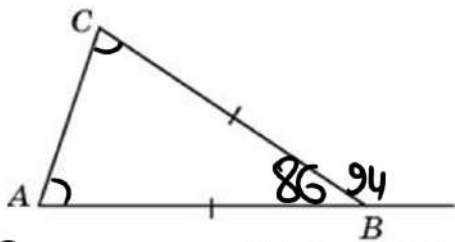


1

В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 94° . Найдите угол C .
 Ответ дайте в градусах.



$$\textcircled{1} \angle B_{\text{внеш}} = 180 - 94 = 86$$

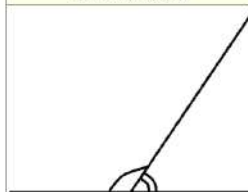
$$\textcircled{2} \angle C = \frac{180 - 86}{2} = 47$$

ОТВЕТ | 47

ИСТОЧНИКИ

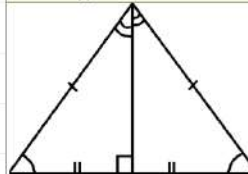
Основная волна (Резерв) 2023
 Досрочная волна (Резерв) 2018

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ



В сумме 180°

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Биссектриса, медиана и высота,
 проведённые к основанию,
 равны

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

180°

2

На плоскости отмечены точки $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ и $C(2; 4)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\textcircled{1} \begin{matrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2; 1 \\ 1; 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} (3; 4)$$

$$\textcircled{3} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

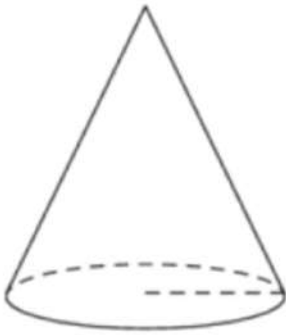
ОТВЕТ | 5

ИСТОЧНИКИ

Семёнов

3

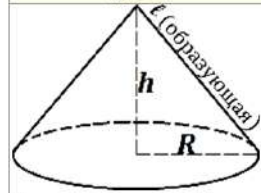
Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующая увеличится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?



ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2018
ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КОНУСА



$S_{\text{боковой поверхности}} = \pi Rl$

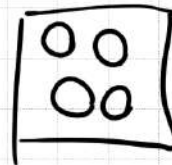
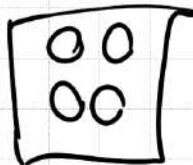
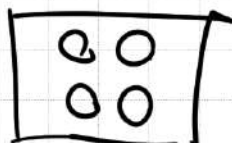
ОТВЕТ | 3

4

В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.



e33c5D



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2018

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$$

ОТВЕТ | 0,2

7

Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

4881FC

$$16 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = 32 \cos^2 \alpha - 16$$

$$32 \cdot 0,25 - 16$$

$$8 - 16$$

$$-8$$

ОТВЕТ | - 8

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна 2013

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

- 1 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
- 2 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- 3 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- 4 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

8

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

8EAF19

$$v(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t^{\leftarrow 2} + 4$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 4 = 6$$

ОТВЕТ | 6

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
 ПРОИЗВОДНОЙ

$S'(t) = V(t)$
 $V'(t) = a(t)$

ПРОИЗВОДНЫЕ

- ✓ 1 $C' = 0$
- ✓ 2 $x' = 1$
- ✓ 3 $(Cx)' = C$
- ✓ 4 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$5 (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$6 (U \cdot V)' = U'V + UV'$$

$$7 \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$8 (U(V))' = (U(V))' \cdot V'$$

$$9 (\sin x)' = \cos x$$

$$10 (\cos x)' = -\sin x$$

$$11 (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12 (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13 (e^x)' = e^x$$

$$14 (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$15 (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$16 (\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$$

9

Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, прошедшее после начала работы лебёдки, $\omega = 50$ град./мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4$ град./мин² — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Определите время, прошедшее после начала работы лебёдки, если известно, что за это время угол намотки φ достиг 2500° . Ответ дайте в минутах.

$$2500 = 50 \cdot t + \frac{2 \cdot 4 t^2}{2} \quad | : 2$$

$$t^2 + 25t - 1250 = 0$$

$$t = 25 \quad \cancel{t = -50}$$

ОТВЕТ | 25

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)

10

Один мастер может выполнить заказ за 30 часов, а другой — за 15 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)

	Пр-ть	Время	Кол-во зак.
I	$\frac{1}{30}$ <small>заказ / час</small>	30 <small>часов</small>	1 <small>заказ</small>
II	$\frac{1}{15}$	15	1
Вместе	$\frac{1}{x}$	x	1

$$\frac{1^{(1)}}{30} + \frac{1^{(2)}}{15} = \frac{1}{x} \quad 9CCF41$$

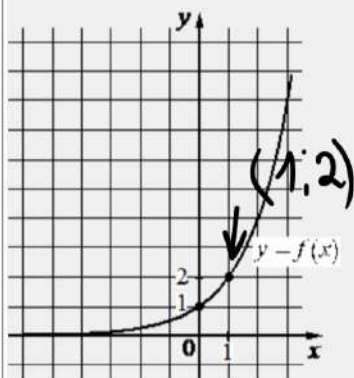
$$\frac{3}{30} = \frac{1}{x}$$

$$x = 10$$

ОТВЕТ | 10

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2 &= a^1 \\ a &= 2 \\ y &= 2^x \\ \textcircled{2} \quad f(3) &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

EC397F

ОТВЕТ | 8

12

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 8$ на отрезке $[-2; 1]$.

8C2DD4

$$\textcircled{1} \quad y' = e^{2x} \cdot 2 - 2 \cdot e^x = 0$$

$$e^x \cdot (e^x - 1) = 0$$

$$e^x = 0$$

нет рен

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad y(0) = e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot e^0 + 8 = 7$$

$$y(-2) = \dots$$

$$y(1) = \dots$$

ОТВЕТ | 7

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна 2023
Основная волна 2022

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2015
Досрочная волна 2013

ПРОИЗВОДНЫЕ

1 $C' = 0$

2 $x' = 1$

3 $(Cx)' = C$

4 $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

5 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6 $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

7 $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

✓ 8 $(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$

9 $(\sin x)' = \cos x$

10 $(\cos x)' = -\sin x$

11 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12 $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

✓ 13 $(e^x)' = e^x$

14 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

15 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

16 $(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

$$а) 4 \cdot (1 - \sin^2 x) - 8\sin x + 1 = 0$$

$$-4\sin^2 x - 8\sin x + 4 + 1 = 0$$

$$-4\sin^2 x - 8\sin x + 5 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0$$

$$\text{Пусть } \sin x = t$$

$$4t^2 + 8t - 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 144$$

$$t = \frac{-8 \pm 12}{8}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$t = -2,5$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

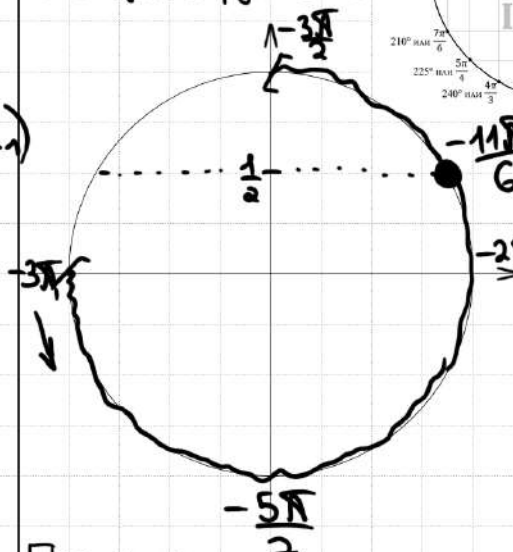
$\sin x = -2,5$
нет решений

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

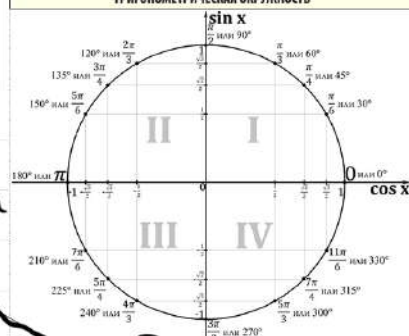
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
б) $-\frac{11\pi}{6}$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим
 $x = -\frac{2\pi}{7} + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2019
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Основная волна 2015
Материалы для экспертов ЕГЭ
Основная волна 2012
СтатГрад 11.03.2020

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$1 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$3 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

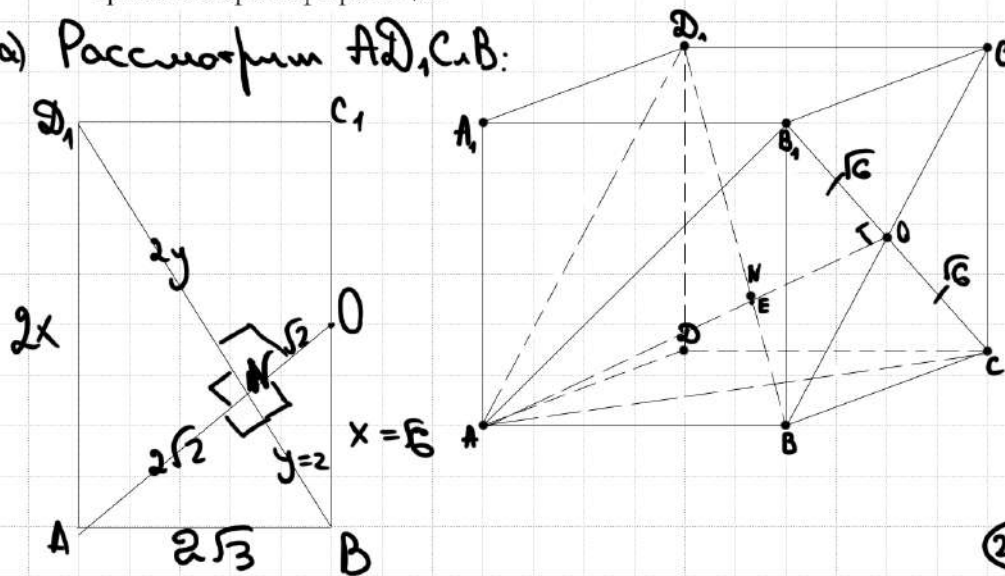
$$4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN:ND_1 = 1:2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

а) Рассмотрим $AD_1 C_1 B$:



Пусть $AO \cap BD_1 = E$
 $\triangle AD_1 E \sim \triangle OBE$ по 2 углам

$$k = \frac{2}{1} = \frac{AD_1}{OB} = \frac{D_1 E}{BE} = \frac{2}{1}$$

значит E и N совпадают
 NO проходит через A ■

б) ① NO — это расстояние между прямыми BD_1 и CB_1
 $\Rightarrow NO$ — это общий перпендикуляр к этим прямым
 $NO \perp B_1 C$
 $NO \perp BD_1$

② $\triangle AB_1 C$:

AO — медиана и высота
 $\Rightarrow \triangle B_1 C$ — р.б.
 $\Rightarrow AB_1 = AC$

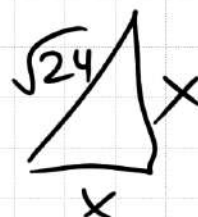
③ $\triangle AB_1 B = \triangle ACB$ по гипотенузе и катету
 $\Rightarrow BB_1 = BC$

④ $\triangle BON$: $x^2 = y^2 + 2$
 $\triangle D_1 AN$: $4x^2 = 4y^2 + 8$

$\triangle ABD$: $h = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2 = BN = y$

$$x = \sqrt{6}$$

⑤ Рассмотрим $\triangle BCC_1$ — прямоугол.



$$x = \sqrt{12}$$

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{12}^3 = 24\sqrt{3}$$

Ответ: $24\sqrt{3}$

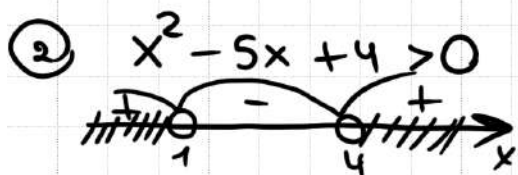
15 Решите неравенство

$$\log_2(14 - 14x) \geq \log_2(x^2 - 5x + 4) + \log_2(x + 5).$$

- ① $14 - 14x > 0$
- ② $x^2 - 5x + 4 > 0$
- ③ $x + 5 > 0$
- ④ $14 - 14x \geq (x^2 - 5x + 4)(x + 5)$

$$\textcircled{1} \quad 14 > 14 \cdot x \quad | : 14$$

$$x < 1$$



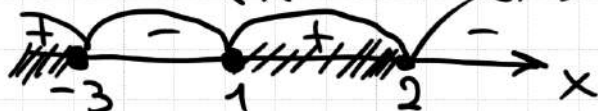
$$\textcircled{3} \quad x > -5$$

$$\textcircled{4} \quad 14 \cdot (1 - x) - (x - 1)(x - 4)(x + 5) \geq 0$$

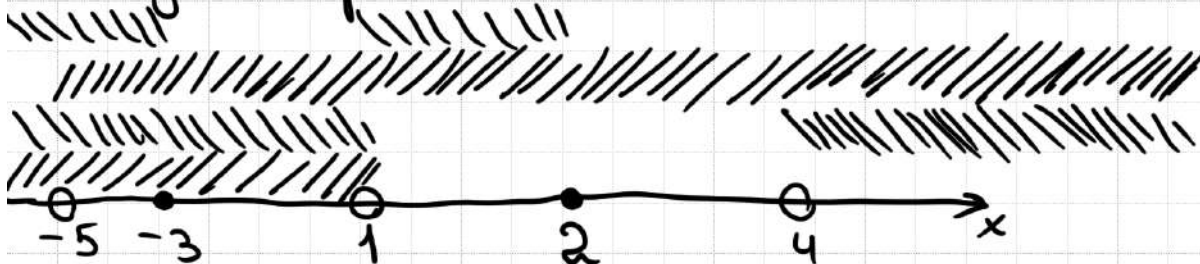
$$14 \cdot (1 - x) + (1 - x)(x - 4)(x + 5) \geq 0$$

$$(1 - x) \cdot (14 + x^2 + x - 20) \geq 0$$

$$(1 - x) \cdot (x^2 + x - 6) \geq 0$$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-5; -3]$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2019

Ященко 2022 (36 вар)

Ященко 2021 (36 вар)

Ященко 2020 (36 вар)

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1 $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

2 $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

3 $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

4 $\log_a^n b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

5 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

6 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов (по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число);
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Пусть r число-день
платежка

$$O.C.B. < 1200 \text{ тыс.}$$

Дата Сумма долга

$$1000 + 26r < 1200$$

15 я 1 мес = 1000 тыс

$$26r < 200$$

1 1000 · (1 + $\frac{r}{100}$) = 1000 + 10r

$$r < \frac{200}{26} \cdot \frac{100}{13}$$

7 ф \Rightarrow была
выплата 400 + 10r

15 ф 600 тыс

1 600 + 6r

7 м \Rightarrow с.в. 200 + 6r

15 м 400 тыс

1 400 + 4r

7 а \Rightarrow с.в. 100 + 4r

15 а 300 тыс

1 300 + 3r

7 м \Rightarrow с.в. 100 + 3r

15 м 200 тыс

1 200 + 2r

7 ю \Rightarrow с.в. 400 + 2r

15 ю 100 тыс.

1 100 + r

7 и \Rightarrow с.в. 100 + r

15 и 0

$$r_{\text{наиб. цел.}} = 7$$

Ответ: 7.

ФИР (старый банк)
 ФИР (новый банк)
 Демо 2023
 Демо 2022
 Демо 2021
 Демо 2020
 Демо 2019
 Демо 2018
 Демо 2017
 Основная волна (Резерв) 2023
 Досрочная волна 2021
 Основная волна 2016
 СтатГрад 15.05.2020
 СтатГрад 17.05.2019
 СтатГрад 18.05.2017
 Семёнов 2018

Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC . На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ , заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC , если $BC = 4\sqrt{19}$.

а) ① Пусть $AP = x = PM = CQ = NQ$

Тогда $AB = 4x$
 $BC = 2x$

Пусть MN — ср. линия $\triangle ABC$

② Проведем PL и EQ

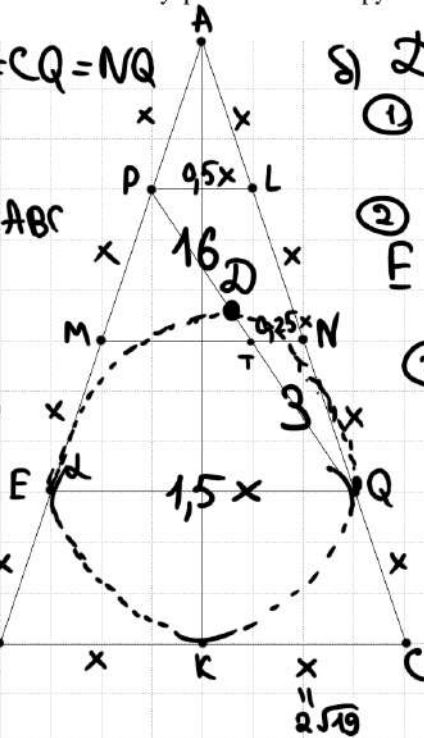
Таким, что $PL \parallel MN \parallel EQ \parallel BC$

③ $MN = x = \frac{1}{2} BC$ (ср. линия $\triangle ABC$)
 $PL = 0,5x = \frac{1}{2} MN$ (ср. линия $\triangle AMN$)

$TN = 0,25x = \frac{1}{2} PL$ (ср. линия $\triangle PLQ$)

$MT = x - 0,25x = 0,75x$

$\frac{MT}{TN} = \frac{0,75x}{0,25x} = \frac{3}{1}$ ■



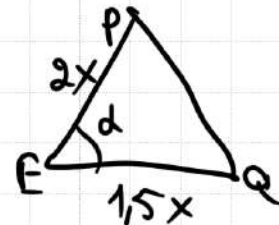
б) DQ — ?

① $BC = 4\sqrt{19} = 2x$
 $x = 2\sqrt{19}$

② т.к. $BE = BK = CQ$, то E, Q и K — точки касания окружности

③ $\triangle ABK$:
 $\cos \angle ABK = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$
 $\cos \angle AEQ = \frac{1}{4}$

④ $\triangle EPQ$:



по т. кос

$$PQ^2 = 4x^2 + 2,25x^2 - 2 \cdot 1,5x \cdot 2x \cdot \frac{1}{4}$$

$$PQ^2 = 4,75x^2$$

$$PQ^2 = \frac{19}{4} \cdot 4 \cdot 19$$

$$PQ = \frac{19}{2}$$

⑤ по т. о кас. и сек.

$$PE^2 = PD \cdot PQ$$

$$(4\sqrt{19})^2 = PD \cdot 19$$

$$PD = 16$$

$$DQ = 19 - 16 = 3$$

Ответ: 3.

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

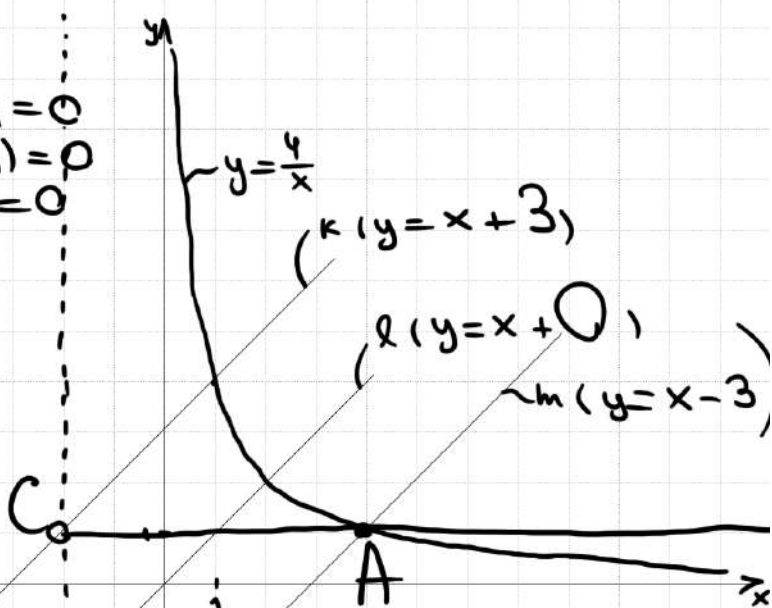
$$\begin{cases} xy^2 - xy - 4y + 4 = 0 \\ x + 2 > 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

Упростим уравнение

$$\begin{aligned} xy^2 - xy - 4y + 4 &= 0 \\ xy \cdot (y - 1) - 4 \cdot (y - 1) &= 0 \\ (y - 1) \cdot (xy - 4) &= 0 \\ \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{4}{x} \\ x > -2 \\ y = x + a \end{cases}$$



Для прямой k
 $y = x + a$ проходит через $C(-2; 1)$
 $1 = -2 + a$
 $a = 3$

Для прямой l
 $y = x + a$ проходит через $B(-2; -2)$
 $-2 = -2 + a$
 $a = 0$

Для прямой m
 $y = x + a$ проходит через $A(4; 1)$
 $1 = 4 + a$
 $a = -3$

при $a < -3$	3 реш
$a = -3$	2 реш
$-3 < a < 0$	3
$a = 0$	2
$0 < a < 3$	2
$a = 3$	1
$a > 3$	1

Ответ: $\{-3\} \cup [0; 3)$

- а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
- б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
- в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

а) $S \geq 230 + \frac{1+99}{2} \cdot 99$
 $S \geq 5180$
 $5180 > 5120$
 \Rightarrow числа 230 не может быть
 Ответ: а) нет

б) $S \geq \frac{1+13}{2} \cdot 13 + \frac{15+101}{2} \cdot 87$
 $S \geq 91 + 5046$
 $S \geq 5137$
 \Rightarrow число 14 точно присутствует на доске
 Ответ: б) нет

в) Какое наименьшее количество возможных сумм 100 разл. чисел
 $S \geq \frac{1+100}{2} \cdot 100$
 $S \geq 5050$
 S_{min} на 70 меньше, чем дано в условии

- 2) Первые 100 разл. натур. чисел содержат 7 чисел, кратных 14:
- 14
 - 28
 - 42
 - 56
 - 70
 - 84
 - 98

3) Уберём одно из чисел, кратных 14 и посмотрим, какая будет минимальная сумма без него:

Заменим 98 на 101 (остаётся 6 чисел)
 Тогда $S \geq \frac{1+97}{2} \cdot 97 + 99 + 100 + 101$
 $S \geq 5053 \checkmark$

Заменим 84 на 102 (остаётся 5 чисел)
 $S \geq 5053 + 18$
 $S \geq 5071 \checkmark$

Заменим 70 на 103 (остаётся 4 числа)
 $S \geq 5071 + 33$
 $S \geq 5104 \checkmark$

Заменим 56 на 104 (остаётся 3 числа)
 $S \geq 5104 + 48$
 $S \geq 5152 \times$
 Если чисел, кратных 14 меньше 3 штук, то $S > 5152$
 \Rightarrow Ускользкое кол-во чисел ≥ 4

4) Покажем, что 4 числа можно дать:

- 1
- 2
- ...
- 68
- 69
- ...
- 71
- 72
- ...
- 82
- 83
- ...
- 85
- 86
- ...
- 96
- 97
- ...
- 99
- 100
- 101
- 102
- 109

$$S = \frac{1+69}{2} \cdot 69 + \frac{71+83}{2} \cdot 13 + \frac{85+97}{2} \cdot 13 + \frac{99+102}{2} \cdot 4 + 109 = 5120$$

Ответ: в) 4.