из первой очереди перейдет уже в пустую очередь. Это означает, что $n \cdot q > (n - 1 + m) \cdot t$, поскольку $n \cdot q$ — это время, в которое последний человек перейдет из первой очереди во вторую, а $(n - 1 + m) \cdot t$ — время, когда все остальные люди пройдет

Сайт 100ballnik.com. Варианты для подготовки.

контроль во второй очереди. В этом случае ответ равен $n \cdot q + t$, поскольку после перехода во вторую очередь человеку придется еще потратить t секунд на проход контроля.

Во втором случае вторая очередь еще не будет пуста. Это означает, что $n \cdot q \leqslant (n - 1 + m) \cdot t$. Тогда в итоге потребуется $(n + m) \cdot t$ секунд.

Задача 7. Подотрезок

В данной задаче надо было найти такой подотрезок бинарной строке, что после инвертации битов на этом подотрезке получается строка из равных битов.

Самое простое решение заключается в том, чтобы перебрать начало и конец такого подотрезка, после чего наивно проверить, выполняется ли условие задачи. Если да, то ответ найден. Такое решение требует $O(n^3)$ операции, что слишком медленно. Поэтому такое решение набирает 30 баллов.

Для оптимизации заметим, что после фиксации начала отрезка, можно увеличить индекс его конца, попутно поддерживая количество единиц и нулей в строке, если инвертировать данный подотрезок. Такое решение требует $O(n^2)$ операций, что уже намного лучше, но все еще недостаточно эффективно. Поэтому такое решение набирает 60 баллов.

Для полного решения заметим, что, если такой отрезок существует, то должно выполняться несколько условий. Предположим, это отрезок $s_l, \ldots, s_r$. Тогда все биты на этом отрезке должны быть одинаковыми. А также все биты на отрезках $s_1, \ldots, s_{l-1}$, а также $s_{r+1}, \ldots, s_n$ тоже должны быть одинаковыми. Эти условия необходимы и достаточны.

Таким образом, достаточно проверить, что строка состоит из не более трех подотрезков равных символов. Это можно сделать разными способами. Например, можно проверить, что количество пар стоящих рядом неравных символов не более двух. Этот алгоритм требует $O(n)$ действий и проходит на полный балл.

Сайт 100ballnik.com. Варианты для подготовки.