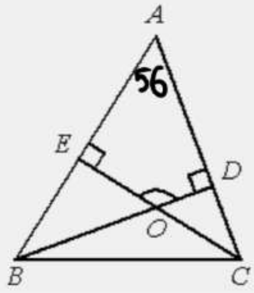
1

В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C – острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



A4D931

$\angle DOE = 360 - 90 - 90 - 56 = 124$

ОТВЕТ 124

ИСТОЧНИКИ

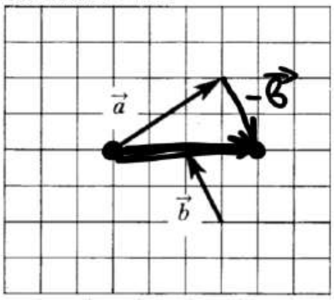
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2014

СУММА УГЛОВ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

360°

2

Найдите длину разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



ОТВЕТ 4

ИСТОЧНИКИ

Семёнов

3

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса.

Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

F4AA43

$l^2 = (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2$

$l^2 = 200 + 200$

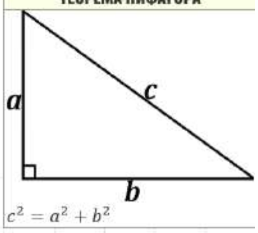
$l = 20$

ОТВЕТ 2 0

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2 = a^2 + b^2$

4

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

11C2CE

$P = \frac{6}{75} = \frac{2}{25} = 0{,}08$

ОТВЕТ 0 , 0 8

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Пробный ЕГЭ 2019
Основная волна 2014
Основная волна 2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

ИСТОЧНИКИ

Демо 2023
Демо 2022

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \dfrac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

4 1 1
1 4 1
1 1 4
3 2 1
3 1 2
2 1 3
2 3 1
1 3 2
1 2 3
2 2 2

$p = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

ОТВЕТ 0,6

6 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+3} = 5$. $|^{\wedge}3$

0DAFF4

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2021
Основная волна 2018
Основная волна 2017
Досрочная волна 2014

$x + 3 = 125$

$x = 122$

ОТВЕТ 122

7 Найдите значение выражения $(\sqrt{12}-\sqrt{75})\cdot\sqrt{12}$.

62754D

$12-\sqrt{900}=12-30=-18$

ОТВЕТ −18

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2022
Основная волна (Резерв) 2013

КОРНИ

1	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
2	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$
3	$(\sqrt{a})^2=a$
4	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$
5	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

8 Прямая $y=-3x-5$ является касательной к графику функции $y=x^2+7x+c$. Найдите c.

7B24D9

$$\begin{cases} -3=2x+7 & (1)\\ -3x-5=x^2+7x+c & (2)\end{cases}$$

(1) $-10=2x$
$x=-5$

(2) $15-5=25-35+c$
$10=-10+c$
$20=c$

ОТВЕТ 20

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)

УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

$$\begin{cases} y'=f'(x_0)\\ y=f(x_0)\end{cases}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C'=0$
2	$x'=1$
3	$(Cx)'=C$
4	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U\cdot V)'=U'V+UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$
8	$(U(V))'=(U(V))'\cdot V'$
9	$(\sin x)'=\cos x$
10	$(\cos x)'=-\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)'=e^x$
14	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
15	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)'=\frac{1}{b\cdot\ln a}$

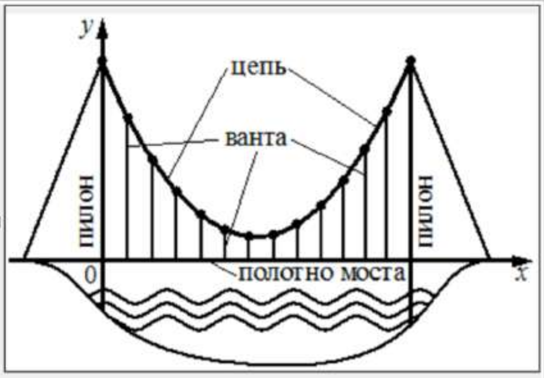
9

На рисунке изображена схема моста. Вертикальные *пилоны* связаны провисающей *цепью*. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают *полотно моста*, называются *вантами*.

Введём систему координат:
ось Oy направим вертикально вверх вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано
на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, задаётся формулой

$y = 0{,}0043x^2 - 0{,}74x + 35,$

где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной
в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2018

7D7F1D

$$y=\frac{43}{100\cancel{00}}\cdot\cancel{70}\cdot\cancel{70}-\frac{74}{10\cancel{0}}\cdot 7\cancel{0}+35$$

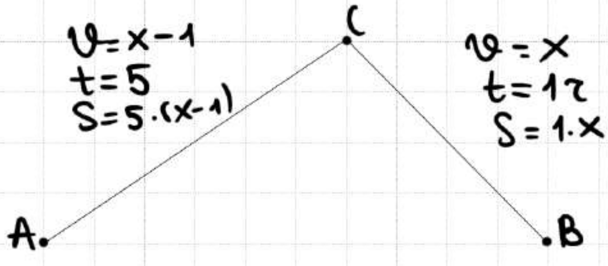
$$y=\frac{2107}{100}-\frac{518}{10}+35=21{,}07-51{,}8+35=56{,}07-51{,}80=$$
$$=4{,}27$$

ОТВЕТ 4,27

10

Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 25 км. Путь из A в B занял у туриста 6 часов, из которых 1 час ушёл на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2019
Досрочная волна 2014
Пробный ЕГЭ 2014



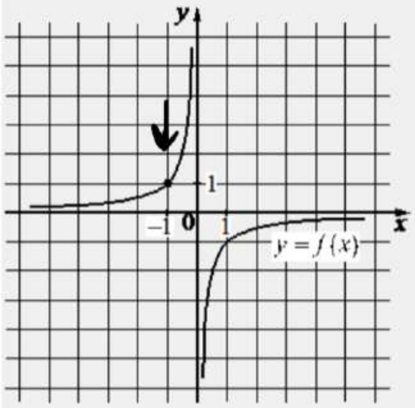
$$S_{AC}+S_{CB}=25$$

$$5x-5+x=25$$
$$6x=30$$
$$x=5$$

ОТВЕТ 5

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



06DEEE

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2023

① $(-1; 1)$

$1 = \frac{k}{-1}$ $k = -1$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

② $f(10) = -\frac{1}{10} = -0{,}1$

ОТВЕТ −0,1

12

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+9) - 10x + 7$.

B55725

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

$y' = \frac{1}{x+9} - 10 = 0$

$\frac{1}{x+9} = 10$

$x+9 = 0{,}1$

$x = -8{,}9$

	ПРОИЗВОДНЫЕ
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ОТВЕТ −8,9

13 а) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}=\sqrt{2}.$$

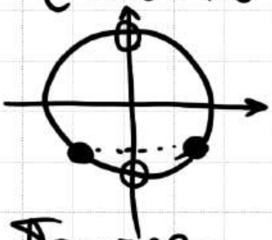
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

а) $$\frac{2\sin x\cdot\cos x^{\backslash 1}}{-\cos x}-\frac{\sqrt{2}}{1}^{\backslash\cos x}=0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$\frac{2\sin x\cdot\cos x+\sqrt{2}\cos x}{\cos x}=0$$

$$\frac{\cos x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)}{\cos x}=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x\neq 0\end{cases}$$

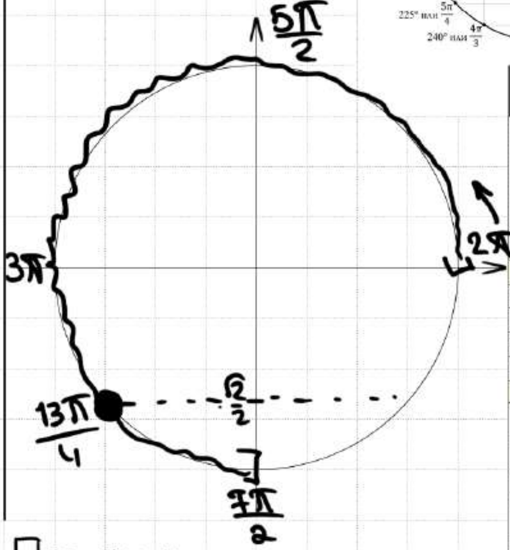


Получаем

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n; n\in Z$

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности

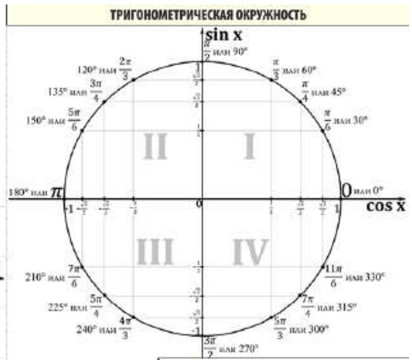


Получим

$$x=\frac{3\pi}{1}^{\backslash 4}+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{4}$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n\in Z$

б) $\frac{13\pi}{4}$.



ИСТОЧНИКИ

Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Основная волна 2016
Досрочная волна (Резерв) 2015

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3	$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
4	$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

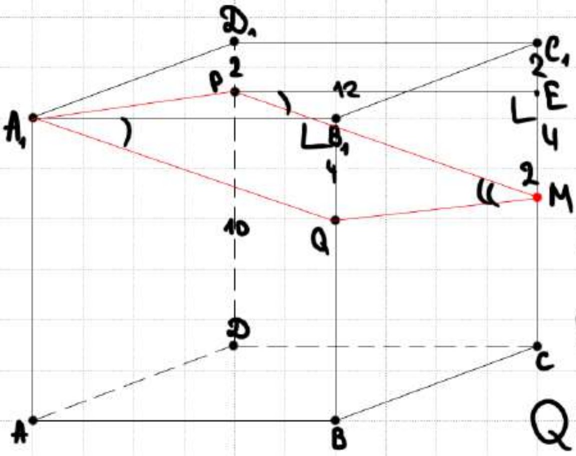
Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1Q = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

а) ① Построение сеч.
Построим A_1P
A_1Q
Построим PM такую, что $PM \parallel A_1Q$ на пл. (CDD_1)
Построим QM
A_1QMP – сечение



② Построим PE такую, что $PE \parallel C_1D_1$
C_1D_1PE – прям-к
$C_1E = 2 = D_1P$

③ $\triangle A_1B_1Q = \triangle PEM$ по УСУ
$A_1B_1 = PE$
$\angle B_1A_1Q = \angle EPM$
$\angle PEM = \angle A_1B_1Q$
$\Rightarrow EM = 4 = B_1Q$

Получаем $C_1M = 2 + 4 = 6$
M – середина CC_1 ■

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

б) ① $V_{C_1PQM} = \frac{1}{3} \cdot S_{PQM} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{C_1QM} \cdot PE$

② Найдём S_{PQM}

$PM = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10} = \sqrt{160}$

$QM = \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

$PQ = \sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$

$\cos\angle PMQ = \dfrac{160 + 148 - 292}{2 \cdot 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{37}} = \dfrac{\cancel{16}\, 1}{\cancel{16}\sqrt{370}}$

$\sin\angle PMQ = \dfrac{\sqrt{369}}{\sqrt{370}}$

$S_{PQM} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \dfrac{\sqrt{369}}{\sqrt{370}} = 12\sqrt{41}$.

Получаем

$\cancel{12}\sqrt{41} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cancel{12}$

$h = \dfrac{36}{\sqrt{41}} = \dfrac{36\sqrt{41}}{41}$

Ответ: $\dfrac{36\sqrt{41}}{41}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x + 2\cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \le 1.$$

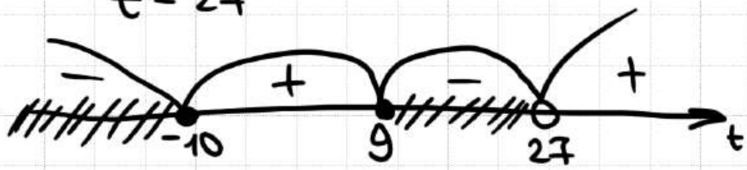
ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2019

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 + 2t - 117}{t-27} - \frac{1}{1} \le 0$$

$$\frac{t^2 + 2t - 117 - t + 27}{t-27} \le 0$$

$$\frac{t^2 + t - 90}{t-27} \le 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t \le -10 \\ 9 \le t < 27 \end{array}\right.$$

$3^x \le -10$

нет решений

$3^2 \le 3^x < 3^3$

$2 \le x < 3$

Ответ: $[2; 3)$

16

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года; $\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$

– в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года; $\cdot 1{,}15$

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма выплат составит 930 тыс. рублей?

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2021

Ященко 2022 (36 вар)

Пусть $\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$

март – месяц платежа

Дата	Сумма долга
и25	600 тыс.
я 26	$600\cdot b$
м 26	⇒ сумма выплаты $600b-500$
и 26	500
я 27	$500b$
м 27	⇒ с.в. $500b-400$
и 27	400
я 28	$400b$
м 28	⇒ с.в. $400b-300$
и 28	300
я 29	$300\cdot 1{,}15=345$
м 29	⇒ с.в. $345-200=145$
и 29	200
я 30	$200\cdot 1{,}15=230$
м 30	⇒ с.в. 130
и 30	100
я 31	$100\cdot 1{,}15=115$
м 31	⇒ с.в. 115
и 31	0

О.С.В. = 930 тыс.

$$600b-500+500b-400+400b-300+145+130+115=930$$

$$1500b=930+1200-390$$

$$1500\cdot b=1740$$

$$b=\frac{174\cancel{0}}{150\cancel{0}}=\frac{29\cdot 4}{25\cdot 4}=1{,}16$$

$$1+\frac{r}{100}=1+\frac{16}{100}$$

$$r=16\%$$

Ответ: 16.

17 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2014

Пусть AA_1 – высота $\triangle ABC$.

а) Пусть $\angle AHB_1 = \alpha$

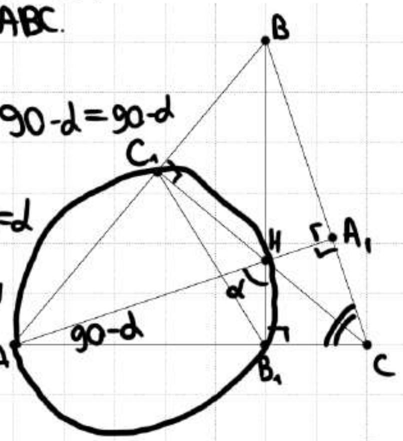
Тогда $\angle HAB_1 = 180-90-\alpha = 90-\alpha$

$\triangle AA_1C$:

$\angle ACA_1 = 180-90-(90-\alpha) = \alpha$

$\parallel$

$\angle AHB_1$ ■



б) ① $\cos A = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k$

$\triangle ABC \sim \triangle AC_1B_1$ по 2 пропорц. ст. и углу A между ними.

$k = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$B_1C_1 = \frac{1}{2} BC$

② $\angle AC_1H = 90°$

$\angle AB_1H = 90°$

Опишем окр-ть около AC_1HB_1 с диаметром AH

$AH = 4 = d$

$R = 2$

③ по т. sin

$\frac{B_1C_1}{\sin 60°} = 2R$

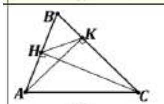
$\frac{B_1C_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$

$B_1C_1 = 2\sqrt{3}$

$BC = 4\sqrt{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

ПОДОБИЕ ABC и HBK



$\cos B = \frac{BK}{AB}$

$\cos B = \frac{BH}{BC}$

$\Delta ABC \sim \Delta HBK$ по 2 признаку

$\left(\frac{BK}{AB} = \frac{BH}{BC}\text{ и угол } B - \text{общий}\right)$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$$

имеет единственный корень.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

Пусть $2^x = t$ $\quad t > 0$

$x = \log_2 t$

$$t - a = \sqrt{t^2 - 3a}$$

$$\sqrt{t^2 - 3a} = t - a$$

$$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ t^2 - 3a = (t-a)^2 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ \cancel{t^2} - 3a = \cancel{t^2} - 2at + a^2 \\ t > 0 \end{cases}$$

Выразим t

это линейное ур-е, т.е. оно имеет единств. реш., только если $a \neq 0$,

т.к. при $a = 0$

$0 \cdot t = 0$

t – любое

$\Rightarrow$ решений x бесконечно много

$$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ t = \dfrac{a^2 + 3a}{2a} = \dfrac{a+3}{2} \\ t > 0 \end{cases}$$

Получаем для $t = \dfrac{a+3}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{2} - a \geq 0 \quad | \cdot 2 \\ a \neq 0 \\ \dfrac{a+3}{2} > 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3 - 2a \geq 0 \\ a \neq 0 \\ a + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 3 \\ a \neq 0 \\ a > -3 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; 0) \cup (0; 3]$

19

а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)

Основная волна 2014

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1 $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$

2 $S_n = \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$

3 $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

6762F0

а) $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$a_1 + a_5 = 99$

$S_5 = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{99}{2}\cdot 5 = 247{,}5$

НО сумма пяти натур. чисел не может быть дробным числом

Ответ: а) нет

б) $a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad a_1+4d \quad a_1+5d$

$a_1 + a_1 + 5d = 9$

$2a_1 + 5\cdot d = 9$

Пусть $a_1 = 2$

$d = 1$

2 3 4 5 6 7

Ответ: б) наим., 2 3 4 5 6 7.

в) ① $\text{Ср.ар.} = \frac{\text{Сумма всех чисел}}{\text{Кол-во чисел}} = 6{,}5$

Сумма всех чисел $= 6{,}5\cdot n$

$\frac{a_1+a_n}{2}\cdot \cancel{n} = 6{,}5\,\cancel{n} \quad |\cdot 2$

$a_1 + a_n = 13$

$a_1 + a_1 + d\cdot(n-1) = 13$

$2a_1 + d\cdot(n-1) = 13$

Выразим n: $d\cdot(n-1) = 13 - 2a_1$

$n - 1 = \frac{13-2a_1}{d}$

$n = \frac{13-2a_1}{d} + 1$

Для максимизации n нужно брать натур. a_1 и d как можно меньшими

$a_1 = 1$

$d = 1$

$n \le \frac{13-2\cdot 1}{1} + 1$

$n \le 12$

② Покажем, что $n = 12$ может быть

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Ответ: в) 12