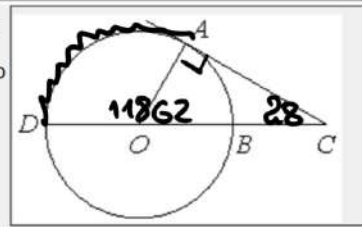


1

Угол ACO равен 28° . Его сторона CA касается окружности с центром в точке O . Сторона CO пересекает окружность в точках B и D (см. рис.). Найдите градусную меру дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.



292C86

$$\textcircled{1} \triangle AOC: \angle AOC = 180 - 90 - 28 = 62$$

$$\textcircled{2} \angle AOD = 180 - 62 = 118$$

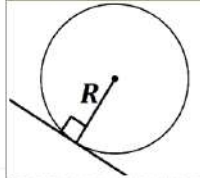
$$\textcircled{3} \angle AOD = 118$$

ОТВЕТ | 1 | 18

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2018

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ

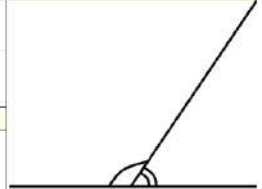


Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

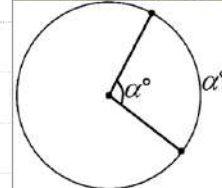
180°

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ



В сумме 180°

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ



Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается

2

На плоскости отмечены точки $A(-2; 5)$, $B(4; 3)$ и $C(4; 7)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

ИСТОЧНИКИ

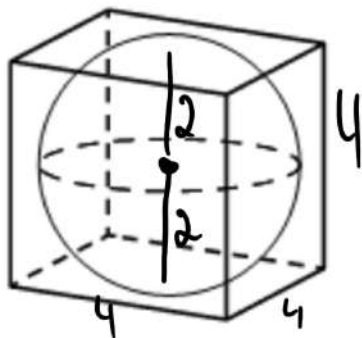
Семёнов

$$\textcircled{1} \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{matrix} \begin{pmatrix} 6; -2 \\ 6; 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \begin{matrix} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \end{matrix} \begin{pmatrix} 0; -4 \\ \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ | 4

3 Куб описан около сферы радиуса 2. Найдите объём куба.



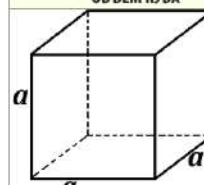
$$V = 4^3 = 64$$

ОТВЕТ | 64

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2014

ОБЪЁМ КУБА



$$V = a^3$$

4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36,8^\circ\text{C}$, равна 0,94. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура тела окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.



4F31D7

$$1 - 0,94 = 0,06$$

ОТВЕТ | 0,06

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2020

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Сумма вероятностей наступления противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ПРИМЕР:

Событие A — выпадение орла
Событие \bar{A} — выпадение решки

Если при одном бросании монеты не выпал орёл, то точно выпадет решка

5

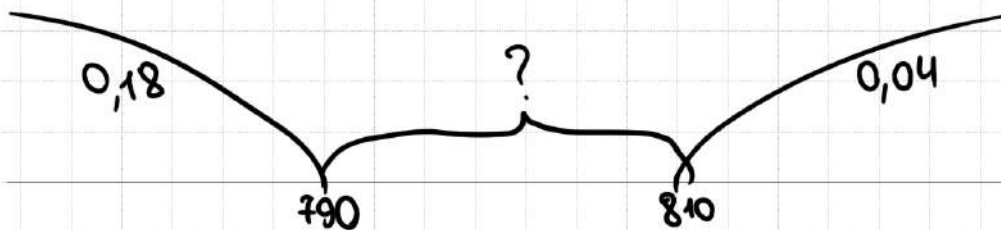
При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.



66F056

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2023



$$1 - 0,18 - 0,04 = 0,78$$

ОТВЕТ 0,78

6

Найдите корень уравнения $(x + 9)^2 = 36x$.



B632F0

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 ФСУ

$$x^2 + 18x + 81 - 36x = 0$$

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$

$$(x - 9)^2 = 0$$

$$x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

- 1 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- 2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 4 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- 5 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- 6 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 7 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ОТВЕТ 9

7

Найдите значение выражения $(5^4)^6 : 5^{22}$.

4EF06F

$$5^{24} : 5^{22} = 5^2 = 25$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2018

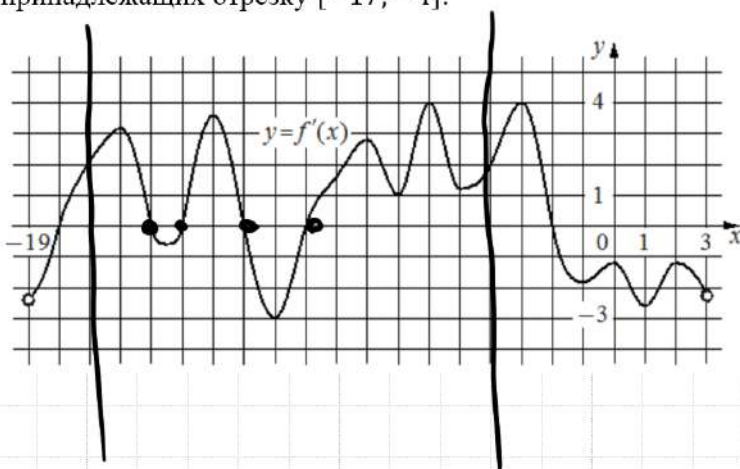
СТЕПЕНИ

- 1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- ✓ 2 $a^n : a^m = a^{n-m}$
- ✓ 3 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- 4 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- 5 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- 6 $a^0 = 1$
- 7 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- 8 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ОТВЕТ | 25

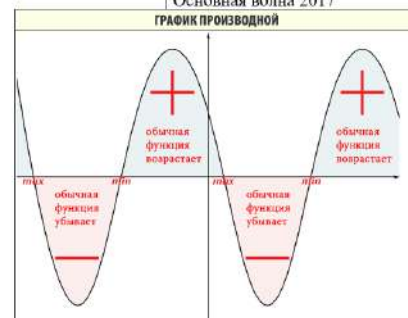
8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2023
 Основная волна 2021
 Основная волна 2018
 Основная волна 2017



ОТВЕТ | 4

9

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 96 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг.

👉 📍 ✓

76777E

$$3 = 96 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

$$2^{-\frac{t}{3}} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$$

$$2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-5}$$

$$\frac{t}{3} = 5$$

$$t = 15$$

ОТВЕТ | 1 | 5

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2023
 Основная волна 2022
 Основная волна 2021

10

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2022
 Основная волна 2021

	Труба	Время	Кол-во литров
I	X	$\frac{110}{X}$	110
II	X+1	$\frac{99}{X+1}$	99

$$t_{\text{медл}} - t_{\text{быстр}} = 2$$

$$\frac{110}{X} - \frac{99}{X+1} = 2$$

$$\frac{110X + 110 - 99X}{X^2 + X} = 2$$

$$\frac{11X + 110}{X^2 + X} = \frac{2}{1}$$

$$2X^2 + 2X = 11X + 110$$

$$2X^2 - 9X - 110 = 0$$

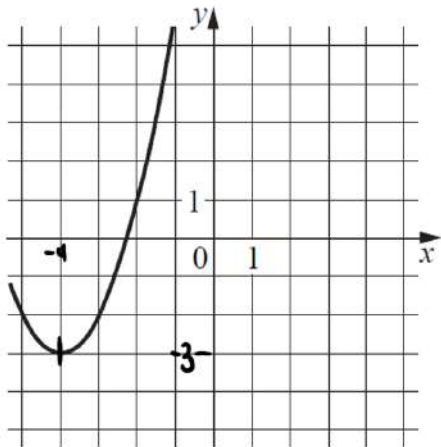
$$D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 110 = 31^2$$

$$X = \frac{9 \pm 31}{4}$$

$$X = 10$$

ОТВЕТ | 1 | 0

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



$$-3 + 64 = 61$$

ИСТОЧНИКИ

Демо 2023
Демо 2022

СДВИГ ВВЕРХ	СДВИГ ВЛЕВО
$y = x^2 + 1$	$y = (x + 1)^2$
СДВИГ ВНИЗ	СДВИГ ВПРАВО
$y = x^2 - 2$	$y = (x - 2)^2$
ВЕРШИНА ПАРАБОЛЫ	
$x_0 = \frac{-b}{2a}$	

ОТВЕТ | 61

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 69 \cos x + 71x + 48$ на отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$.

9EE22E

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y' &= -69 \sin x + 71 = 0 \\ 71 &= 69 \cdot \sin x \\ \sin x &= \frac{71}{69} \\ \text{Нет решений} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad y(0) = 69 \cdot 1 + 71 \cdot 0 + 48 = 117$$

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dots$$

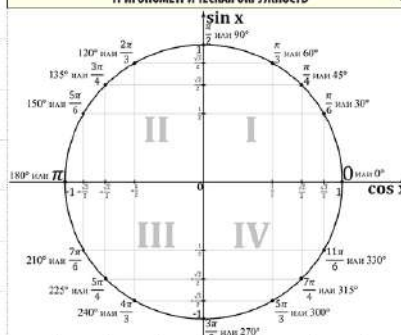
ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

- 1 $C' = 0$
- 2 $x' = 1$
- 3 $(Cx)' = C$
- 4 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- 5 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 6 $(U \cdot V)' = U'V + UV'$
- 7 $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
- 8 $(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
- 9 $(\sin x)' = \cos x$
- 10 $(\cos x)' = -\sin x$
- 11 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- 12 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- 13 $(e^x)' = e^x$
- 14 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- 15 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- 16 $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ОТВЕТ | 117

13

а) Решите уравнение

$$4 \cdot 16^{\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 2 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

а) Пусть $4^{\cos x} = t$

$$4 \cdot t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$$

$$t = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$t = 2$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$4^{\cos x} = 2$$

$$4^{\cos x} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

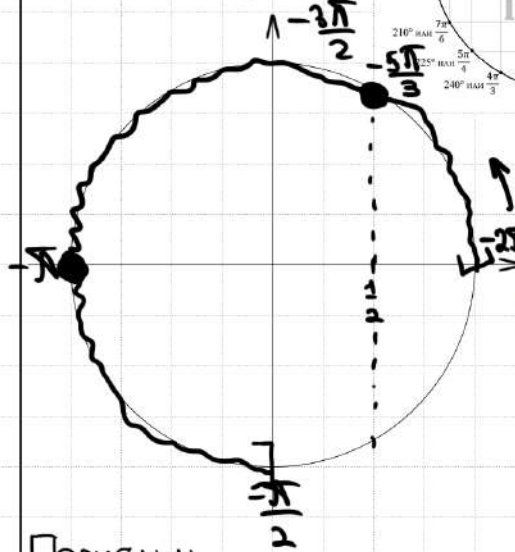
$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$4^{\cos x} = 4^{-1}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни с помощью окружности



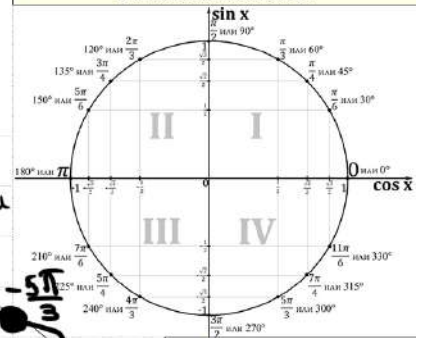
Получим

$$x = -\pi$$

$$x = \frac{-2\pi}{1} + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\pi, -\frac{5\pi}{3}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Ященко 2021 (36 вар)
 Ященко 2020 (36 вар)
 Ященко 2019 (36 вар)
 Досрочная волна 2022
 Основная волна 2017

СТЕПЕНИ

$$1 \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$2 \quad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$3 \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$4 \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$5 \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$6 \quad a^0 = 1$$

$$7 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

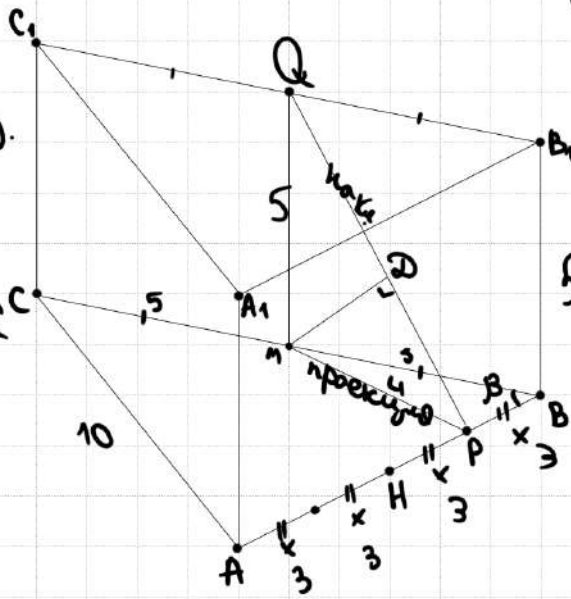
$$8 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP:PB = 3:1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α , перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

а) 1) Рассмотрим $\triangle QMP$ - прямоуг.
Пусть MD - перпенд.
к прямой QP



б) 1) $\frac{QD}{PD} = ?$

$$\text{Пусть } \cos \angle ABC = \frac{3}{5} = \cos \beta$$

2) $\triangle BMP$:

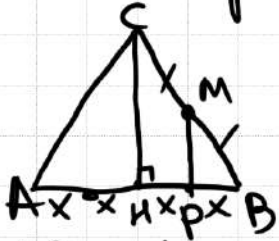
$$\cos \beta = \frac{3}{5} = \frac{3}{BM}$$

$$BM = 5$$

$$BC = 10$$

$$MP = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

2) Рассмотрим $\triangle ABC$



MP - ср. линия $\triangle B_1C_1C$

$MP \parallel C_1C$

$MP \perp AB$

3) $MP \perp AB$

прямая

$QP \perp AB$

поклонная

(по ТТГ)

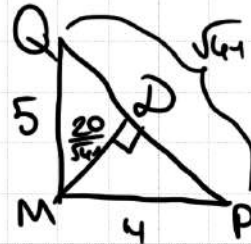
4) $\alpha \perp QP$

(по усл.)

$AB \perp QP$

$\Rightarrow AB \parallel \alpha$

3) Рассмотрим $\triangle QMP$:



$$QM = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}}$$

$$QD = \sqrt{\frac{25}{41} - \frac{400}{41}} = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

$$DP = \frac{16}{\sqrt{41}}$$

$$\frac{QD}{DP} = \frac{25}{16}$$

Отв. $\frac{25}{16}$

15 Решите неравенство

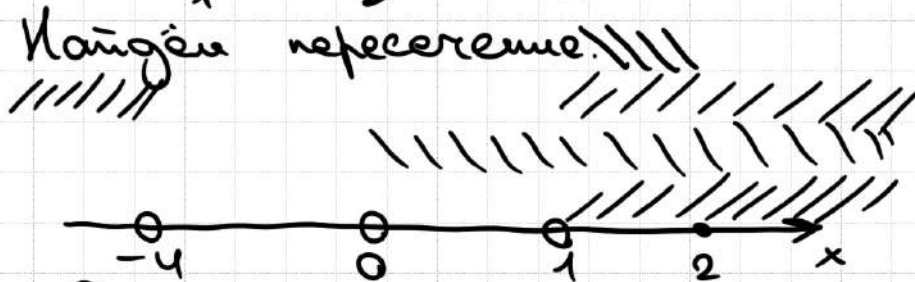
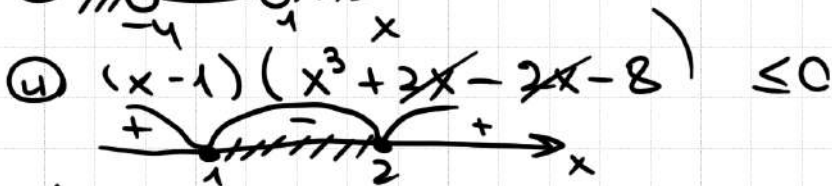
$$\log_2((x-1)(x^2+2)) \leq 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x.$$

$$\log_2((x-1)(x^2+2)) + \log_2 x \leq \log_2 2 + \log_2(x^2+3x-4)$$

- ① $(x-1)(x^2+2) > 0$
- ② $x > 0$
- ③ $x^2+3x-4 > 0$
- ④ $(x-1)(x^2+2) \cdot x \leq 2 \cdot (x+4)(x-1)$

① $x-1 > 0$
 $x > 1$

② $x > 0$



Ответ: $(1; 2]$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2019
РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$
СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ
1 $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
2 $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
3 $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4 $\log_a^n b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Пусть m – месяцы начисления

Дата	Сумма долга
и 16	S тыс.
я	$1,2 \cdot S$
м 17	S \Rightarrow с.в. $0,2S$
и	S
я	$1,2S$
м 18	S \Rightarrow с.в. $0,2S$
и	S
я	$1,2 \cdot S$
м 19	S \Rightarrow с.в. $0,2S$
и	S
я	$1,2S$
м 20	с.в. 360
и	$1,2S - 360$
я	$1,2^2 S - 360 \cdot 1,2$
м 21	с.в. 360
и	$1,2^2 \cdot S - 360 \cdot 1,2 - 360 = 0$

① Континент S

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot S = 360 \cdot \frac{6}{5} + \frac{360^{15}}{1}$$

$$\frac{6^2}{5^2} \cdot S = \frac{11 \cdot 360}{5}$$

$$S = \frac{11 \cdot 360 \cdot 5^2}{8 \cdot 6^2} = 550 \text{ тыс.}$$

② Континент О.С.В.

$$\text{О.С.В.} = 3 \cdot 0,2S + 2 \cdot 360 = 96 \cdot 550 + 720 = 1050 \text{ тыс.}$$

Ответ: 1050 тыс.

В окружность вписана трапеция $ABCD$, AD — большее основание, проведена высота BH , вторично пересекающая окружность в точке K .

а) Докажите, что AC перпендикулярна AK .

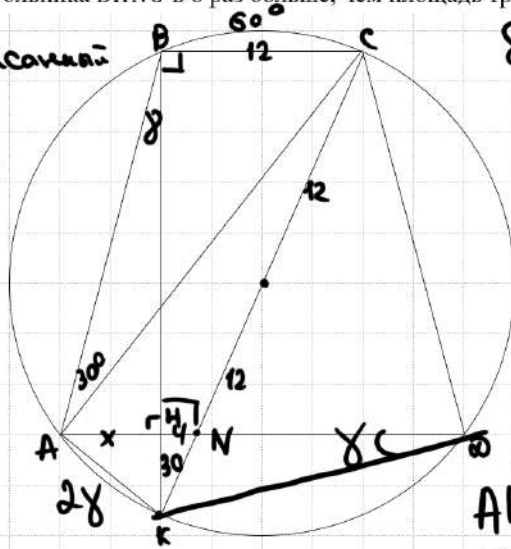
б) Найдите AD , если радиус описанной окружности равен 12, $\angle BAC = 30^\circ$, CK пересекает основание AD в точке N . Площадь четырёхугольника $BHNC$ в 8 раз больше, чем площадь треугольника KHN .

а) $\angle CBK = 90^\circ$ — вписанный

$\Rightarrow \angle CK = 180^\circ$
(по т. о вписанном угле)

$\Rightarrow CK$ — диаметр
 $\angle CAK$ — вписанный
и опр. на диаметр

$\Rightarrow \angle CAK = 90^\circ$
 $AC \perp AK$ ■



$S_{OABD} = 2AK + BC$

Пусть $AK = x$

$\angle BAC = 30^\circ = \angle BKC$

$BC = \frac{1}{2} CK = 2$ (т.к. катет
угол 30°
равен $\frac{1}{2}$ гипот.

$AD = 2x + 12$

② по св-ву хорд
 $AK \cdot DK = BK \cdot CK$
 $x \cdot (12 + x) = BK \cdot CK$

$$x \cdot (12 + x) = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$$

$$x^2 + 12x - 96 = 0$$

$$D = 144 + 384 = 528 = (4\sqrt{33})^2$$

$$x = \frac{-12 \pm 4\sqrt{33}}{2}$$

$$x = 2\sqrt{33} - 6$$

$$AD = 2x + 12$$

$$AD = 4\sqrt{33} - 12 + 12$$

Ответ: $4\sqrt{33}$

$$\textcircled{3} \frac{S_{BHNC}}{S_{KHN}} = 8 \Rightarrow \frac{S_{\triangle BCK} = x^2}{S_{\triangle KHN} = 9} = 9$$

$\triangle BCK \sim \triangle KHN$ — подобные

$$k = 3$$

$$NK = \frac{1}{3} \cdot BC = 4$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{KN} \quad KN = \frac{4\sqrt{3}}{1}$$

$$BK = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}$$

$$BH = BK - KN = 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ① & x \leq 2a + 6, \\ ② & 6x \geq x^2 + a^2, \\ ③ & x + a > 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[1; 2]$.

ФИР (старый банк)
ФИР (новый банк)
Досрочная волна 2017

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

ур-е окр-ти

Упростим

$$① \quad 2a \geq x - 6 \quad | :2$$

$$② \quad x^2 - 6x + 9 + a^2 \leq 9 \\ (x-3)^2 + a^2 \leq 9$$

$$③ \quad a > -x$$

Получаем

$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{2}x - 3 \\ (x-3)^2 + a^2 \leq 9 \\ a > -x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Найдём ординату точки C:

$$\begin{aligned} -x &= \frac{1}{2}x & | \cdot 2 \\ 3 &= 1,5x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$a = -2$$

Найдём ординату точки B:

$$\begin{aligned} (2-3)^2 + a^2 &\leq 9 \\ a^2 &= 8 \end{aligned}$$

$$a = \pm 2\sqrt{2}$$

$$a_B = 2\sqrt{2}$$

или

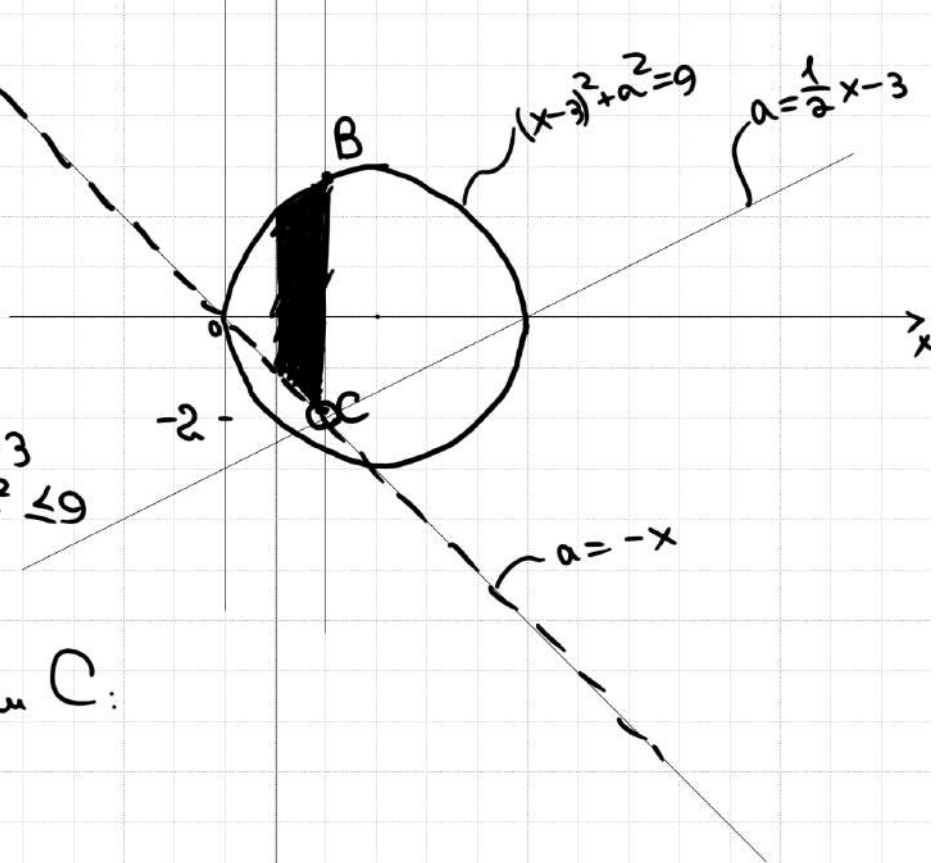
$$\begin{aligned} a &< -2 \\ a &= -2 \\ -2 &< a < 2\sqrt{2} \\ a &= 2\sqrt{2} \\ a &> 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

0 рен
0 рен.
бесконечно много
1 рен.
0 рен

Ответ: $(-2; 2\sqrt{2}]$

$a \uparrow$
 $x=1$
 $\sim x=2$

456B95



С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

- а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
 б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
 в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

а) $2 \quad 8 \quad 4 \quad 7$
 Ответ: а) 2847

б) $3 \quad 4 \quad 4$ не подходит
 $4 \quad 1$ не подходит
 $4 \quad 2$ не подходит
 $4 \quad 8$ не подходит
 Ответ: б) нет.

в) Рассмотрим 999 - наиб. трёхзначное число
 $9 \quad 9 \quad 9$
 Сумма цифр на чет.: 27
 Сумма цифр на чет.: 18
 $9 \quad 9 \quad 8$
 26
 17
 Заметим, что из чисел 990-999 не получится семизначных, кратных 11, т.к. разность сумм цифр на четных и нечетных позициях не меняется и всегда

Правило делимости на 11
 Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо разность этих сумм делится на 11.
 Пример:
 1232 делится на 11 (т.к. сумма цифр, которые стоят на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах)
 $1 + 3 = 2 + 2$
 Пример:
 1925 делится на 11 (т.к. разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, равна 11)
 $(9 + 5) - (1 + 2) = 11$

② Рассмотрим $9 \quad 8 \quad 9$
 чет.: 26
 чет.: 16
 10

$9 \quad 8 \quad 8$
 Аналогично 980-989 также не подойдут, т.к. разность сумм цифр на четных и нечетных позициях 10

③ Рассмотрим $9 \quad 7 \quad 9$
 чет.: 25
 чет.: 14
 11

9167169 - самое большое, кратное 11, получившееся из трёхзнач. числа
 Ответ: в) 9167169.