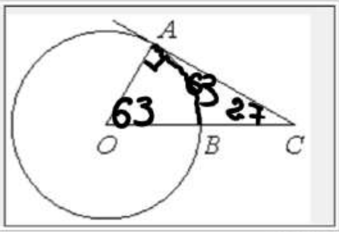
1

Угол ACO равен 27°, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.

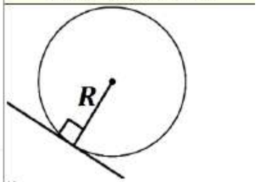


A6532B

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022
Основная волна 2018

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ

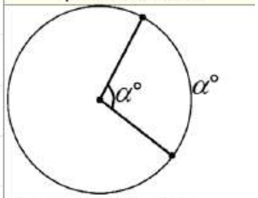


Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

180°

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ



Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается

① $\angle AOC = 180 - 90 - 27 = 63$

ОТВЕТ 63

2

Даны векторы $\vec{a}\,(1;2)$, $\vec{b}\,(-3;6)$ и $\vec{c}\,(4;-2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

$-\vec{b}\,(3;-6)$

$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c} \quad (8\ ;\ -6)$

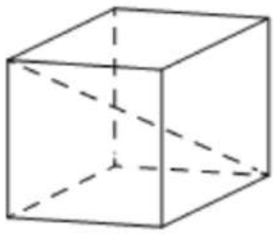
$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

ИСТОЧНИКИ

Демо 2024

ОТВЕТ 10

3 Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.



① $d=\sqrt{12}=\sqrt{3}\cdot a$

$a=\sqrt{4}=2$

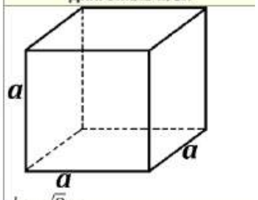
② $V_к=2^3=8$

ОТВЕТ 8

ИСТОЧНИКИ

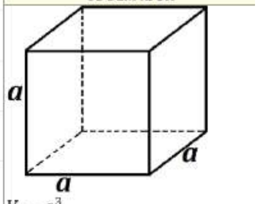
FIPI (новый банк)
Основная волна 2014

ДИАГОНАЛЬ КУБА



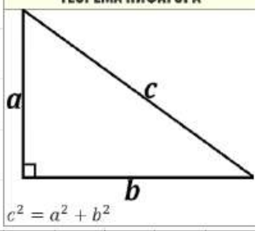
$d=\sqrt{3}a$

ОБЪЁМ КУБА



$V=a^3$

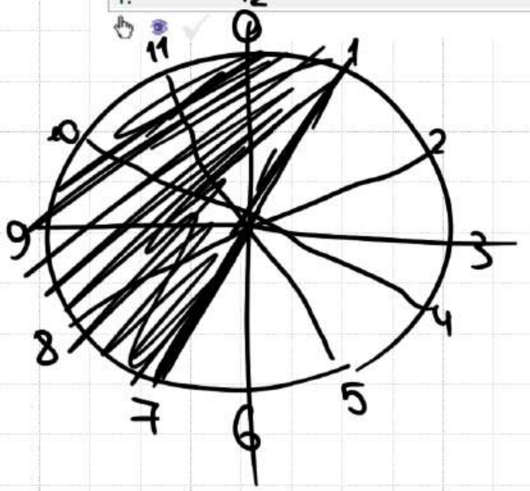
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2=a^2+b^2$

4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

26190D



$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0{,}5$

ОТВЕТ 0,5

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2021
Пробный ЕГЭ 2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p=\frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

5 В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

ИСТОЧНИКИ

Демо 2023
Демо 2022
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ
$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

① 480 ч – мужч. } 1000 чел
520 ч – женщ

② 126 ч – пенсионеры

③ $0{,}15 \cdot 520 = \frac{15}{10\cancel{0}} \cdot \frac{52\cancel{0}}{1} = 78$ – женщ.-п

④ $126 - 78 = 48$ – м-п

⑤ $P = \frac{48}{480} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

ОТВЕТ 0,1

6 Найдите корень уравнения $7^{-6-x} = 343$.

7377CE

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2023
Демо 2022
Демо 2021
Демо 2020
Основная волна 2023
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2020
Основная волна 2019
Демо 2019
Демо 2018
Демо 2017
Основная волна 2017
Основная волна 2016
Демо 2016
Демо 2015
Основная волна 2013

$7^{-6-x} = 7^3$

$-6 - x = 3$

$-6 - 3 = x$

$x = -9$

ОТВЕТ -9

7

Найдите значение выражения $\log_7 12{,}25 + \log_7 4$.

D27044

$\log_7 49 = 2$

ОТВЕТ 2

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023
Основная волна 2017

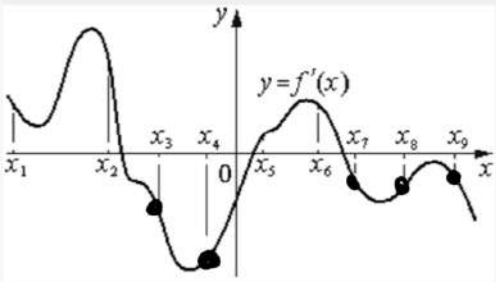
СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

8

На рисунке изображён график $y = f\,'(x)$ — производной функции $f(x)$.
На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?

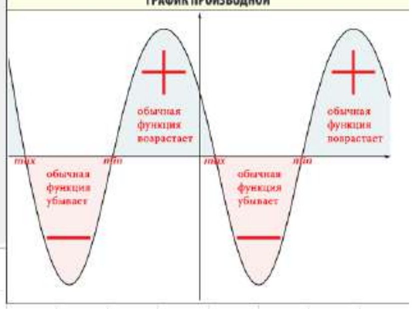


ОТВЕТ 5

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023
Основная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2016

ГРАФИК ПРОИЗВОДНОЙ



9

Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от 1 до 6.

Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — вчетверо дороже, чем оперативность.
В результате, формула примет вид

$R = \frac{4In+Op+2Tr}{A}$.

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 1?

660E75

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2013

$$1 = \frac{4\cdot 6 + 6 + 2\cdot 6}{A}$$

$$A = 42$$

ОТВЕТ 42

10

Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать таких же рубашек дороже куртки?

2B0545

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2013

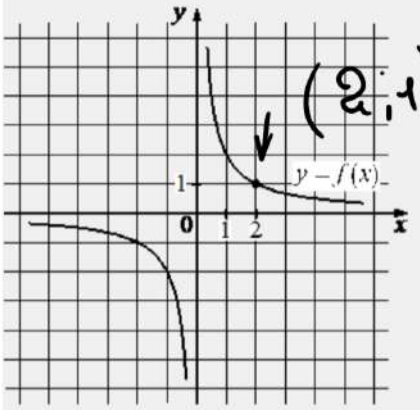
Куртка — 100%
9 руб — 90%
1 руб — 10%
11 руб — 110%

на 10%

ОТВЕТ 10

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



08C3D9

① $1 = \frac{k}{2}$ $\quad k = 2$

$y = \frac{2}{x}$

② $f(10) = \frac{2}{10} = 0{,}2$

ОТВЕТ 0 , 2

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2022

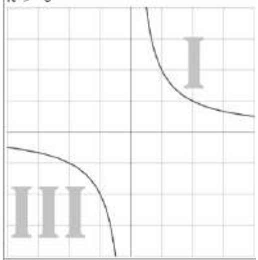
УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

$y = \frac{k}{x}$

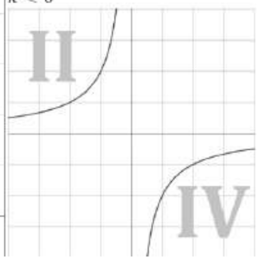
ЗА ЧТО ОТВЕЧАЕТ k

k отвечает за расположение ветвей гиперболы в разных четвертях

$k > 0$



$k < 0$



12

Найдите точку максимума функции

$y = (2x - 1)\cos x - 2\sin x + 5,$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

D3FCC5

① $y' = \cancel{2\cos x} + (2x-1)\cdot(-\sin x) - \cancel{2\cos x} = 0$

$2x - 1 = 0$
$x = 0{,}5$

$-\sin x = 0$
$\sin x = 0$
$\cancel{0}$

ОТВЕТ 0 , 5

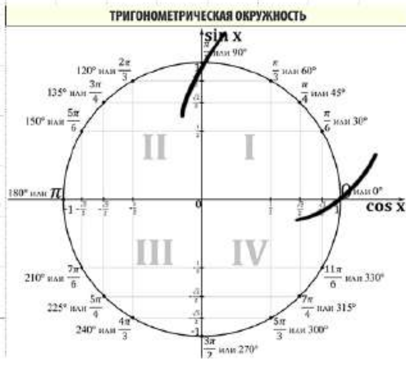
ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Демо 2021
Досрочная волна (Резерв) 2019
Основная волна (Резерв) 2017
Пробный ЕГЭ 2017
Досрочная волна 2016

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$ ✓
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

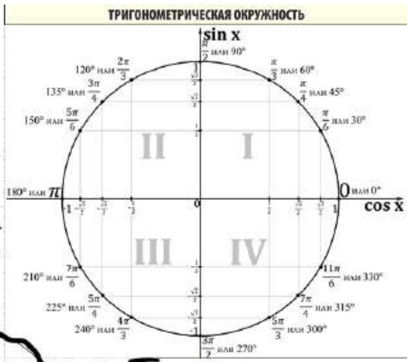


13

а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.

2A6C31



а) $4\cos^3 x - 3\cos x = 0$

$\cos x \cdot (4\cos^2 x - 3) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$4\cos^2 x - 3 = 0$

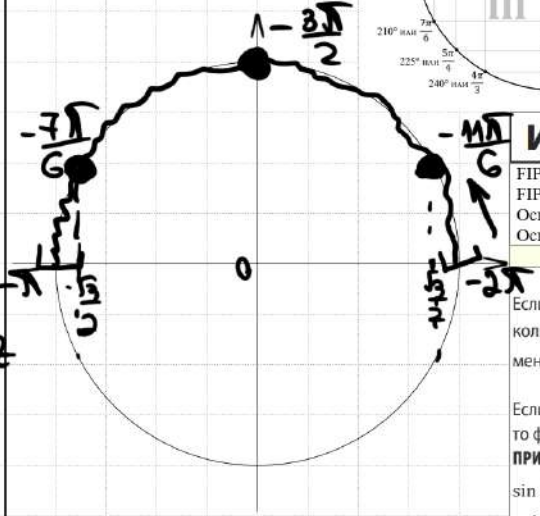
$4\cos^2 x = 3$

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = -\frac{3\pi}{2}$

$x = -\frac{2\pi}{1} + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$

$x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$

б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{6}$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)

FIPI (новый банк)

Основная волна 2023

Основная волна 2018

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

1 ШАГ

Если в скобочке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию

Если в скобочке сколько-то π, то функция остаётся прежней

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

2 ШАГ

Определяем знак по указанной в скобочках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)

ПРИМЕР:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

14

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

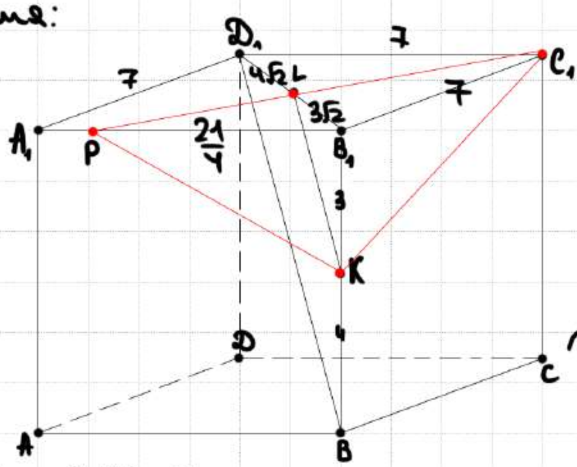
ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2015

AC96DF

а) ① Построение сечения:
- построим C_1K
- построим KL такую, что $KL \parallel BD_1$
- построим C_1L, $C_1L \cap A_1B_1 = P$
- построим PK

$\Rightarrow C_1KP$ – сечение



② $\Delta B_1LK \sim \Delta BB_1D_1$ по 2 углам

$$\frac{B_1K}{BB_1} = \frac{3}{7} = \frac{B_1L}{B_1D_1} = \frac{3\sqrt2}{7\sqrt2}$$

$$\Rightarrow D_1L = 4\sqrt2$$

③ $\Delta C_1D_1L \sim \Delta PB_1L$ по 2 углам

$$\frac{C_1D_1}{B_1P} = \frac{7}{B_1P} = \frac{D_1L}{B_1L} = \frac{4\sqrt2}{3\sqrt2}$$

$$B_1P = \frac{7\cdot 3\sqrt2}{4\sqrt2} = \frac{21}{4}$$

$$A_1P = 7 - \frac{21}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{1}{3} \blacksquare$$

б) $V_{куба} = 7^3 = 343$

$$V_{PB_1C_1K} = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{7\cdot\cancel{3}}{2}\cdot\frac{21}{4} = \frac{147}{8}$$

$$V_{иск} = \frac{343^{\,8}}{1} - \frac{147}{8} = \frac{2597}{8}.$$

Ответ: $\frac{2597}{8}$.

15 Решите неравенство
$$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \le 0.$$

ИСТОЧНИКИ

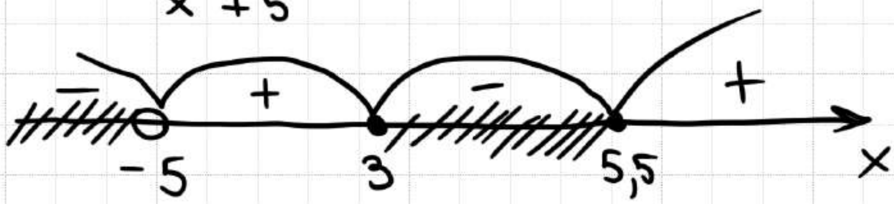
Основная волна (Резерв) 2017

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f}-\sqrt{g}$	$(f-g)$

$$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-\log_2 2}{\log_7(x+6)-\log_7 1} \le 0$$

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\cancel{(2-1)}\cdot(2x^2-17x+35-2)}{\cancel{(7-1)}(x+6-1)} \le 0 \quad \cdot 6 \\ ② \ 2x^2-17x+35>0 \\ ③ \ x+6>0 \end{cases}$$

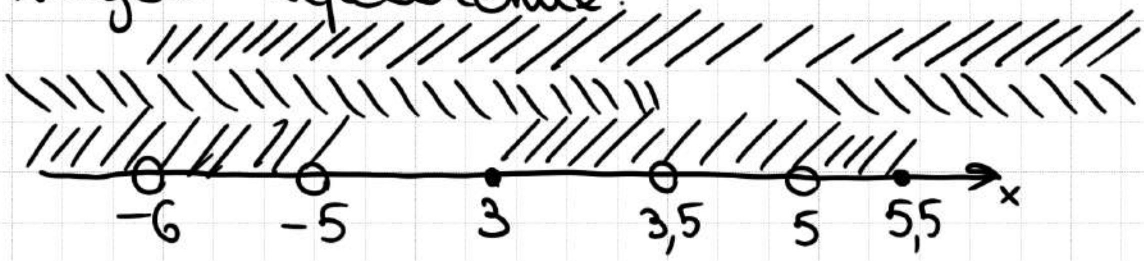
① $\dfrac{2x^2-17x+33}{x+5} \le 0$



② $2x^2-17x+35>0$

③ $x>-6$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-6;-5) \cup [3;3,5) \cup (5;5,5]$

16

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

65F0E4

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2017

Пусть S — сумма долга

$x = 58\,564$

$y = 106\,964$

$1 + \frac{r}{100} = b$

март — месяц платежа

Кредит на 4 года

Дата	Сумма долга
и 20	S
я 21	$S \cdot b$
м 21	$S \cdot b - x$
я 22	$S \cdot b^2 - x \cdot b$
м 22	$S \cdot b^2 - x \cdot b - x$
я 23	$S \cdot b^3 - x \cdot b^2 - xb$
м 23	$Sb^3 - xb^2 - xb - x$
я 24	$Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb$
м 24	$Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0$

Кредит на 2 года

Дата	Сумма долга
и 20	S
я 21	$S \cdot b$
м 21	$Sb - y$
я 22	$Sb^2 - yb$
м 22	$Sb^2 - yb - y = 0$

$$\begin{cases} ① \; Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0 \\ ② \; Sb^2 - yb - y = 0 \end{cases}$$

Выразим $Sb^2 = yb + y$ из ②

Подставим Sb^2 в ①

$(yb + y) \cdot b^2 - xb^3 - x \cdot b^2 - x \cdot b - x = 0$

$yb^3 + yb^2 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0$

$yb^2 \cdot (b+1) - xb^2 \cdot (b+1) - x \cdot (b+1) = 0$

$(b+1)(yb^2 - xb^2 - x) = 0$

$b = -1$

$yb^2 - xb^2 - x = 0$

$b^2 \cdot (y - x) = x$

$b^2 = \frac{x}{y-x}$

$b^2 = \frac{58564}{48400} = \frac{14641}{12100} = \frac{121}{100}$

$b = \frac{11}{10}$

$1 + \frac{r}{100} = \frac{11}{100}$

$r = 10\%$

Ответ: 10%.

17

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

ИСТОЧНИКИ

Ященко 2018
Основная волна (Резерв) 2014

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

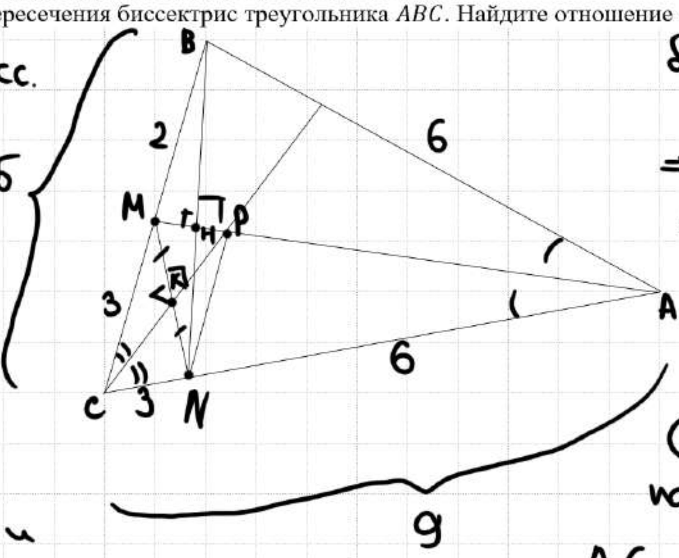
б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

а) ① по т. о бисс. $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{BM}{CM} = \frac{2}{3}$$

$BM = 2$

$CM = 3$



② $\triangle ABN$:

AH – биссектриса и высота

$\Rightarrow \triangle ABN$ – р/б.

$AN = 6$

$CN = 3$

③ $\triangle CMN$ – р/б.

CK – биссектриса и медиана

$MK = KN$

■

б) ① K – середина MN

PK – высота $\triangle PMN$

$\Rightarrow \triangle PMN$ – р/б.

$\Rightarrow AP : PN$

$\quad\quad\; \| $

$\quad\; AP : PM$

② $\triangle ACM$:

по т. о бисс.

$$\frac{AC}{CM} = \frac{9}{3} = \frac{AP}{PM} = \frac{3}{1}.$$

Ответ: 3:1.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

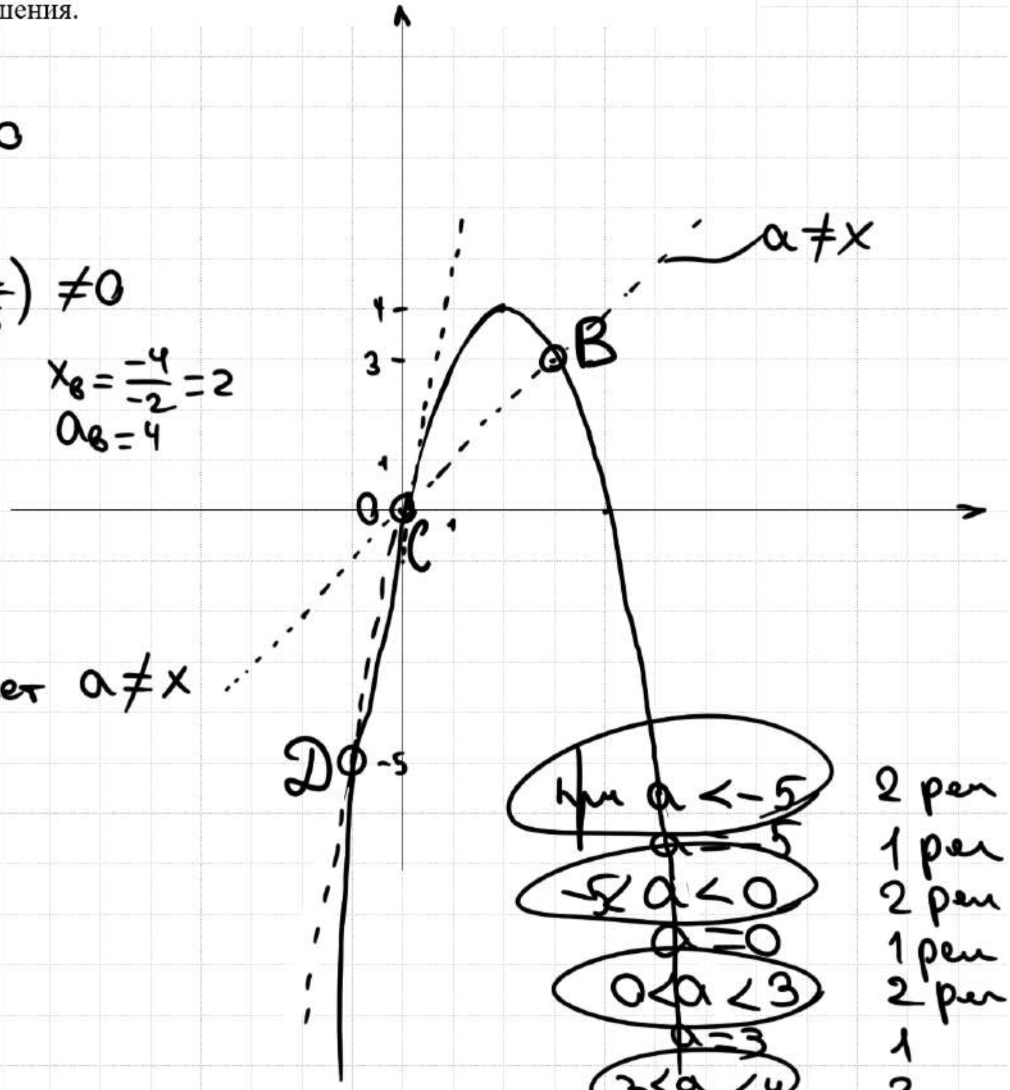
$$\begin{cases} x^2 - 4x + a = 0 \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 4x \\ 5\cdot(x-a)\cdot\left(x - \frac{a}{5}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 4x \\ a \neq x \\ a \neq 5x \end{cases}$$

$x_в = \frac{-4}{-2} = 2$

$a_в = 4$



при $a < -5$ 2 реш

$a = -5$ 1 реш

$-5 < a < 0$ 2 реш

$a = 0$ 1 реш

$0 < a < 3$ 2 реш

$a = 3$ 1

$3 < a < 4$ 2

$a = 4$ 1

$a > 4$ 0

$a = -x^2 + 4x$ пересекает $a \neq x$

$-x^2 + 4x = x$

$-x^2 + 3x = 0$

$x\cdot(3 - x) = 0$

$x = 0 \qquad x = 3$

$a = 0 \qquad a = 3$

Получаем

$B(3;3) \quad C(0;0)$

$a = -x^2 + 4x$ пересекает $a \neq 5x$

$-x^2 + 4x = 5x$

$-x^2 - x = 0$

$x^2 + x = 0$

$x\cdot(x + 1) = 0$

$x = 0 \qquad x = -1$

$a = 0 \qquad a = -5$

$D(-1;-5)$

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$

19 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2017

а) ① Может ли быть 8 чисел, зак. на 3 и 27 чётных чисел?

Сумма восьми различн. чисел, заканч. на 3 $\geq \frac{3+73}{2}\cdot 8$
≥ 304

Сумма 27-ми различн. чётных чисел $\geq \frac{2+54}{2}\cdot 27$
≥ 756

$\Rightarrow$ Сумма всех 35 чисел ≥ 1060

Да, если взять
3 13 23 33 43 53 63 73
$\underbrace{2 \quad 4 \quad 6 \quad \ldots \quad 50 \quad 52}_{\text{арифм. прогр.}}$ 56

Получим $= \frac{3+73}{2}\cdot 8 + \frac{2\cdot 52}{2}\cdot 26 + 56 = 1062$

Ответ: а) да

б) 33 чётных и 2 числа, ок. на 3

Сумма 33 разл. чётн $\geq \frac{2+66}{2}\cdot 33$
≥ 1122
(что превышает 1062)

$\Rightarrow$ не могут

Ответ: б) нет

19 На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

в) ① Если таких чисел < 3, то будет превышение суммы 1062 (как в п. б)

Если таких чисел 3 шт., то
32 чётные + __3 + __3 + __3 = нечётное
но 1062 чётное
$\Rightarrow$ 3 таких числа быть не может

Если таких чисел 4 шт., то
$S \geq \frac{2+62}{2}\cdot 31 + 3 + 13 + 23 + 33$
$S \geq 1064$
$\Rightarrow$ 4 таких числа быть

Если таких чисел 5 шт., то
30 чётных + __3 + __3 + __3 + __3 + __3 = нечётное число
но 1062 - чётное число

Искомое число ≥ 6

② Покажем, что 6 таких чисел может быть:

Сумма 6 разл. чисел окан. на 3 $\geq \frac{3+53}{2}\cdot 6$
≥ 168

Сумма 29 разл. чётных $\geq \frac{2+58}{2}\cdot 29$
≥ 870

$\Rightarrow$ Сумма 35-ти чисел ≥ 1038

Пример: 3 13 23 33 43 53
$\underbrace{2 \quad 4 \quad \ldots \quad 54}_{\text{арифм. прогр.}}$ 56
82

$S = \frac{3+53}{2}\cdot 6 + \frac{2\cdot 56}{2}\cdot 28 + 82 = 1062$

Ответ: в) 6.