

ЕГЭ по математике. Профильный уровень
Задачи второй части реального ЕГЭ
А.Н.Павликов
01.09.2023

Оставайтесь на связи, чтобы за три дня до экзамена не пришлось спрашивать у меня: "Где же вы были раньше?!"



Содержание

Предисловие	5
Задание 13 Сложные уравнения	6
Экзамен 2013 года	6
Экзамен 2014 года	11
Экзамен 2015 года	14
Экзамен 2016 года	16
Экзамен 2017 года	22
Экзамен 2018 года	27
Экзамен 2019 года	30
Экзамен 2020 года	35
Экзамен 2021 года	39
Экзамен 2022 года	43
Экзамен 2023 года	49
Задание 14 Стереометрия	57
Экзамен 2015 года	57
Экзамен 2016 года	60
Экзамен 2017 года	65
Экзамен 2018 года	69
Экзамен 2019 года	73
Экзамен 2020 года	77
Экзамен 2021 года	80
Экзамен 2022 года	84
Экзамен 2023 года	89
Задание 15 Сложные неравенства	97
Экзамен 2015 года	97
Экзамен 2016 года	99
Экзамен 2017 года	102
Экзамен 2018 года	105
Экзамен 2019 года	108
Экзамен 2020 года	111
Экзамен 2021 года	114
Экзамен 2022 года	117
Экзамен 2023 года	121

Задание 16 Экономическая задача	127
Экзамен 2015 года	127
Экзамен 2016 года	130
Экзамен 2017 года	137
Экзамен 2018 года	143
Экзамен 2019 года	148
Экзамен 2020 года	154
Экзамен 2021 года	159
Экзамен 2022 года	164
Экзамен 2023 года	172
Задание 17 Планиметрия	182
Экзамен 2014 года	182
Экзамен 2015 года	186
Экзамен 2016 года	189
Экзамен 2017 года	194
Экзамен 2018 года	199
Экзамен 2019 года	202
Экзамен 2020 года	206
Экзамен 2021 года	210
Экзамен 2022 года	214
Экзамен 2023 года	219
Задание 18 Параметр	225
Экзамен 2013 года	225
Экзамен 2014 года	229
Экзамен 2015 года	232
Экзамен 2016 года	234
Экзамен 2017 года	239
Экзамен 2018 года	243
Экзамен 2019 года	246
Экзамен 2020 года	250
Экзамен 2021 года	253
Экзамен 2022 года	256
Экзамен 2023 года	260
Задание 19 Теория чисел	267
Экзамен 2013 года	267
Экзамен 2014 года	274
Экзамен 2015 года	279
Экзамен 2016 года	282

Экзамен 2017 года	289
Экзамен 2018 года	295
Экзамен 2019 года	301
Экзамен 2020 года	308
Экзамен 2021 года	313
Экзамен 2022 года	317
Экзамен 2023 года	323

Математик МГУ

Предисловие

Это сборник заданий второй части реального ЕГЭ по профильной математике. Задания досрочной, основной и резервной волн, которые соответствует демо версии ЕГЭ 2024. Ко всем заданиям даны ответы.

Уровень задач может колебаться от года к году, но общее представление и уровень сложности они отражают хорошо.

Задачи даны в хронологическом порядке, чтобы можно было проследить, как менялись те или иные задания второй части профиля.

Небольшое напутствие перед тем, как вы приступите к решению задач. Цитирую по книге *М. Норбеков "Опыт дурака 5: Ошибки, которые совершают люди"*.

Каждый из вас держал в руках простой карандаш. Такая цилиндрическая деревяшка, в сердцевине которой находится грифель. Кольцо с бриллиантом тоже каждый держал. Ну, или видел. На фотографиях или в кино...

Знаете, что общего между грифелем и бриллиантом? Они близкие родственники, буквально – родные братья. В грифеле содержится графит. Бриллиант – это обработанный алмаз. И графит, и алмаз состоят из углерода. Представляете?

Только алмаз получается в результате огромного давления земных пород в течение миллионов лет и при температуре более 1000 градусов по Цельсию или 2000 по Фаренгейту! И образуется он ... из графита!

<...>

Каждый сам для себя решает – быть ему грифелем в чужих руках, пишущих его судьбу в своих интересах, быть стертým до огрызка и выброшенным на свалку истории... Или формировать из себя алмаз под давлением обстоятельств, окружающей серой графитовой массы и собственных усилий, одновременно ограняя себя в прекрасный редкой чистоты бриллиант!

Страшно? Да! Трудно? Очень!! Невозможно? Возможно!!!
Повторяю:

Возможно всё, что вы себе представляете!!!!

И еще одно. Эти слова вы уже, возможно, от меня слышали. Однако я не устану их повторять:

**Я верю в каждого из вас!
У вас всё получится!!
Искренне желаю вам успеха!!!**

Задание 13. Сложные уравнения**Экзамен 2013 года**

1. (Досрочная волна 23.04.2013)

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) \cdot \sin x = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

2. (Досрочная волна 23.04.2013)

а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) \cdot \sin x = \sqrt{3} \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi; -6\pi]$.

3. (Досрочная волна 23.04.2013)

а) Решите уравнение

$$-\sqrt{2} \sin \left(-\frac{5\pi}{2} + x \right) \cdot \sin x = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{9\pi}{2}; 6\pi]$.

4. (Досрочная волна 23.04.2013)

а) Решите уравнение

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$.

5. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x = \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

6. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$\log_3 (3x^4 + 42) = 1 + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{13x^2 + 2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5}{4}; 2]$.

7. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$1 + \log_3 (x^4 + 25) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{30x^2 + 12}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{11}{5}; \frac{16}{5}]$.

8. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}]$.

9. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

10. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

11. (Основная волна 03.06.2013)

а) Решите уравнение

$$15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}]$.

12. (Основная волна 10.06.2013)

а) Решите уравнение

$$1 + \log_2(9x^2 + 1) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2x^4 + 42}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$.

13. (Основная волна 10.06.2013)

а) Решите уравнение

$$1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; \frac{8}{9}]$.

14. (Резервная волна 19.06.2013)

а) Решите уравнение

$$4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; \frac{5}{3})$.

15. (Резервная волна 19.06.2013)

а) Решите уравнение

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; \frac{7}{3})$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{17\pi}{4}$.
2. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{20\pi}{3}$, $-\frac{13\pi}{2}$, $-\frac{19\pi}{3}$.
3. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{9\pi}{2}$, $\frac{19\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{2}$.
4. а) $x = -1$, $x = \log_3 \frac{5}{3}$;
б) $x = \log_3 \frac{5}{3}$.
5. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{13\pi}{6}$, -2π , $-\pi$.
6. а) $x = -2\sqrt{3}$, $x = -1$, $x = 2\sqrt{3}$, $x = 1$;
б) $x = -1$, $x = 1$.
7. а) $x = -\sqrt{7}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{7}$;
б) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{7}$.
8. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
9. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$.
10. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$.
11. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{21\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$.
12. а) $x = -\sqrt{5}$, $x = -2$, $x = 2$, $x = \sqrt{5}$;
б) $x = 2$, $x = \sqrt{5}$.
13. а) $x = -\sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$;
б) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

14. а) $x = 1, x = \log_2 3$;

б) $x = \log_2 3$.

15. а) $x = 1, x = \log_3 5$;

б) $x = \log_3 5$.

Математик МГУ

Экзамен 2014 года

1. (Досрочная волна 28.04.2014)

а) Решите уравнение

$$9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

2. (Досрочная волна 28.04.2014)

а) Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

3. (Досрочная волна 08.05.2014)

а) Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

4. (Досрочная волна 08.05.2014)

а) Решите уравнение

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\sin x} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\sin x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

5. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

6. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

7. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi]$.

8. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$\cos x + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

9. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

10. (Основная волна 05.06.2014)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

11. (Резервная волна 19.06.2014)

а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

Ответы

1. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{17\pi}{6}$, $-\frac{13\pi}{6}$.
2. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$, $\frac{23\pi}{6}$.
3. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k – целое;
б) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$.
4. а) $x = \pi k$, k – целое;
б) 2π , 3π .
5. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{15\pi}{4}$.
6. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, k – целое;
б) 2π , $\frac{13\pi}{6}$, 3π .
7. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) -4π , $-\frac{15\pi}{4}$, -3π .
8. а) $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi k$, k – целое;
б) -3π , $-\frac{11\pi}{3}$.
9. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
10. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$.
11. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

3. (Основная волна 04.06.2015)

а) Решите уравнение

$$3 \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

4. (Основная волна 04.06.2015)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - 5\sqrt{2} \cos x - 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

Ответы

1. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$.

2. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;

б) $\frac{7\pi}{3}$.

3. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;

б) $\frac{13\pi}{6}$.

4. а) $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) $-\frac{11\pi}{4}$.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 0,25.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0,75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

а) Решите уравнение

$$8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 5; \log_2 11]$.

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

а) Решите уравнение

$$27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 10]$.

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

а) Решите уравнение

$$\frac{13 \sin^2 x - 5 \sin x}{13 \cos x + 12} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

8. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2 (2 \cos x) - 9 \log_2 (2 \cos x) + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

9. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \log_3^2 (2 \cos x) - 5 \log_3 (2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

10. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \log_4^2 (4 \cos x) - 7 \log_4 (4 \cos x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

11. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

12. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$8 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

13. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$8 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

14. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin x + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

15. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

16. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

17. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$6 \log_8^2 x - 5 \log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2,5]$.

18. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \log_9^2 x - 3 \log_9 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{10}; \sqrt{99}]$.

19. (Основная волна 06.06.2016)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{11\pi}{3}$, $-\frac{10\pi}{3}$, $-\frac{8\pi}{3}$.
2. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.
3. а) $x = 2$, $x = \log_2 7$;
б) $x = \log_2 7$.
4. а) $x = 1$, $x = \log_3 5$;
б) $x = \log_3 5$.
5. а) $x = \pi k$, $x = \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$, k – целое;
б) -3π , -2π , $\arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.
6. а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$.
7. а) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{10\pi}{3}$.
8. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{4}$.
9. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.
10. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{3}$.
11. а) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{4}$.
12. а) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{3}$.
14. а) $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = 2\pi k$, k – целое;
б) -4π , $-\frac{17\pi}{6}$.
15. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, k – целое;
б) -3π , $-\frac{5\pi}{3}$.
16. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$.
17. а) $x = 2$, $x = 2\sqrt{2}$;
б) $x = 2$.
18. а) $x = 3$, $x = 9$;
б) $x = 9$.
19. а) $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{4}$.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$.

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

а) Решите уравнение

$$\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

3. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

4. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$8 \cdot 16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

5. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

6. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$3 \log_8^2(\sin x) - 5 \log_8(\sin x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

7. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(\sin x) - 5 \log_2(\sin x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

8. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

9. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

10. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_8(7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

11. (Основная волна, 02.06.2017)

а) Решите уравнение

$$0,4^{\sin x} + 2,5^{\sin x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

12. (Резервная волна, 28.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 14x) = 5.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}]$.

13. (Резервная волна, 28.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 24x) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,1; 12\sqrt{5}]$.

14. (Резервная волна, 28.06.2017)

а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 2x) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2; \log_2 5]$.

15. (Резервная волна, 28.06.2017)

а) Решите уравнение

$$2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Ответы

1. а) $x = \frac{1}{2}, x = 2$;
б) $x = \frac{1}{2}$.
2. а) $x = \pi + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$.
3. а) $x = \pi + 2\pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $3\pi, \frac{11\pi}{3}$.
4. а) $x = \pi + 2\pi k, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{8\pi}{3}, 3\pi$.
5. а) $x = 2\pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-4\pi, -\frac{11\pi}{3}$.
6. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{19\pi}{6}$.
7. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{7\pi}{4}$.
8. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$.
9. а) $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.
10. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$.
11. а) $x = \pi k, k - \text{целое}$;
б) $2\pi, 3\pi$.
12. а) $x = -2, x = 16$;
б) $x = -2$.
13. а) $x = -3, x = 27$;
б) $x = -3$.

14. а) $x = -1, x = 3;$

б) $x = -1.$

15. а) $x = 4, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое};$

б) $\frac{2\pi}{3}.$

Математик МГУ

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi]$.

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

3. (Основная волна, 01.06.2018)

а) Решите уравнение

$$\sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

4. (Основная волна, 01.06.2018)

а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

5. (Основная волна, 01.06.2018)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

6. (Основная волна, 01.06.2018)

а) Решите уравнение

$$\sqrt{6} \sin^2 x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$.

7. (Резервная волна, 25.06.2018)

а) Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

8. (Резервная волна, 25.06.2018)

а) Решите уравнение

$$2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

9. (Резервная волна, 25.06.2018)

а) Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

10. (Резервная волна, 25.06.2018)

а) Решите уравнение

$$2 \cos x + \sin^2 x = 2 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi]$.

Ответы

1. а) $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k – целое;
б) -3π , $-\frac{7\pi}{2}$.
2. а) $x = -2$, $x = 2$;
б) $x = 2$.
3. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{19\pi}{6}$, -3π , -2π .
4. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) 2π , 3π , $\frac{19\pi}{6}$.
5. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) -2π , $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$.
6. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) 3π , 4π , $\frac{17\pi}{4}$.
7. а) $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k – целое;
б) -4π , $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
8. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) -3π , $-\frac{13\pi}{6}$, -2π .
9. а) $x = 2$, $x = 5$;
б) $x = 2$.
10. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) -4π , $-\frac{10\pi}{3}$, -3π .

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2 (2 \cos x) - 9 \log_2 (2 \cos x) + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2 (2 \sin x) - 5 \log_2 (2 \sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \log_{0,5}^2 (2 \sin x) + 7 \log_{0,5} (2 \sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

4. (Досрочная волна 29.03.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \log_{0,75}^2 (\sin x) + 3 \log_{0,75} (\sin x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

5. (Досрочная волна 10.04.2019)

а) Решите уравнение

$$\log_7 (x + 2) = \log_{49} x^4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35]$.

6. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

7. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

8. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin x - 2 \cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

9. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 4\sqrt{3} \cos x - 7 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

10. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$.

11. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$8 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

12. (Основная волна, 29.05.2019)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

13. (Резервная волна, 24.06.2019)

а) Решите уравнение

$$9^{\cos x} + 9^{-\cos x} = \frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. (Резервная волна, 24.06.2019)

а) Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

15. (Резервная волна, 24.06.2019)

а) Решите уравнение

$$4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{4}$.
2. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{3\pi}{4}$.
3. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{5\pi}{4}$.
4. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{8\pi}{3}$.
5. а) $x = -1$, $x = 2$;
б) $x = -1$.
6. а) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{13\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$.
7. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$.
8. а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$.
9. а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{23\pi}{6}$.
10. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$.
11. а) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{3}$.
12. а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.
13. а) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$.

14. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) -3π , $-\frac{11\pi}{4}$, -2π .

15. а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, k – целое;

б) $-\frac{8\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$.

Математик МГУ

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

2. (Досрочная волна 27.03.2020)

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

3. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

4. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

5. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

6. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

7. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi \right]$.

8. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin 2x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$.

9. (Основная волна, 10.07.2020)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sqrt{2} \cos x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

10. (Основная волна, 10.07.2020)

$$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

11. (Резервная волна, 25.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

12. (Резервная волна, 25.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

13. (Резервная волна, 25.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 2x) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2; \log_2 2]$

14. (Резервная волна, 25.07.2020)

а) Решите уравнение

$$\log_5(x^2 - 4x) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0,1; \log_3 10]$.

Ответы

1. а) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$.
2. а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{3}$.
3. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{4\pi}{3}$.
4. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{3}$.
5. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{3}$.
6. а) $x = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) 3π , $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$, 4π .
7. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) -4π , $-\frac{15\pi}{4}$, -3π .
8. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{15\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{2}$.
9. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{2}$.
10. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) 2π , $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, 3π .
11. а) $x = 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{7\pi}{3}$, -2π , $-\frac{5\pi}{3}$.
12. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$.
13. а) $x = -1$, $x = 3$;
б) $x = -1$.
14. а) $x = -1$, $x = 5$;
б) $x = -1$.

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$4 \sin^3 x + 2\sqrt{3} \cos 2x + 3 \sin x = 2\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

3. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x + \sqrt{2} \cos 2x + \sin x = \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

4. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$4 \cos^3 x - 2\sqrt{3} \cos 2x + 3 \cos x = 2\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

5. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x - \sqrt{2} \cos 2x + \sin x = -\sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

6. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$2 \sin x \cos^2 x - \sqrt{2} \sin 2x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

7. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

8. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x + \sin x + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

9. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$4 \sin^3 x + 4\sqrt{3} \cos^2 x + 3 \sin x = 4\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

10. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \sin^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

11. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

12. (Основная волна 07.06.2021)

а) Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

13. (Резервная волна 29.06.2021)

а) Решите уравнение

$$7 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4\sqrt{3} \sin x \cos x = 4 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14. (Резервная волна 29.06.2021)

а) Решите уравнение

$$7 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sqrt{3} \sin x \cos x = 4 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = -2, x = -1$;
б) $x = -1$.
2. а) $x = \pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-3\pi, -2\pi, -\frac{5\pi}{3}$.
3. а) $x = \pi k, x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{13\pi}{4}, -3\pi, -2\pi$.
4. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$.
5. а) $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{7\pi}{4}, 2\pi, 3\pi$.
6. а) $x = \pi k, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-4\pi, -\frac{15\pi}{4}, -3\pi$.
7. а) $x = \pi k, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-3\pi, -\frac{13\pi}{6}, -2\pi$.
8. а) $x = \pi k, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{9\pi}{4}, -2\pi, -\pi$.
9. а) $x = \pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\pi, 2\pi, \frac{7\pi}{3}$.
10. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$.
11. а) $x = \pi k, x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi$.
12. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}$.
13. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}$.
14. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k - \text{целое}$;
б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{8\pi}{3}, \frac{7\pi}{2}$.

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

а) Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 4^{\sin(x+\pi)} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

а) Решите уравнение

$$81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} - 1,5 \cdot 4^{\sin x+1} + 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

4. (Досрочная волна 28.03.2022)

а) Решите уравнение

$$9^{\sin x} + 9^{\sin(x+\pi)} = \frac{10}{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$2\sin^2 x - \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$5^{2 \log_2(\sin x)} = \frac{5}{5^{\log_2(\sin x)}}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

7. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

8. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 3 \sin(-x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

9. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

10. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x - 2 \sin(-x) - \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

11. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$2 \sin 2x + 2 \sin(-x) - 2 \cos(-x) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

12. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$2 \sin 2x + 2 \sin(-x) - 2 \cos(-x) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

13. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$2 \sin 2x + 2 \sin(-x) + 2 \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

14. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x - 3 \sin(-x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

15. (Основная волна 02.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\sin 2x - 2 \sin x + 2 \cos x - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; \frac{9\pi}{2}]$.

16. (Резервная волна 27.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\log_9(\sqrt{2} \sin x + \sin 2x + 9) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

17. (Резервная волна 27.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\log_6(\sqrt{3} \cos x + \sin 2x + 6) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

18. (Резервная волна 27.06.2022)

а) Решите уравнение

$$\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}]$.

Ответы

1. а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k$ – целое;
б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.
2. а) $2\pi k, x = \frac{\pi}{3} + \pi k, x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k$ – целое;
б) $-4\pi; -\frac{11\pi}{3}$.
3. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k$ – целое;
б) $-\frac{23\pi}{6}; -\frac{7\pi}{2}$.
4. а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + \pi k, k$ – целое;
б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.
5. а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi + 2\pi k, k$ – целое;
б) $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.
6. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k$ – целое;
б) $\frac{13\pi}{6}$.
7. а) $\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $\pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$.
8. а) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, k$ – целое;
б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$.
9. а) $2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

10. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k; k$ – целое;
б) $-3\pi, -\frac{11\pi}{6}$.
11. а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{11\pi}{3}$.
12. а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $-\frac{11\pi}{3}, -\frac{23\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6}$.
13. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{17\pi}{6}$.
14. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$.
15. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k; k$ – целое;
б) $\frac{7\pi}{2}, 4\pi$.
16. а) $\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -\frac{11\pi}{4}; -2\pi$.
17. а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}$.
18. а) $\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k$ – целое;
б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}; -4\pi; -3\pi$.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_3 \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin 2x + 81 \right) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin 2x + 81 \right) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_{13} (\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_4 (2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$.

5. (Досрочная волна 27.03.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_4 (2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

6. (Досрочная волна 19.04.2023)

а) Решите уравнение:

$$8^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \cdot 2^{-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 10]$.

7. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$2 \cos^3 x = \sqrt{3} \sin^2 x + 2 \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

8. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$2 \sin^3 x = \sqrt{2} \cos^2 x + 2 \sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

9. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$2 \cos^3 x = \sqrt{3} \sin^2 x + \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

10. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$2 \sin^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

11. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$4 \sin^3 x = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$.

12. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$2 \sin^2 x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

13. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

14. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin x \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

15. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\cos x \cos 2x = \sqrt{2} \sin^2 x + \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

16. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin x \cos 2x + \sin x = \sqrt{3} \cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

17. (Основная волна 01.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin x \cos 2x + \sin x = \sqrt{3} \cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

18. Резервная волна 26.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

19. Резервная волна 26.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin 2x = 2 \sin x + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

20. Резервная волна 26.06.2023)

а) Решите уравнение:

$$\sin 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

21. Резервная волна 01.07.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_3 x \cdot \log_3 (4x^2 - 1) = \log_3 \frac{x(4x^2 - 1)}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 27]$.

22. Резервная волна 01.07.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_4 x \cdot \log_4 \frac{x^2 - 1}{2} = \log_4 \frac{x(x^2 - 1)}{8}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 49]$.

23. Резервная волна 01.07.2023)

а) Решите уравнение:

$$\log_3 (x^3 + 6x^2 - 3x - 19) = \log_3 (x + 5).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{0,5} 100; \log_{0,5} 0,3]$.

ОТВЕТЫ

1. а) $x = \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) π , $\frac{5\pi}{4}$, 2π .

2. а) $x = \pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;

б) $-\frac{10\pi}{3}$, -3π , $-\frac{8\pi}{3}$, -2π .

3. а) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

4. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k – целое;

б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{2}$.

5. а) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;

б) $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$.

6. а) $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$;

б) $x = \frac{1}{2}$.

7. а) $x = \pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;

б) -3π , $-\frac{17\pi}{6}$, -2π .

8. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{2}$.

9. а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$.
10. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{10\pi}{3}$, -3π , -2π .
11. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, k – целое;
б) $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$.
12. а) $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;
б) 3π , $\frac{23\pi}{6}$, 4π .
13. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{4}$.
14. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$.
15. а) $x = \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;
б) -2π , $-\frac{5\pi}{4}$, $-\pi$.
16. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{2}$.
17. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;
б) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{2}$.

18. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, k – целое;

б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$.

19. а) $x = 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k – целое;

б) -4π , $-\frac{17\pi}{6}$.

20. а) $x = \pi + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k – целое;

б) -3π , $-\frac{5\pi}{3}$.

21. а) $x = 1$, $x = 3$;

б) $x = 1$.

22. а) $x = 3$, $x = 4$;

б) $x = 3$.

23. а) $x = -2$, $x = 2$;

б) $x = -2$.

Задание 14. Стереометрия



Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

2. (Основная волна 04.06.2015)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

3. (Основная волна 04.06.2015)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .
- б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Математик МГУ

Ответы

1. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$.

2. 44.

3. 104.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- б) Найдите объём тетраэдра MNB_1 .

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- б) Найдите объём тетраэдра MNB_1 .

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 3$, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{6}$. На рёбрах AB ,

A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

Прямая, проходящая через вершину B , прямоугольника $ABCD$, перпендикулярная диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M , равноудаленной от вершин B и D .

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = \angle MBD$.

б) Найдите расстояние от точки O , точки пересечения диагоналей, до отрезка CM , если $BC = 42$.

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объём пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60° .

8. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро $AA_1 = 3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = B_1L = 3$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

9. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 3$. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK = 1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

10. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

11. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N – середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT – высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .

- Докажите, что точка T является серединой SM .
- Найдите расстояние между NT и SC .

12. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $AB = 2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT – высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .

- Докажите, что точка T является серединой SM .
- Найдите расстояние между NT и SC .

13. (Основная волна 06.06.2016)

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

14. (Основная волна 06.06.2016)

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1 Q = 4$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости APQ .

15. (Основная волна 06.06.2016)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC .
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ .

Математик МГУ

Ответы

1. $18\sqrt{3}$.

2. $\frac{128}{\sqrt{3}}$.

3. 55.

4. $\operatorname{arctg} 2$.

5. 10.

6. $\sqrt{21}$.

7. $\frac{10\sqrt{15}}{3}$.

8. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

9. $\frac{3}{4}$.

10. $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

11. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

12. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

13. $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

14. $\frac{36\sqrt{41}}{41}$.

15. $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.
- б) Найдите длину отрезка AP .

3. (Основная волна 01.06.2017)

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q – середины сторон DA и DC соответственно.

- а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
- б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

4. (Основная волна 01.06.2017)

На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 3 : 1$. Точки P и Q – середины сторон DA и DC соответственно.

- а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
- б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

5. (Основная волна 01.06.2017)

На ребрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$. Точки P и Q – середины сторон DA и DC соответственно.

- а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

- б) Найти отношение объемов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.
6. (Основная волна 01.06.2017)
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
- б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.
7. (Основная волна 01.06.2017)
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- а) Докажите, что $AA_1 = AC$.
- б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 7$, $BC = 8$.
8. (Основная волна 01.06.2017)
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней ABB_1A_1 и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.
- а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
- б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B .
9. (Основная волна 01.06.2017)
В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.
- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите объём пирамиды $SABC$.
10. (Основная волна 01.06.2017)
В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- б) Найдите объём пирамиды $SABC$.
11. (Основная волна 01.06.2017)
- Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K , L и M – центры граней $ABCD$, $AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.
- а) Докажите, что $B_1 KLM$ – правильная пирамида.
- б) Найдите объём $B_1 KLM$.
12. (Резервная волна 28.06.2017)
- В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.
- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите объём пирамиды $PABC$.
13. (Резервная волна 28.06.2017)
- В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.
- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите объём пирамиды $PABC$.
14. (Резервная волна 28.06.2017)
- В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 5. На ребрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.
- а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .
15. (Резервная волна 28.06.2017)
- Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.
- а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- б) Найдите объём призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

Ответы

1. $\operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

2. $\sqrt{11}$.

3. $13 : 23$.

4. $21 : 11$.

5. $9 : 23$.

6. $\sqrt{2}$.

7. $\frac{28}{9}$.

8. $20\sqrt{14}$.

9. 96.

10. $16\sqrt{6}$.

11. 18.

12. 90.

13. 120.

14. $\frac{7}{2}$.

15. $\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Математик МГУ

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

Дана правильная четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC . Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $MD : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1 .

а) Докажите, что прямые MB и $B_1 C$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и $B_1 C$.

3. (Основная волна 01.06.2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причем BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1 C_1 = 8$.

4. (Основная волна 01.06.2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причем BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1 C_1 = 15$.

5. (Основная волна 01.06.2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .
- б) Найдите объём цилиндра.

6. (Основная волна 01.06.2018)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .
- б) Найдите объём цилиндра.

7. (Резервная волна 25.06.2018)

На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

- а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 6.

8. (Резервная волна 25.06.2018)

На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

- а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна $6\sqrt{5}$.

9. (Резервная волна 25.06.2018)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 6.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

10. (Резервная волна 25.06.2018)

В правильном тетраэдре $ABCD$ точка H – центр грани ABC , а точка M – середина ребра CD .

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми DH и BM .

Математик МГУ

Ответы

1. $S = 8\sqrt{6}$.
2. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.
3. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.
4. $\operatorname{arctg} \frac{17}{6}$.
5. $V = 4\pi$.
6. $V = 16\pi$.
7. $S = \sqrt{5}$.
8. 5.
9. $2\sqrt{3}$.
10. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Математик МГУ

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$,
 $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

- а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
б) Найдите расстояние между ребрами BC и SA .

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = \sqrt{17}$, $AB = AC = \sqrt{29}$,
 $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

- а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC .
б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC .

3. (Досрочная волна 10.04.2019)

В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA , N – точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB .

- а) Докажите что $\angle ANO$ – прямой угол.
б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно что $AB = 10$.

4. (Основная волна, 29.05.2019)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 3$, а боковое ребро $SA = 2$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении 1 : 2, считая от вершины A .
б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

5. (Основная волна, 29.05.2019)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро $SA = 8$. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1 : 3$, считая от вершины A .
- б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN .
6. (Основная волна, 29.05.2019)
- В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и M – середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой AD .
- а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α – квадрат.
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 2\sqrt{3}$.
7. (Основная волна, 29.05.2019)
- В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – делит сторону AB в отношении $2 : 3$ считая от вершины A , точка K – делит сторону BC в отношении $2 : 3$ считая от вершины C . Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость α .
- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.
- б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α , если известно, что $SC = 5$, $AC = 6$.
8. (Основная волна, 29.05.2019)
- В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K делит сторону SC в отношении $1 : 2$ считая от вершины S , точка N делит сторону SB в отношении $1 : 2$ считая от вершины S . Через точки N и K параллельно SA проведена плоскость α .
- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α параллельно прямой BC .
- б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α , если известно, что $SA = 9$, $AB = 6$.
9. (Резервная волна, 24.06.2019)
- В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M – середина ребра A_1C_1 , а точка O – точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1 .
- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB лежит на отрезке OC_1 .

б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB .

10. (Резервная волна, 24.06.2019)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка $A_1 C_1$ за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1 C_1 = C_1 M$, а на продолжении отрезка $B_1 C$ за точку C отмечена точка N так, что $B_1 C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми $B_1 C_1$ и MN .

Математик МГУ

ОТВЕТЫ

1. $\sqrt{7}$.
2. $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$.
3. 45° .
4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
5. $\frac{\sqrt{210}}{15}$.
6. $S = 3$.
7. $\frac{9\sqrt{39}}{25}$.
8. $\frac{2\sqrt{23}}{3}$.
9. $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$.
10. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Математик МГУ

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

2. (Основная волна, 10.07.2020)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 7$, а боковое ребро $SA = 10$. Точка M лежит на ребре BC , причём $BM = 4$, точка K лежит на ребре SC , причём $SK = 7$.

- а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

3. (Основная волна, 10.07.2020)

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, M – середина AB , N – середина CS .

- а) Докажите, что проекции отрезков MN и AS на плоскость ABC равны.
- б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AS = 8$, $MN = 5$.

4. (Основная волна, 10.07.2020)

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7 : 3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

- а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α .
- б) Найдите площадь сечения α .

5. (Основная волна, 10.07.2020)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро $SA = 14$, а сторона $AB = 8$. Точка M середина стороны AB . Плоскость α проходит через точки M и D и перпендикулярна плоскости ABC . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- а) Докажите, что $MK = KD$.
- б) Найдите объем пирамиды $MCDK$.

6. (Основная волна, 10.07.2020)

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

7. (Резервная волна, 25.07.2020)

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB = 1$ и $AA_1 = 3$. Точки O и O_1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. На ребре CC_1 отмечена точка M такая что $CM = 2$.

- а) Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
- б) Найдите объём пирамиды $ABMC_1$.

8. (Резервная волна, 25.07.2020)

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1 , точки M , N и K – середины BC , CC_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что точки Q , M , N и K лежат в одной плоскости.
- б) Найдите площадь сечения QMN .

ОТВЕТЫ

1. $2 \arcsin \frac{2}{3\sqrt{5}}.$

2. $V = \frac{63\sqrt{17}}{40}.$

3. $V = 6\sqrt{39}.$

4. $S = \frac{6\sqrt{73}}{10}.$

5. $V = 36\sqrt{11}.$

6. $V = \frac{12\sqrt{41}}{7}.$

7. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}.$

8. $S = 18\sqrt{2}.$

Математик МГУ

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

Точка E лежит на высоте SO , а точка F – на боковом ребре SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, причем $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF , если $AB = 8$, $SO = 14$.

2. (Основная волна 07.06.2021)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ проведена высота SH . K – середина ребра SD , N – середина ребра CD . Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P .

а) Докажите, что прямая PK делит отрезок NS пополам.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS , если $SH = 15$, $CD = 16$.

3. (Основная волна 07.06.2021)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка K – середина бокового ребра SD , а точка N – середина ребра CD . Плоскость ABK пересекает боковое ребро SC в точке P .

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS .

4. (Основная волна 07.06.2021)

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K – середина AS . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь $PQBC$ относится к площади как $3 : 4$.

б) Найдите объем пирамиды $KBQPC$.

5. (Основная волна 07.06.2021)

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH , проведённая к основанию, равна 14, точка K – середина AS , точка N – середина BC . Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- а) Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN .
- б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ .

6. (Основная волна 07.06.2021)

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .

- а) Докажите, что $SA = SC$.
- б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AC = 16$, $AB = 20$, $SA = 26$.

7. (Основная волна 07.06.2021)

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .

- а) Докажите, что $SA = SC$.
- б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AB = 30$, $BC = 24$, $SC = 17$.

8. (Резервная волна 29.06.2021)

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 – середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 – середина B_1E .

- а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 4$, а $AA_1 = 1$.

9. (Резервная волна 29.06.2021)

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 – середина AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 – середина B_1E .

- а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 3$, а $AA_1 = 1$.

Математик МГУ

Ответы

1. $\frac{88\sqrt{2}}{3}$.

2. $\frac{120}{17}$.

3. $\frac{168}{25}$.

4. $80\sqrt{3}$.

5. $\arccos \frac{30}{\sqrt{1047}}$.

6. $\operatorname{arctg} 4$.

7. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.

8. $\frac{8\sqrt{3}}{7}$.

9. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Математик МГУ

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

Дан правильный треугольник ABC . Точка D лежит вне плоскости ABC , $\cos \angle BAD = \cos \angle DAC = 0,3$.

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AC = 6$.

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

Дана треугольная пирамида $SABC$. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка CH – высоты треугольника ABC .

а) Докажите, что $AC^2 - BC^2 = AS^2 - BS^2$.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$, если $AB = 25$, $AC = 10$, $BC = 5\sqrt{13}$, $SC = 3\sqrt{10}$.

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A , B и C так, что AB – диаметр основания. Угол между образующей и плоскостью основания равен 60° .

а) Докажите, что $\cos \angle ASC + \cos \angle CSB = 1,5$.

б) Найдите объём тетраэдра $SABC$, если $SC = 1$ и $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$.

4. (Досрочная волна 28.03.2022)

Вне плоскости правильного треугольника ABC расположена точка D , причем $\cos \angle DAC = \cos \angle DAB = 0,2$

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AB = 2$.

5. (Основная волна 02.06.2022)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 10$, $BC = 8$, $SO = 8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

6. (Основная волна 02.06.2022)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 7$, $BC = 5$, $SO = 4$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

7. (Основная волна 02.06.2022)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

8. (Основная волна 02.06.2022)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

9. (Основная волна 02.06.2022)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O – середина отрезка CB_1 .

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A ,

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

10. (Основная волна 02.06.2022)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O – середина отрезка CB_1

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{6}$.

11. (Основная волна 02.06.2022)

Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

а) Плоскость α пересекает ребро DS в точке L . Докажите, что $BN : NC = DL : LS$.

б) Пусть $BN : NC = 1 : 2$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость α разбивает пирамиду.

12. (Основная волна 02.06.2022)

Точка O – точка пересечения диагоналей грани $CDD_1 C_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость $DA_1 C_1$ пересекает диагональ BD_1 в точке F .

а) Докажите, что $BF : FD_1 = A_1 F : FO$.

б) Точки M и N – середины ребер AB и AA_1 соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью $DA_1 C_1$.

13. (Основная волна 02.06.2022)

Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M – середина SA , на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN , если все рёбра равны 12.

14. (Резервная волна 27.06.2022)

Точка M – середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой $C_1 M$.

- а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из ребер этой грани.
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 5$, считая от вершины A , если $AC = 20$, $AA_1 = 32$.

15. (Резервная волна 27.06.2022)

Точка M – середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M .

- а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из ребер этой грани.
- б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A , $AC = 10$, $AA_1 = 12$.

16. (Резервная волна 27.06.2022)

На сфере α выбрали пять точек: A, B, C, D и S . Известно, что $AB = BC = CD = DA = 4$ и $SA = SB = SC = SD = 7$.

- а) Докажите, что многогранник $SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида.
- б) Найдите объём многогранника $SABCD$.

Ответы

1. б) $\frac{3\sqrt{66}}{5}$.

2. б) $V = 225$.

3. б) $V = \frac{\sqrt{6}}{36}$.

4. б) $\frac{\sqrt{71}}{5}$.

5. б) 36.

6. б) 12.

7. б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

8. б) 2.

9. б) $24\sqrt{3}$.

10. б) 216.

11. б) 5 : 13.

12. б) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

13. б) $15\sqrt{19}$.

14. б) 10.

15. б) 6.

16. б) $\frac{16\sqrt{41}}{3}$.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ квадрат со стороной 3, $AK : KC = 3 : 7$.

а) Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости KLM , если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 50.

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник KLM квадрат со стороной 2, $AK : KC = 2 : 3$.

а) Докажите, что $BM : MD = 2 : 3$.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 25.

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M, N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ квадрат со стороной 3, $AK : KC = 3 : 7$.

а) Докажите, что ребра AB и CD взаимно перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости KLM , если известно, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 100.

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

На ребрах AC, AD, BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно, причём $AK : KC = 2 : 3$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат со стороной 2.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объем тетраэдра $ABCD$ равен 25.

5. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дан тетраэдр $ABCD$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах AC, AD, DB и BC соответственно, так, что четырехугольник $KLMN$ – квадрат, и $AK : KC = 3 : 7$.

- а) Докажите, что $AB : CD = 3 : 7$.
- б) Найдите объём пирамиды $CKLMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 100.
6. (Досрочная волна 27.03.2023)
- На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK : KC = 2 : 3$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат.
- а) Докажите, что $AB : CD = 2 : 3$.
- б) Найдите объём пирамиды $CKMN$, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 25.
7. (Досрочная волна 19.04.2023)
- В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ длины всех боковых рёбер равны длине ребра AD , а длина каждого из рёбер AB , BC и CD ровно в два раза меньше, чем длина ребра AD .
- а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину ребра AD .
- б) Найдите, в каком отношении плоскость BMN делит высоту пирамиды, считая от вершины S , если точка M – середина ребра SD , а точка N делит ребро SC в отношении $SN : NC = 3 : 1$.
8. (Основная волна 01.06.2023)
- Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.
- а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB .
9. (Основная волна 01.06.2023)
- Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость α перпендикулярная PQ .
- а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

10. (Основная волна 01.06.2023)

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q – середина ребра A_1C_1 . Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$ и $AB : BC = 2 : 7$.

11. (Основная волна 01.06.2023)

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K – середина DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK параллельна стороне BD .

б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

12. (Основная волна 01.06.2023)

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 2 : 3$, точка K – середина DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK параллельна стороне BD .

б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle CKM = 90^\circ$.

13. (Основная волна 01.06.2023)

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K – середина DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

14. (Основная волна 01.06.2023)

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

15. (Основная волна 01.06.2023)

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 2 : 3$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle ADC = 60^\circ$, а $\angle MKC = 90^\circ$.

16. (Основная волна 01.06.2023)

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причем $B_1 K : K C_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N – середина BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объем призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12, а ее высота равна 2.

17. (Основная волна 01.06.2023)

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка M является серединой ребра BB_1 , а точка N – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость α , параллельная прямым AM и $B_1 N$, проходит через середину отрезка $B_1 M$.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка $B_1 C_1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все ребра этой призмы равны 4.

18. (Резервная волна 26.06.2023)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. На ребрах SA , SB , SC и SD отмечены точки L , K , N и M соответственно так, что четырехугольник $KLMN$ – трапеция с основанием $KL = 3$ и $MN = 2$. Известно, что $SK : KB = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость KLM пересекает ребра SC и SD в их серединах.

б) Найдите высоту SH пирамиды, если точка пересечения диагоналей пирамиды совпадает с точкой H , площадь основания равна 24, а площадь сечения $KLMN = 10$.

19. (Резервная волна 26.06.2023)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N и M соответственно, причем $SK : KB = 2 : 1$, а точки L и M – середины ребер SA и SD .

а) Докажите, что четырехугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как 3 : 4.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 45° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $14\sqrt{3}$, а площадь основания пирамиды равна 54.

20. (Резервная волна 26.06.2023)

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA , SB , SC и SD в точках L , K , N и M соответственно, причем $SK : KB = 3 : 1$, а точки L и M – середины ребер SA и SD .

а) Докажите, что четырехугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как 2 : 3.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен 30° , площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $10\sqrt{2}$, а площадь основания пирамиды равна 32.

21. (Резервная волна 01.07.2023)

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На ребрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = 2$, $AL = 4$, $MD = 3$.

- а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .
- б) Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM .

22. (Резервная волна 01.07.2023)

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 3 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB , AD и CD отмечены точки K , L и M соответственно, причём $BK = AL = MD = 1$.

- а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD .
- б) Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM .

23. (Резервная волна 01.07.2023)

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 4 и перпендикулярны друг другу. Плоскость α перпендикулярна ребру CD и пересекает рёбра AB и CD в точках K и M соответственно, причём $CM : MD = 5 : 3$.

- а) Докажите, что K – середина ребра AB .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α .

ОТВЕТЫ

1. 4,9

2. 5,4

3. 4,2

4. 3,6

5. 29,4

6. 3,6

7. 3 : 2

8. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

9. 16 : 25

10. 1 : 2

11. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

12. $\frac{\sqrt{133}}{3\sqrt{7}}$

13. $\frac{33\sqrt{6}}{10}$

14. $\frac{7\sqrt{10}}{6}$

15. $\frac{12\sqrt{21}}{5}$

16. $\frac{5\sqrt{37}}{6}$

17. $\frac{7\sqrt{6}}{2}$

18. $\sqrt{31}$

19. 24

20. 8

21. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

22. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

23. $\frac{19}{4}$

Математик МГУ

Задание 15. Сложные неравенства**Экзамен 2015 года**

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

Решите неравенство

$$\log_5^2(25 - x^2) - 3\log_5(25 - x^2) + 2 \geq 0.$$

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

Решите неравенство

$$\log_2^2(4 + 3x - x^2) + 7\log_{0,5}(4 + 3x - x^2) + 10 > 0.$$

3. (Основная волна 04.06.2015)

Решите неравенство

$$\frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5.$$

4. (Основная волна 04.06.2015)

Решите неравенство

$$\frac{7 - 2 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \geq 0,25.$$

Ответы

1. $x \in (-5; -\sqrt{20}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{20}; 5)$.

2. $x \in (-1; 0) \cup (3; 4)$.

3. $x \in \{0\} \cup (1; 2)$.

4. $x \in \{1\} \cup (2; 3)$.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

Решите неравенство

$$(4x - 7) \cdot \log_{x^2 - 4x + 5} (3x - 5) \geq 0.$$

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

Решите неравенство

$$(4x + 13) \cdot \log_{x^2 + 6x + 10} (3x + 10) \geq 0.$$

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

Решите неравенство

$$(5x - 13) \cdot \log_{2x - 5} (x^2 - 6x + 10) \geq 0.$$

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

Решите неравенство

$$(3x + 7) \cdot \log_{2x + 5} (x^2 + 4x + 5) \geq 0.$$

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{19}}{6}} (7 - 2^x).$$

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

Решите неравенство

$$(3^{4x - x^2 - 1} - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4x + 5) \geq 0.$$

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

Решите неравенство

$$(4^{x^2 - x - 6} - 1) \cdot \log_{0,25} (4^{x^2 + 2x + 2} - 3) \leq 0.$$

8. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leq 2 \cdot 5^x - 24.$$

9. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} + \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}.$$

10. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+2} + 20}{3^x - 3} + \frac{9^x - 3^{x+2} + 1}{3^x - 9} \leq 2 \cdot 3^x - 6.$$

11. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$2 \log_{(x^2-8x+17)^2} (3x^2 + 5) \leq \log_{x^2-8x+17} (2x^2 + 7x + 5).$$

12. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leq 5 \cdot 2^x + 7.$$

13. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3.$$

14. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$2^x + \frac{2^{x+2}}{2^x - 4} + \frac{4^x + 7 \cdot 2^x + 20}{4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32} \leq 1.$$

15. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

16. (Основная волна 06.06.2016)

Решите неравенство

$$8^x - 3 \cdot 4^x + \frac{9 \cdot 4^x - 288}{2^x - 9} \leq 32.$$

Ответы

1. $x \in (\frac{5}{3}; \frac{7}{4}] \cup (2; +\infty)$.
2. $x \in (-\frac{10}{3}; -\frac{13}{4}] \cup (-3; +\infty)$.
3. $x \in (\frac{5}{2}; \frac{13}{5}] \cup (3; +\infty)$.
4. $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}] \cup (-2; +\infty)$.
5. $x \in [1; \log_2 7)$.
6. $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.
7. $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$.
8. $x \in (-\infty; 0) \cup [1; \log_5 7)$.
9. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$.
10. $x \in (-\infty; 1) \cup [\log_3 7; 2)$.
11. $x \in [0; 4) \cup (4; 7]$.
12. $x \in (-\infty; 2] \cup (\log_2 5; 3)$.
13. $x \in (-\infty; 1] \cup (\log_3 6; 2)$.
14. $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_2 3; 2) \cup (2; 3)$.
15. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup (\log_3 2; 1)$.
16. $x \in \{1\} \cup [3; \log_2 9)$.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

Решите неравенство

$$\log_3^2(25 - x^2) - 3 \log_3(25 - x^2) + 2 \geq 0.$$

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

Решите неравенство

$$(9^x - 2 \cdot 3^x)^2 - 62(9^x - 2 \cdot 3^x) - 63 \geq 0.$$

3. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

4. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \frac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24 - \log_3 x^8}{\log_3^2 x - 16}.$$

5. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}.$$

6. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}.$$

7. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{2^x + 8}{2^x - 8} + \frac{2^x - 8}{2^x + 8} \geq \frac{2^{x+4} + 96}{4^x - 64}.$$

8. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1.$$

9. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$1 + \frac{11}{2^x - 8} + \frac{28}{4^x - 2^{x+4} + 64} \geq 0.$$

10. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$1 + \frac{14}{3^x - 9} + \frac{48}{9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81} \geq 0.$$

11. (Основная волна 02.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{5 \log_2^2 x - 100}{\log_2^2 x - 25} \geq 4.$$

12. (Резервная волна 28.06.2017)

Решите неравенство

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0.$$

13. (Резервная волна 28.06.2017)

Решите неравенство

$$4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0.$$

14. (Резервная волна 28.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}.$$

15. (Резервная волна 28.06.2017)

Решите неравенство

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0.$$

Ответы

1. $x \in (-5; -\sqrt{22}] \cup [-4; 4] \cup [\sqrt{22}; 5)$.
2. $x \in \{0\} \cup [2; +\infty)$.
3. $x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$.
4. $x \in (0; \frac{1}{81}) \cup \{\frac{1}{9}\} \cup (81; +\infty)$.
5. $x \in (0; \frac{1}{25}) \cup \{\frac{1}{5}\} \cup (25; +\infty)$.
6. $x \in \{1\} \cup (2; +\infty)$.
7. $x \in \{2\} \cup (3; +\infty)$.
8. $x \in \{\frac{1}{3}\} \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.
9. $x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$.
10. $x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.
11. $x \in (0; \frac{1}{32}) \cup \{1\} \cup (32; +\infty)$.
12. $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.
13. $x \in (-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$.
14. $x \in (0; 1] \cup (2; +\infty)$.
15. $x \in (-6; -5) \cup [3; \frac{7}{2}] \cup (5; \frac{11}{2}]$.

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

Решите неравенство

$$\frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x - 5}.$$

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

Решите неравенство

$$3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geq 3.$$

3. (Основная волна 01.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

4. (Основная волна 01.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_3(x^2 + 2) - \log_3(x^2 - x + 12) \geq \log_3\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

5. (Основная волна 01.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_5(3x + 1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right).$$

6. (Основная волна 01.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_3(2x + 1) + \log_3\left(\frac{1}{32x^2} + 1\right) \geq \log_3\left(\frac{1}{16x} + 1\right).$$

7. (Основная волна 01.06.2018)

Решите неравенство

$$2\log_2(1 - 2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1).$$

8. Резервная волна 25.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + \log_2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \geq \log_2 (27x - 1).$$

9. Резервная волна 25.06.2018)

Решите неравенство

$$2^{x+1} + 0,5^{x-3} \geq 17.$$

10. Резервная волна 25.06.2018)

Решите неравенство

$$\log_3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \log_3 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \geq \log_3 (8x - 1).$$

Ответы

1. $x \in [0; 2) \cup (2; 5)$.
2. $x \in (-\infty; -1 - \log_3 5) \cup [1; +\infty)$.
3. $x \in (\frac{1}{2}; \frac{4}{3}] \cup [3; +\infty)$.
4. $x \in (1; \frac{3}{2}] \cup [4; +\infty)$.
5. $x \in [-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}) \cup (0; +\infty)$.
6. $x \in [-\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}) \cup (0; +\infty)$.
7. $x \in [\frac{1}{6}; \frac{1}{2})$.
8. $x \in [\frac{1}{3}; 1)$.
9. $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
10. $x \in (\frac{1}{8}; \frac{1}{2}]$.

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

Решите неравенство

$$\frac{9^x + 2 \cdot 3^x - 117}{3^x - 27} \leq 1.$$

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6 \cdot 2^x - 20}{2^x - 32} \geq 1.$$

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

Решите неравенство

$$\frac{2^{5+x} - 2^{-x}}{2^{3-x} - 4^{-x}} \geq 2^x.$$

4. (Досрочная волна 10.04.2019)

Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+x-4} - 0,5^{2x^2-2x-1}}{0,2 \cdot 5^x - 1} \leq 0.$$

5. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_6 (21 - 7x) \geq \log_6 (x^2 - 8x + 15) + \log_6 (x + 3).$$

6. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_3 (4 - 4x) \geq \log_3 (x^2 - 4x + 3) + \log_3 (x + 2).$$

7. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}} ((2 - x)(x^2 + 7)) \leq \log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 5x + 6) + \log_{\frac{1}{4}} (5 - x).$$

8. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}((4-x)(x^2+29)) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+24) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x).$$

9. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_2((x-1)(x^2+3)) \leq \log_2(4x-x^2-3) + \log_2(5-x).$$

10. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2).$$

11. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_2(14-14x) \geq \log_2(x^2-5x+4) + \log_2(x+5).$$

12. (Основная волна, 29.05.2019)

Решите неравенство

$$\log_4(6-6x) < \log_4(x^2-5x+4) + \log_4(x+3).$$

13. (Резервная волна, 24.06.2019)

Решите неравенство

$$\log_2((x-1)(x^2+2)) \leq 1 + \log_2(x^2+3x-4) - \log_2 x.$$

14. (Резервная волна, 24.06.2019)

Решите неравенство

$$\log_3((x-2)(x^2+9)) \leq 2 + \log_3(x^2+x-6) - \log_3 x.$$

15. (Резервная волна, 24.06.2019)

Решите неравенство

$$\frac{\log_5(3x-13)}{\log_5(x-4)} \geq 1.$$

Ответы

1. $x \in [2; 3)$.
2. $x \in [\log_2 3; 2] \cup (5; +\infty)$.
3. $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$.
4. $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup (1; \frac{3}{2}]$.
5. $x \in (-3; -2]$.
6. $x \in (-2; -1]$.
7. $x \in [1; 2)$.
8. $x \in [1; 4)$.
9. $x \in (1; 1,5]$.
10. $x \in (-2; 1)$.
11. $x \in (-5; -3]$.
12. $x \in (-2; 1)$.
13. $x \in (1; 2]$.
14. $x \in (2; 3]$.
15. $x \in (\frac{13}{3}; \frac{9}{2}] \cup (5; +\infty)$.

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

Решите неравенство

$$\log_5 ((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5 (x^2-7x+12) + \log_5 (5-x).$$

2. (Досрочная волна 27.03.2020)

Решите неравенство

$$\log_3 ((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3 (x^2-5x+6) + \log_3 (4-x).$$

3. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{343} (x+3) \leq \log_7 (x^2+6x+9).$$

4. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{343} (x-1) \geq \log_7 (x^2-2x+1).$$

5. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{625} (x+2) \geq \log_5 (x^2+4x+4).$$

6. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{512} (x+5) \leq \log_2 (x^2+10x+25).$$

7. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{243} (4-x) \leq \log_3 (x^2-8x+16).$$

8. (Основная волна, 10.07.2020)

Решите неравенство

$$x^2 \log_{343} (5-x) \leq \log_7 (x^2-10x+25).$$

9. (Резервная волна, 25.07.2020)

Решите неравенство

$$2 \cdot 20^x - 17 \cdot 10^x - 2 \cdot 8^x + 8 \cdot 5^x + 17 \cdot 4^x - 2^{x+3} \leq 0.$$

10. (Резервная волна, 25.07.2020)

Решите неравенство

$$3 \cdot 45^x - 3 \cdot 27^x - 28 \cdot 15^x + 28 \cdot 9^x + 9 \cdot 5^x - 3^{x+2} \leq 0.$$

11. (Резервная волна, 25.07.2020)

Решите неравенство

$$45^x - 27^x - 18 \cdot 15^x + 2 \cdot 9^{x+1} + 81 \cdot 5^x - 3^{x+4} \leq 0.$$

12. (Резервная волна, 25.07.2020)

Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0.$$

Ответы

1. $x \in [2; 3)$.
2. $x \in [1; 2)$.
3. $x \in (-3; -\sqrt{6}] \cup [-2; \sqrt{6}]$.
4. $x \in (1; 2] \cup [\sqrt{6}; +\infty)$.
5. $x \in (-2; -1] \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.
6. $x \in (-5; -3\sqrt{2}] \cup [-4; 3\sqrt{2}]$.
7. $x \in [-\sqrt{10}; 3] \cup [\sqrt{10}; 4)$.
8. $x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}] \cup [4; 5)$.
9. $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 3]$.
10. $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 2]$.
11. $x \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$.
12. $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 0]$.

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3 (3x)} \cdot \left(\frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0.$$

2. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$9^{\frac{1}{x}-1} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{x}-1} - 3 \geq 0.$$

3. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0.$$

4. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$(9^x - 3^{x+1})^2 + 8 \cdot 3^{x+1} < 8 \cdot 9^x + 20.$$

5. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15.$$

6. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$\frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0.$$

7. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0.$$

8. (Основная волна, 07.06.2021)

Решите неравенство

$$(16^x - 2 \cdot 4^{x+1})^2 + 23 \cdot (16^x - 2 \cdot 4^{x+1}) + 112 \geq 0.$$

9. (Резервная волна, 29.06.2021)

Решите неравенство

$$\frac{1}{2^x - 1} + \frac{4^{x+0,5} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 16} \geq 2^{x+1}.$$

10. (Резервная волна, 29.06.2021)

Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{x+0,5} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geq 3^{x+1}.$$

Ответы

1. $x \in \left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
2. $x \in (0; 1]$.
3. $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$.
4. $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_3 2; \log_3 5)$.
5. $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 1)$.
6. $x \in \{0\} \cup (\log_3 2; 1)$.
7. $x \in \{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.
8. $x \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup [\log_4 7; +\infty)$.
9. $x \in (0; 2] \cup (4; +\infty)$.
10. $x \in (0; 1] \cup (2; +\infty)$.

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

Решите неравенство

$$\frac{\log_2(32x) - 1}{\log_2^2 x - \log_2 x^5} \geq -1.$$

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

Решите неравенство

$$\frac{\log_4(16x^4) + 11}{\log_4^2 x - 9} \geq -1.$$

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

Решите неравенство

$$\frac{6}{\log_3 x - 3} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3(27x^6) + 12} + 1 \geq 0.$$

4. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\frac{6}{5^x - 125} \leq \frac{1}{5^x - 25}.$$

5. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\frac{13}{3^x - 81} \leq \frac{1}{3^x - 9}.$$

6. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\log_2 x + 2 \log_x 2 \geq \frac{3}{(\log_2 x)^3}.$$

7. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x + 27} \geq \frac{1}{3^x - 27}.$$

8. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\frac{2}{2^x + 64} \geq \frac{1}{2^x - 32}.$$

9. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$\frac{7}{2^x - 32} \geq \frac{1}{2^x - 8}.$$

10. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство:

$$3^x - \frac{702}{3^x - 1} \geq 0.$$

11. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство:

$$3^x + \frac{243}{3^x - 36} \geq 0.$$

12. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство:

$$5^x + \frac{125}{5^x - 126} \geq 0.$$

13. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство:

$$5^x - \frac{600}{5^x - 1} \geq 0.$$

14. (Основная волна 02.06.2022)

Решите неравенство

$$2^x - \frac{240}{2^x - 1} \geq 0.$$

15. (Резервная волна 27.06.2022)

Решите неравенство:

$$\frac{2^{x+1} - 17 \cdot 2^{2-x}}{2^x - 2^{6-x}} \geq 1.$$

16. (Резервная волна 27.06.2022)

Решите неравенство:

$$\frac{2 \cdot 3^x - 10 \cdot 3^{2-x}}{3^x - 3^{2-x}} \geq 1.$$

17. (Резервная волна 27.06.2022)

Решите неравенство:

$$\frac{4^x + 7 \cdot 2^x - 48}{2^x - 32} \leq 1.$$

Математик МГУ

Ответы

1. $x \in (0; 1) \cup \{4\} \cup (32; +\infty)$.
2. $x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{\frac{1}{16}\} \cup (64; +\infty)$.
3. $x \in (0; \frac{1}{9}] \cup [9; 27) \cup (27; +\infty)$.
4. $(-\infty; 1] \cup (2; 3)$.
5. $(-\infty; 1] \cup (2; 4)$.
6. $[\frac{1}{2}; 1) \cup [2; +\infty)$.
7. $(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)$.
8. $(-\infty; 5) \cup [7; +\infty)$.
9. $[2; 3) \cup (5; +\infty)$.
10. $(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$.
11. $[2; 3] \cup (\log_3 36; +\infty)$.
12. $[0; 3] \cup (\log_5 126; +\infty)$.
13. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$.
14. $(-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.
15. $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$.
16. $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.
17. $[1; 5)$.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3.$$

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

Решите неравенство

$$\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leq 5 \cdot 2^x + 7.$$

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}.$$

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

Решите неравенство

$$2^x + \frac{2^{x+2}}{2^x - 4} + \frac{4^x + 7 \cdot 2^x + 20}{4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32} \leq 1.$$

5. (Досрочная волна 19.04.2023)

Решите неравенство

$$\frac{45}{(\log_2^2 x + 6 \log_2 x)^2} + \frac{14}{\log_2^2 x + 6 \log_2 x} + 1 \geq 0.$$

6. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$(\log_{0,25}^2 (x + 3) - \log_4 (x^2 + 6x + 9) + 1) \cdot \log_4 (x + 2) \leq 0.$$

7. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$(\log_{0,2}^2 (x - 5) - \log_5 (x^2 - 10x + 25) + 1) \cdot \log_5 (x - 7) \leq 0.$$

8. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$(\log_{0,2}^2(x+2) - \log_5(x^2+4x+4) + 1) \cdot \log_5(x+1) \leq 0.$$

9. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_4((x-5)(x^2-2x-15)) + 1 \geq 0,5 \log_2(x-5)^2.$$

10. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{25}((x-4)(x^2-2x-8)) + 1 \geq 0,5 \log_5(x-4)^2.$$

11. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{25}((x-4)(x^2-2x-8)) \geq 0,5 \log_5(x-4)^2 + 1.$$

12. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{100}((x-2)(x^2+5x-14)) + 1 \geq 0,5 \lg(x-2)^2.$$

13. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{27}(x^3-9x^2+27x-27) \geq \log_3(x^2-9) - 4.$$

14. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_8(x^3-3x^2+3x-1) \geq \log_2(x^2-1) - 5.$$

15. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \leq \log_{0,25}(x-3)^4.$$

16. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{0,2}(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \leq \log_{0,04}(x - 2)^4.$$

17. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_{0,1}(x^3 - 5x^2 - 25x + 125) \leq \log_{0,01}(x - 5)^4.$$

18. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\log_3^2(x - 4) - \log_3^2(x - 6) \leq 0.$$

19. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(3 - x) - \log_3(x + 2)}{\log_3^2(x^2) + \log_3(x^4) + 1} \geq 0.$$

20. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x^2) - \log_3(x^2)}{\log_6^2(2x^2 - 10x + 12,5) + 1} \geq 0.$$

21. (Основная волна 01.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^2) - \log_5(x^2)}{\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0.$$

22. (Резервная волна 26.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{x}{27}} \geq \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$$

23. (Резервная волна 26.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}.$$

24. (Резервная волна 26.06.2023)

Решите неравенство

$$\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x - 5} + \frac{\log_2 x - 5}{\log_2(32x)} \geq \frac{\log_2 x^{16} + 18}{\log_2^2 x - 25}.$$

25. (Резервная волна 01.07.2023)

Решите неравенство

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0.$$

26. (Резервная волна 01.07.2023)

Решите неравенство

$$4 \cdot 4^{x^2+2x-5} - 33 \cdot 2^{x^2+2x-5} + 8 \geq 0.$$

27. (Резервная волна 01.07.2023)

Решите неравенство

$$4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0.$$

Ответы

1. $x \in (-\infty; 1] \cup (1 + \log_3 2; 2)$.
2. $x \in (-\infty; 2] \cup (\log_2 5; 3)$.
3. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (\log_2 6; 3]$.
4. $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_2 3; 2) \cup (2; 3)$.
5. $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \left(\frac{1}{64}; \frac{1}{32}\right] \cup \left\{\frac{1}{8}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.
6. $x \in (-2; -1] \cup \{1\}$.
7. $x \in (7; 8] \cup \{10\}$.
8. $x \in (-1; 0] \cup \{3\}$.
9. $x \in \left[-\frac{11}{4}; 5\right) \cup (5; +\infty)$.
10. $x \in \left[-\frac{49}{25}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.
11. $x \in [23; +\infty)$.
12. $x \in \left[-\frac{699}{100}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.
13. $x \in (3; 78]$.
14. $x \in (1; 31]$.
15. $x \in [-2; 3) \cup (3; +\infty)$.
16. $x \in [-1; 2) \cup (2; +\infty)$.
17. $x \in [-4; 5) \cup (5; +\infty)$.
18. $x \in (6; 5 + \sqrt{2})$.
19. $x \in \left(-2; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.
20. $x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$.

21. $x \in (-\infty; -1] \cup [1; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$.

22. $x \in (0; 1) \cup \{3\} \cup (27; +\infty)$.

23. $x \in \left(0; \frac{1}{25}\right) \cup \left\{\frac{1}{5}\right\} \cup (25; +\infty)$.

24. $x \in \left(0; \frac{1}{32}\right) \cup \{16\} \cup (32; +\infty)$.

25. $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

26. $x \in (-\infty; -4] \cup [-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

27. $x \in (-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$.

Математик МГУ

Задание 16. Экономическая задача



Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимиру нужно каждую неделю производить 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить

580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

3. (Основная волна 04.06.2015)

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

4. (Основная волна 04.06.2015)

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Ответы

1. 500.
2. 5800000 рублей.
3. 3.
4. 1.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей.

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн рублей.

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

8. (Основная волна 06.06.2016)

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- Первого числа месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца, где r целое число.

- Со 2 по 14 число необходимо выплатить часть долга.
- 15 числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r , при котором сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб.

9. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; – в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн руб)	S	$0,8S$	$0,5S$	$0,1S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

10. (Основная волна 06.06.2016)

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- Первого числа месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца, где r целое число.
- Со 2 по 14 число необходимо выплатить часть долга.
- 15 числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее r , при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн руб.

11. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;
- к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

12. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

13. (Основная волна 06.06.2016)

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

14. (Основная волна 06.06.2016)

Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на

x млн рублей, где x – целое число. Найдите наибольшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 17 млн рублей.

15. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

16. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг	S	$0,9S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

17. (Основная волна 06.06.2016)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Математик МГУ

ОТВЕТЫ

1. 7 млн рублей.
2. 3 млн рублей.
3. 12 млн рублей.
4. 7 и 4 млн рублей.
5. 7 млн рублей.
6. 20.
7. 10.
8. 7.
9. 36.
10. 9.
11. 1925 тыс. рублей.
12. 1050 тыс. рублей.
13. 8.
14. 24.
15. 200.
16. 400.
17. 11.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2, \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн р.)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

3. (Основная волна 02.06.2017)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58564 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106964 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

4. (Основная волна 02.06.2017)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 75000 руб, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 123000 руб, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

5. (Основная волна 02.06.2017)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- Каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 77760 руб, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 131760 руб, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

6. (Основная волна 02.06.2017)

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

7. (Основная волна 02.06.2017)

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таково:

- 1-го числа k -того месяца долг возрастёт на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число k -того месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа k -того месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

8. (Основная волна 02.06.2017)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

9. (Основная волна 02.06.2017)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

10. (Основная волна 02.06.2017)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 1,5 млн рублей?

11. (Основная волна 02.06.2017)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

12. (Резервная волна 28.06.2017)

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

13. (Резервная волна 28.06.2017)

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

14. (Резервная волна 28.06.2017)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн р.)	S	$0,7S$	$0,5S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет составлять целое число миллионов рублей.

15. (Резервная волна 28.06.2017)

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; 3; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответы

1. $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.
2. 8.
3. 10.
4. 25.
5. 20.
6. 19.
7. 39.
8. 4.
9. 14,4 млн рублей.
10. 16,2 млн рублей.
11. 169400 рублей.
12. 100.
13. 80.
14. 8.
15. $\frac{1}{11} < r < \frac{1}{10}$.

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311040 рублей?

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона B увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на $m\%$ ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m .

3. (Основная волна 01.06.2018)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

4. (Основная волна 01.06.2018)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 тысячи рублей?

5. (Основная волна 01.06.2018)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1000000 рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n + 1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

6. (Основная волна 01.06.2018)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1200 тысяч рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - 15-го числа n -го месяца долг составит 400 тысяч рублей; — к 15-му числу $(n + 1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.
- Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

7. (Основная волна 01.06.2018)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

8. (Резервная волна 25.06.2018)

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 15000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

9. (Резервная волна 25.06.2018)

Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$ ($1000 \leq P \leq$

15000). Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

10. (Резервная волна 25.06.2018)

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Ответы

1. 201300 рублей.
2. $m = 4$.
3. 1100000 рублей.
4. 700000 рублей.
5. $r = 3$.
6. $r = 1$.
7. 384000 рублей.
8. $t = 6000$.
9. 12,5.
10. $t = 7000$.

Математик МГУ

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее S , при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее S , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн р.)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

4. (Досрочная волна 10.04.2019)

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

5. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 0,24 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся).

6. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 3,85 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся).

7. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

8. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн рублей?

9. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на срок 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4 млн рублей, а наименьший – не менее 2,5 млн рублей.

10. (Основная волна, 29.05.2019)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x , если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший – не менее 0,5 млн рублей.

11. (Резервная волна, 24.06.2019)

В июле 2022 года планируется взять кредит на сумму 419375 рублей. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

12. (Резервная волна, 24.06.2019)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147000 рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Математик МГУ

Ответы

1. 8.
2. 8.
3. 29.
4. за 4 года.
5. 7,8 млн рублей.
6. 17,5 млн рублей.
7. 10.
8. 14 лет.
9. $r = 25$.
10. $x = 25$.
11. 648000 рублей.
12. 169400 рублей.

Математик МГУ

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

2. (Досрочная волна 27.03.2020)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

3. (Основная волна, 10.07.2020)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму кредита на $r\%$, после чего происходит платеж. Кредит был полностью выплачен за 2 года. Найдите r , если первый платеж составил 330000 рублей, а второй 121000 рублей.

4. (Основная волна, 10.07.2020)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 250000 рублей. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму кредита

на $r\%$, после чего происходит платеж. Кредит был полностью выплачен за 2 года. Найдите r , если первый платеж составил 150000 рублей, а второй 180000 рублей.

5. (Основная волна, 10.07.2020)

Был выдан кредит на 550000 рублей. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму кредита на 20 процентов, после чего происходит платеж. Кредит был полностью выплачен за 2 года, причем платежи были равными. Найдите общую сумму, выплаченную клиентом банку.

6. (Основная волна, 10.07.2020)

В кредит взяли 220 тыс. рублей на 5 лет под $r\%$ годовых. По условиям кредита, на конец первых трех лет задолженность остается неизменной и равной 220 тысячам рублей, а выплаты последних двух лет равны. На конец пятого года кредит должен быть погашен. Найдите r если известно, что сумма всех выплат составит 420 тысяч рублей.

7. (Основная волна, 10.07.2020)

В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму будет взят кредит банке, если известно, что кредит будет выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат будет на 78030 рублей больше суммы взятого кредита.

8. (Основная волна, 10.07.2020)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 долг остаётся равным S тысяч рублей;

- выплаты в 2030 и 2031 годах равны по 360 тысяч рублей;
- к июлю 2031 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

9. (Резервная волна, 25.07.2020)

Планируется открыть вклад на 4 года, положив на счет целое число млн рублей. В конце каждого года он увеличивается на 10%, а в начале третьего и четвертого года вклад пополняется на 5 млн рублей. Найдите наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 10 млн рублей.

10. (Резервная волна, 25.07.2020)

Планируется открыть вклад на 4 года, положив на счет целое число миллионов рублей. В конце каждого года сумма, лежащая на вкладе, увеличивается на 10%, а в начале третьего и четвертого года вклад пополняется на 3 миллиона рублей. Найдите наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей.

11. (Резервная волна, 25.07.2020)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S тысяч рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет не больше 840 тысяч рублей.

12. (Резервная волна, 25.07.2020) Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10

млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Математик МГУ

Ответы

1. 4 года.
2. 9 лет.
3. 10.
4. $r = 20$
5. 720000 рублей.
6. $r = 20$.
7. 119700 рублей.
8. 1050000 рублей.
9. 19.
10. 9 миллионов рублей.
11. 1500.
12. 25 миллионов рублей.

Математик МГУ

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн р.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,25 рублей.

2. (Основная волна 07.06.2021)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 8% по сравнению с концом предыдущего года;
- со февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

3. (Основная волна 07.06.2021)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;

- со февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

4. (Основная волна 07.06.2021)

В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат составит 930 тысяч рублей?

5. (Основная волна 07.06.2021)

В августе со 2 по 15-е число 2026 года планируется взять кредит на 1200 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- первого числа каждого месяца кредит увеличивается на 1%;
- со 2 по 15 числа каждого месяца, на протяжении следующих десяти месяцев, долг должен уменьшаться на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим месяцем;
- на одиннадцатый месяц перед начислением процентов остаток кредита будет составлять 400 тыс. руб., после чего он погашается одним платежом.

Чему равна общая сумма выплат?

6. (Основная волна 07.06.2021)

15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с февраля 2025 года по июль 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 июля 2027 года долг составит 300 тысяч рублей;
- 15 августа 2027 года кредит должен быть погашен полностью.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

7. (Основная волна 07.06.2021)

В июле 2025 года планируется взять кредит на 300 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма выплат составит 435 тысяч рублей?

8. (Основная волна 07.06.2021)

В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 13% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг возрастает на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

9. (Резервная волна 29.06.2021)

15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 июня 2027 года долг составит 100 тысяч рублей;
- 15 июля 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тысяч рублей?

10. (Резервная волна 29.06.2021)

15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на сумму на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 17-й (с января 2025 года по май 2026 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 мая 2026 года долг составит 400 тысяч рублей;
- 15 июня 2026 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1608 тысяч рублей?

Ответы

1. 9.
2. 1440000 рублей.
3. 1400000 рублей.
4. 16.
5. 1288000 рублей.
6. 1272000 рублей.
7. 12.
8. 1020000 рублей.
9. 400000 рублей.
10. 1200000 рублей.

Математик МГУ

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 900000 рублей на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 12 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 13 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 12 месяца, если всего было выплачено 1134 тысяч рублей?

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 18-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 19-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 19-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1209 тысяч рублей?

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 16 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 15-го месяца долг составит 500 тысяч рублей;
- к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного погашения кредита равна 1228 тысяч рублей.

4. (Досрочная волна 28.03.2022)

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 600000 рублей на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 25 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 26 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 25 месяца, если всего было выплачено 691 тысяч рублей?

5. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годах долг остаётся равен 3,3 млн руб.;
- платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью

Найдите разницу между первым и последним платежами.

6. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года, необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годах сумма долга остается равной 1050 тыс. руб.;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

7. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одну
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

8. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 860,6 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

9. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равны;

Известно, что платёж в 2029 году составит 833,8 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 году?

10. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 900 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равны;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 499,2 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2027 году?

11. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 400 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

12. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 100 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

13. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 634,5 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 100 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

14. (Основная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- к каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть 200 тыс. руб.;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько рублей составит платёж в 2029 году?

15. (Резервная волна 02.06.2022)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке в размере 300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

- выплаты в 2027 и 2028 годах равны;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сумма всех выплат равна 560,1 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2027 году?

16. (Резервная волна 27.06.2022)

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг будет возрастать на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет на 20% больше суммы, взятой в кредит?

17. (Резервная волна 27.06.2022)

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг будет возрастать на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет на 25% больше суммы, взятой в кредит?

18. (Резервная волна 27.06.2022)

15-го января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 -е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой кредит. Найдите r .

Математик МГУ

ОТВЕТЫ

1. 300.
2. 100000 рублей.
3. $r = 1$.
4. 100
5. 1,5 млн рублей.
6. на 500 тыс. рублей.
7. 700 тыс. руб.
8. 800 тысяч рублей.
9. 100 тыс. рублей
10. 400 тыс. рублей.
11. 953,6 тыс. руб.
12. 634,5 тыс. руб.
13. 813,5195 тыс. руб.
14. 336 тыс. руб.
15. 100 тыс. рублей.
16. 39.
17. 9.
18. $r = 5$.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

В июле 2023 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 65500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

В июле 2023 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года), а общая сумма выплат равна 375000 рублей?

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 104800 рублей больше суммы, взятой в кредит?

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

В июле 2023 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года), а общая сумма выплат равна 311040 рублей?

5. (Досрочная волна 19.04.2023)

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2, \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 25%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

6. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2023 года планируется взять кредит на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2028 год долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1470 тысяч рублей?

7. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 800 тыс. руб.;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

8. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

9. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найти общую сумму выплат после полного погашения кредита.

10. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 650 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найти общую сумму выплат после полного погашения кредита.

11. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите платёж в 2026 году, если общая сумма выплат по кредиту составила 2120 тыс. рублей.

12. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 1420 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит выплата в 2026 году.

13. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 200 тыс. руб.;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту составила 1480 тыс. руб.

14. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 планируется кредит на десять лет в размере 600 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в 2030 году долг составит 400 тыс. руб.;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 1740 тыс. руб.

15. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 800 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 1970 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит долг в июле 2030 года.

16. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 1300 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 2580 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит долг в июле 2030 года.

17. (Основная волна 01.06.2023)

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 600 тыс. руб.;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 2230 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит платёж в 2035 году.

18. (Резервная волна 26.06.2023)

Евгений взял 15 января кредит на сумму 1 миллион рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен

составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн р.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найти наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн руб.

19. (Резервная волна 26.06.2023)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Дата	07.26	07.27	07.28	07.29	07.30
Долг (в млн р.)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

20. (Резервная волна 26.06.2023)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн руб., где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Дата	07.26	07.27	07.28	07.29	07.30
Долг (в млн р.)	S	$0,9S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 20 млн руб.

21. (Резервная волна 01.07.2023)

Вклад в размере 10 млн руб. планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 10%. Кроме того в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн руб., где x – целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн руб.

22. (Резервная волна 01.07.2023)

Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наибольшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 17 млн рублей.

23. (Резервная волна 01.07.2023)

Вклад в размере 20 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 13 млн рублей.

ОТВЕТЫ

1. 122000 рублей
2. 221400 рублей
3. 300000 рублей
4. 201300 рублей
5. 9
6. 750000 рублей
7. 1300000 рублей
8. 600000 рублей
9. 1400000 рублей
10. 1300000 рублей
11. 300000 рублей
12. 220000 рублей
13. 20
14. 30
15. 300000 рублей
16. 500000 рублей
17. 156000 рублей
18. 6
19. 7
20. 11
21. 8
22. 24
23. 12

Задание 17. Планиметрия



Экзамен 2014 года

1. (Досрочная волна 28.04.2014)

Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

2. (Досрочная волна 28.04.2014)

Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KBC , если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 12, а $\cos \angle BAC = 0,6$.

3. (Досрочная волна 08.05.2014)

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC , а вершина E – на отрезке AB .

- а) Докажите, что $FH = 2DH$.
б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

4. (Досрочная волна 08.05.2014)

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольнике ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC , а вершина E – на отрезке AB .

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 2$.

5. (Основная волна 05.06.2014)

Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB . Касательная к окружности, проведённая в точке B , пересекает эту прямую в точке K .

а) Докажите, что треугольник BCK – равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK , если $\cos BAC = \frac{3}{4}$.

6. (Основная волна 05.06.2014)

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH , из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

7. (Основная волна 05.06.2014)

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH , из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

8. (Основная волна 05.06.2014)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

9. (Основная волна 05.06.2014)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

10. (Основная волна 05.06.2014)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

11. (Резервная волна 19.06.2014)

В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM , пересекает сторону AC в точке N . $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

- а) докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.
- б) пусть P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Найдите отношение $AP : PN$.

ОТВЕТЫ

1. 25.
2. 10.
3. $24 - 12\sqrt{3}$.
4. $6 - 3\sqrt{3}$.
5. 2.
6. 1 : 15.
7. 1 : 63.
8. $7\sqrt{3}$.
9. 24.
10. $4\sqrt{3}$.
11. 3 : 1.

Математик МГУ

Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

- Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
- Найдите AD , если $\angle BAD = 75^\circ$ и $BC = 1$.

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

- Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
- Найдите AD , если $\angle BAD = 60^\circ$ и $BC = 2$.

3. (Основная волна 04.06.2015)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

4. (Основная волна 04.06.2015)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 12$.

5. (Основная волна 04.06.2015)

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

6. (Основная волна 04.06.2015)

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

7. (Основная волна 04.06.2015)

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$, а $BC = 6\sqrt{2}$.

8. (Основная волна 04.06.2015)

Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и DM перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$, пересекаются на стороне AD .

б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM , DM , BN и CN , равна 24.

Ответы

1. $AD = 3$.
2. $AD = 14 + 8\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{10}$.
4. $\sqrt{5}$.
5. $1 : 3$.
6. $30 + 16\sqrt{3}$.
7. $18\sqrt{3}$.
8. 98.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

Точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон соответственно BC , AC и AB остроугольного треугольника ABC .

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 , лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1 .

б) Известно, что $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 , A_1BC_1 и B_1AC_1 .

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

Точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон соответственно BC , AC и AB остроугольного треугольника ABC , в котором угол A тупой.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 , лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1 .

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 24$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 , A_1BC_1 и B_1AC_1 .

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 55^\circ$.

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN – касательные к окружности, описанной около треугольника KLN .

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN , если известно, что $KN = 6$, а угол LMN равен 120° .

5. (Досрочная волна 11.04.2016)

Прямая, проходящая через вершину B , прямоугольника $ABCD$, перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M , равноудаленной от вершин B и D .

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = \angle MBD$.

б) Найдите расстояние от точки O , точки пересечения диагоналей, до отрезка CM , если $BC = 42$.

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

Прямая, проходящая через вершину B , прямоугольника $ABCD$, перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M , равноудаленной от вершин B и D .

а) Докажите, что BM и BD делят угол B на три равных угла.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ до прямой CM , если $BC = 6\sqrt{21}$.

7. (Основная волна 06.06.2016)

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 45^\circ$.

8. (Основная волна 06.06.2016)

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 30^\circ$.

9. (Основная волна 06.06.2016)

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение $EH : AC$, если $\angle ABC = 60^\circ$.

10. (Основная волна 06.06.2016)

В трапеции $ABCD$ точка E – середина основания AD , точка M – середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O .

а) Докажите, что площади четырёхугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $AMOE$, если $BC = 3$, $AD = 4$.

11. (Основная волна 06.06.2016)

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = BC \cdot AD$.

б) Найдите отношение $CE : KE$, если $\angle ECD = 75^\circ$.

12. (Основная волна 06.06.2016)

Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K .

а) Докажите, что $CK \cdot CE = BC \cdot AD$.

б) Найдите отношение $CE : KE$, если $\angle ECD = 15^\circ$.

13. (Основная волна 06.06.2016)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны.

б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH , а Q – точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AN = 12$ и $BH = 3$.

14. (Основная волна 06.06.2016)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N – середины катетов AC и BC соответственно, CH – высота.

а) Докажите, что прямые MN и NH перпендикулярны.

б) Пусть P – точка пересечения прямых AC и NH , а Q – точка пересечения прямых BC и MN . Найдите площадь треугольника PQM , если $AN = 4$ и $BH = 2$.

15. (Основная волна 06.06.2016)

На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM – биссектриса треугольника ABC .

б) Найти площадь четырехугольника $AMB D$, если $AC = 30$, $BC = 18$ и $AB = 24$.

16. (Основная волна 06.06.2016)

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке M . Точка Q лежит на меньшей дуге MB окружности с диаметром BC . Прямая CQ второй раз пересекает окружность с диаметром AC в точке P .

а) Докажите, что прямые PM и QM перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $AM = 1$, $BM = 3$, а Q – середина дуги MB .

17. (Основная волна 06.06.2016)

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке M . Точка Q лежит на меньшей дуге MB окружности с диаметром BC . Прямая CQ второй раз пересекает окружность с диаметром AC в точке P .

а) Докажите, что прямые PM и QM перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $AM = 6$, $BM = 2$, а Q – середина дуги MB .

18. (Основная волна 06.06.2016)

В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$ если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

ОТВЕТЫ

1. 1,5.

2. 1,2.

3. 175° .

4. $3\sqrt{3}$.

5. $\sqrt{21}$.

6. 3.

7. 1 : 2.

8. 3 : 4.

9. 1 : 4.

10. $\frac{2}{9}$.

11. 3 : 1.

12. 2 : 1.

13. $S = 50$.

14. $S = 18\sqrt{2}$.

15. $S = 268,8$.

16. 2.

17. 4.

18. 0,65.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH – высота, угол BAC равен 60° , угол BCA равен 45° .

- Докажите, что A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
- Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N .

- Докажите, что углы CAN и CMN равны.
- Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM , если $\operatorname{tg} BAC = \frac{4}{3}$.

3. (Основная волна, 02.06.2017)

Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K , так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

- Докажите, что $CO = KO$.
- Найти отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

4. (Основная волна, 02.06.2017)

Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K , так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

- Докажите, что $CO = KO$.
- Найти отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{4}{121}$ площади трапеции $ABCD$.

5. (Основная волна, 02.06.2017)

Точка E – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K , так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

- Докажите, что $CO = KO$.

б) Найти отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{64}$ площади трапеции $ABCD$.

6. (Основная волна, 02.06.2017)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружности в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD , если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и $AB = 3$.

7. (Основная волна, 02.06.2017)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB . Продолжения диаметра CA первой окружности и хорды CB этой окружности пересекают вторую окружности в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите AD , если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности и в четыре раза больше радиуса первой и $AB = 2$.

8. (Основная волна, 02.06.2017)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK : KA$.

9. (Основная волна, 02.06.2017)

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окруж-

ности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 20$ и $BC = 15$.

10. (Основная волна, 02.06.2017)

В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся прямой CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника MO_1NO_2 , если $AC = 12$ и $BC = 5$.

11. (Основная волна, 02.06.2017)

Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O .

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO , если сторона квадрата равна 1.

12. (Резервная волна, 28.06.2017)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 8MB$ и $DN = 2CN$.

а) Докажите, что $AD = 4BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{6}$.

13. (Резервная волна, 28.06.2017)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

14. (Резервная волна, 28.06.2017)

В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

а) Докажите, что $\sin AOD = \sin BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если угол BAD равен 90° , а основания равны 5 и 7.

15. (Резервная волна, 28.06.2017)

В треугольник ABC , в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC , вписана окружность с центром O . Точка B_1 симметрична точке B относительно CO .

а) Докажите, что A , B , O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

ОТВЕТЫ

1. $A_1H = 1$.
2. $5 : 4$.
3. $3 : 7$.
4. $2 : 9$.
5. $3 : 5$.
6. $AD = 9$.
7. $AD = 8$.
8. $1 : 4$.
9. $S = \frac{7}{2}$.
10. $S = \frac{238}{169}$.
11. $AO = 1$.
12. $MN = 4$.
13. $MN = 18$.
14. $S = 35$.
15. $S = 18$.

Математик МГУ

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60° .

а) Докажите, что угол ABC равен 120° . б) Найдите BH , если $AB = 7$, $BC = 8$.

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD .

3. (Основная волна, 01.06.2018)

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2 .

4. (Основная волна, 01.06.2018)

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 50$, $AD = 74$.

а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

б) Найдите O_1O_2 .

5. (Основная волна, 01.06.2018)

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD .

6. (Основная волна, 01.06.2018)
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 10$. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.
- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
 - Найдите AD .
7. (Основная волна, 01.06.2018)
В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.
- Докажите, что $AB = CD$.
 - Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.
8. (Резервная волна, 25.06.2018)
Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH – высота этого треугольника.
- Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.
9. (Резервная волна, 25.06.2018)
Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC пересекаются в точке O .
- Докажите, что угол AOE равен 90° .
 - Найдите $BO : OD$.
10. (Резервная волна, 25.06.2018)
Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH – высота этого треугольника.
- Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - Найдите BH , если $AB = 16$, $BC = 18$, $BH = BO$.

Ответы

1. $BH = \frac{13}{\sqrt{3}}$.
2. $BD = \frac{55}{7}$.
3. $O_1O_2 = 4$.
4. $O_1O_2 = 9$.
5. $AD = 9$.
6. $AD = 15,84$.
7. $AD = 8$.
8. $BH = 6$.
9. $BO : OD = 3 : 1$.
10. $BH = 12$.

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите QN , если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MPQ , если прямая DP перпендикулярна прямой PC , $AB = 25$, $BC = 3$, $CD = 28$, $AD = 20$.

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

- Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.
- Найдите PM , если отрезки AQ и BQ перпендикулярны, $AB = 15$, $BC = 1$, $CD = 17$, $AD = 9$.

4. (Досрочная волна 10.04.2019)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCD , если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

5. (Основная волна, 29.05.2019)

Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что углы POC и PCO равны.

б) Найдите площадь треугольника APC , если радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4, а угол ABC равен 120° .

6. (Основная волна, 29.05.2019)

В остроугольном треугольнике ABC , угол A равен 60° . Высоты BN и CM треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 6\sqrt{3}$, угол ABC равен 45° .

7. (Основная волна, 29.05.2019)

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ – биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.

б) Найдите PQ , если $BC = 3$ и $AC = 5$.

8. (Основная волна, 29.05.2019)

Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO , где O – центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

а) Докажите, что $OP = AP$.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если угол ABC равен 120° , а радиус описанной окружности равен 18.

9. (Основная волна, 29.05.2019)

Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN . Высота BH пересекает эту окружность в точке K .

- а) Докажите, что $AN = CK$.
- б) Найдите KN , если угол BAC равен 35° , угол ACB равен 65° , а радиус окружности равен 12.
10. (Резервная волна, 24.06.2019)
- Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH .
- а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $\operatorname{tg}^4 ABC$.
- б) Пусть точка O_1 – центр окружности диаметра AH , вторично пересекающей отрезок AC в точке P , а точка O_2 – центр окружности с диаметром BH , вторично пересекающей отрезок BC в точке Q . Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2 , если $AC = 22$, $BC = 18$.
11. (Резервная волна, 24.06.2019)
- Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.
- а) Докажите, что $AB = BC$.
- б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины A , делит сторону BC .

Ответы

1. $QN = \frac{336}{65}$.

2. $R = \frac{85}{12}$.

3. $PM = \frac{3\sqrt{21}}{2}$.

4. $R = \sqrt{65}$.

5. $S = 12\sqrt{3}$.

6. $S = 9$.

7. $PQ = \frac{15}{4}$.

8. 27.

9. $KN = 12$.

10. $S = 99$.

11. 5 : 4.

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$ и угол A равен 45° .

2. (Досрочная волна 27.03.2020)

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$ и угол A равен 15° .

3. (Основная волна, 10.07.2020)

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

4. (Основная волна, 10.07.2020)

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 5 : 4$ и $A_1C_1 = 4$.

5. (Основная волна, 10.07.2020)

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке A_1 , биссектриса угла B пересекает описанную окружность

в точке B_1 , биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке C_1 .

а) Докажите, что угол A_1BB_1 равен 45° .

б) Известно, что $AB = 2\sqrt{3}$, угол A равен 60° . Найдите B_1C_1 .

6. (Основная волна, 10.07.2020)

Дан прямоугольный треугольник ABC . На катете AC отмечена точка M , а на продолжении катета BC за точку C – точка N так, что $CM = CB$ и $CA = CN$.

а) Пусть CH и CF – высоты треугольников ABC и NMC соответственно. Докажите, что CF и CH перпендикулярны.

б) Пусть L – это точка пересечения BM и AN , $BC = 2$, $AC = 5$. Найдите ML .

7. (Основная волна, 10.07.2020)

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает меньшую окружность в точке D . Прямая BC вторично пересекает большую окружность в точке E .

а) Докажите, что AE параллельно BD .

б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 8 и 15.

8. (Основная волна, 10.07.2020)

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.

9. (Резервная волна, 25.07.2020)

На стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена точка M , которая является серединой этой стороны.

а) Докажите, что площадь треугольника ABM вдвое меньше площади трапеции $ABCD$.

б) На стороне CD отмечена точка K , такая, что $S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{AKD}$, причем $AD = 2BC$. Расстояние от точки D до прямой AB равно 15. Найдите расстояние от точки K до стороны AB .

10. (Резервная волна, 25.07.2020)

К окружности с диаметром $AB = 10$ проведена касательная BC так, что $BC = 5$. Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D . Точка E диаметрально противоположна точке D . Прямые ED и BC пересекаются в точке F .

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE$.

б) Найдите площадь треугольника FBE .

11. (Резервная волна, 25.07.2020)

Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, углы BML и BAC равны.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

Ответы

1. $S = \frac{5}{4}$.

2. $S = \frac{3}{4}$.

3. $S = 12\sqrt{55}$.

4. $S = 8\sqrt{21}$.

5. $B_1C_1 = 3$.

6. $ML = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. $AC = \frac{240}{17}$.

8. $CD = 17$.

9. $\frac{45}{4}$.

10. $S = \frac{80}{3}$.

11. $S = 80$.

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Отрезок AP – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.

б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке M . Найдите длину отрезка MC_1 , если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH = 120^\circ$.

2. (Основная волна 07.06.2021)

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD , вписанная в окружность. Продолжение высоты трапеции BH пересекает окружность в точке K .

а) Докажите, что отрезки AC и AK перпендикулярны.

б) Найдите AD , если радиус описанной окружности равен 6, угол BAC равен 30° , отношение площадей $BCNH$ к NKH равно 35, где N – точка пересечения отрезков AD и CK .

3. (Основная волна 07.06.2021)

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD , вписанная в окружность. Продолжение высоты трапеции BH пересекает окружность в точке K .

а) Докажите, что отрезки AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N . Найдите AD , если радиус окружности равен 12, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH .

4. (Основная волна 07.06.2021)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M , что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN , если $AC = 4$, $\sin \angle BAD = \frac{8}{17}$.

5. (Основная волна 07.06.2021)

Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A . На продолжении стороны AD за точку D взята точка N такая, что $CN = CD$, а на продолжении стороны CD за точку D взята такая точка M , что $AD = AM$.

а) Докажите, что $BM = BN$.

б) Найдите MN , если $AC = 7$, $\sin \angle BAD = \frac{7}{25}$.

6. (Основная волна 07.06.2021)

Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90^\circ$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC .

б) Найдите CN , если $BC = 3$, $AC = 5$, $CM = 2$.

7. (Основная волна 07.06.2021)

Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C . На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно такие, что $\angle MHN = 90^\circ$.

а) Докажите, что треугольник MNH подобен треугольнику ABC .

б) Найдите CN , если $BC = 2$, $AC = 4$, $CM = 1$.

8. (Основная волна 07.06.2021)

Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

б) Найдите BN , если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

9. (Основная волна 07.06.2021)

Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

б) Найдите BN , если $AC = 5$, $MC = 2$, $BC = 3$.

10. (Основная волна 07.06.2021)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Меньшее основание BC равно боковым сторонам. На плоскости взята точка E так, что прямая BE перпендикулярна AD и прямая CE перпендикулярна BD .

а) Докажите, что углы AEB и BDA равны.

б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos \angle AEB = \frac{4}{5}$.

11. (Основная волна 07.06.2021)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, где $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

а) Доказать, что $\angle AEB = \angle BDA$.

б) Найти площадь $ABCD$, если $AB = 72$, $\cos \angle AEB = \frac{5}{6}$.

12. (Резервная волна 29.06.2021)

Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная проведенная к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK : KP$, если $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$.

13. (Резервная волна 29.06.2021)

Окружность с центром O , построенная на катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает гипотенузу AB в точках A и D . Касательная проведенная к этой окружности в точке D , пересекает катет BC в точке M .

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Прямая DM пересекает прямую AC в точке P , прямая OM пересекает прямую BP в точке K . Найдите $BK : KP$, если $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответы

1. $MC_1 = 4\sqrt{3}$.

2. $AD = 4\sqrt{6}$.

3. $AD = 4\sqrt{33}$.

4. $MN = \frac{120}{17}$.

5. $MN = \frac{336}{25}$.

6. $CN = \frac{9}{5}$.

7. $CN = \frac{3}{2}$.

8. $BN = 2$.

9. $BN = \frac{6}{5}$.

10. $S = 3072$.

11. $S = 2000\sqrt{11}$.

12. $7 : 25$.

13. $3 : 5$.

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

Окружность вписана в треугольник ABC , P – точка касания окружности со стороной AB , точка M – середина AB .

а) Докажите, что $MP = \frac{|AC - CB|}{2}$.

б) Найдите углы треугольника, если $MC = MA$, $AC > BC$, $MP = \frac{r}{2}$.

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки F и E так, что FE параллельно CD , а $FC = ED$.

а) Докажите, что угол BCF равен углу AFE .

б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $DE = 5BF$, $FE = 8$ и площадь трапеции $FCDE$ равна $27\sqrt{11}$.

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $AM : MB = NC : BN = 2 : 3$. Прямая MN касается окружности, вписанной в треугольник ABC в точке K .

а) Докажите, что $AB + BC = 4AC$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $MK = \frac{9}{5}$ и $KN = 3$.

4. (Досрочная волна 28.03.2022)

В треугольник ABC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке P . Точка M – середина AB .

а) Докажите, что $MP = \frac{|AC - BC|}{2}$.

б) Найдите углы треугольника ABC , если $CM = AM$ и $BC > AC$. Радиус окружности в 2 раза больше MP .

5. (Основная волна 02.06.2022)

Биссектриса BB_1 и высота CC_1 треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках M и N . Известно, что $\angle BCA = 85^\circ$ и $\angle ABC = 40^\circ$.

- а) Докажите, что $CN = BM$.
- б) Пусть MN и BC пересекаются в точке D . Найти площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 7.
6. (Основная волна 02.06.2022)
- В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.
- а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
- б) Найдите EL , если $AC = 8$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{2}$.
7. (Основная волна 02.06.2022)
- В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD . Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.
- а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
- б) Найдите EL , если $AC = 12$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{4}$.
8. (Основная волна 02.06.2022)
- На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.
- а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .
- б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.
9. (Основная волна 02.06.2022)
- На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.
- а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .
- б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 6$, $BC = 12$, $\angle BAD = 60^\circ$.

10. (Основная волна 02.06.2022)

На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{3}{8}$.

11. (Основная волна 02.06.2022)

На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B . Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно.

а) Докажите, что $AC^2 + CD^2 = AD^2 + DB^2$.

б) Прямые AC и BD пересекаются в точке T найдите отношение $AT : TC$, если $\cos \angle ABC = \frac{2}{7}$.

12. (Основная волна 02.06.2022)

В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что около четырехугольника $AMNC$ можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

б) На стороне AC отмечена точка F , такая что отрезок BF пересекает отрезок MN в точке E . Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AMNC$, если $\angle ABC = 120^\circ$ и $EF = 6\sqrt{2}$.

13. (Основная волна 02.06.2022)

В треугольнике ABC на стороне BC отметили точку D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF пересекает AD в точке E . Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK .

а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.

б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.

14. Резервная волна 27.06.2022)

Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Точки I и J – центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.

а) Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.

б) Найдите IJ , если $AC = 16$, $\cos \angle BDC = \frac{1}{9}$.

15. Резервная волна 27.06.2022)

Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC . Точки I и J – центры окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD соответственно.

а) Докажите, что прямые BI и DJ параллельны.

б) Найдите IJ , если $AC = 12$, $\cos \angle BDC = \frac{3}{7}$.

16. Резервная волна 27.06.2022)

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали пересекаются в точке O , $AD = 2BC$. Через вершину A проведена прямая параллельная диагонали BD , а через вершину D проведена прямая параллельная диагонали AC , и эти прямые пересекаются в точке E .

а) Докажите, что $BO : AE = 1 : 2$.

б) Прямые BE и CE пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите MN , если $AD = 10$.

ОТВЕТЫ

1. $\angle A = \arccos \frac{4}{5}, \angle B = \arccos \frac{3}{5}, \angle C = 90^\circ.$

2. $S = \frac{159\sqrt{11}}{5}.$

3. $r = 3.$

4. $\angle A = \arccos \frac{3}{5}, \angle B = \arccos \frac{4}{5}, \angle C = 90^\circ.$

5. 49.

6. $\frac{22}{3}.$

7. 4,7.

8. $\frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{10}.$

9. $\frac{51\sqrt{3} - 9\sqrt{13}}{25}.$

10. 46 : 9.

11. 41 : 4.

12. $12\sqrt{7}.$

13. 30 : 19.

14. $\frac{18\sqrt{5}}{5}.$

15. $\frac{21\sqrt{10}}{10}.$

16. 2.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 7$ и $KM = 14$.

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 34, а $BC = 32$.

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 5$ и $KM = 25$.

5. (Досрочная волна 27.03.2023)

Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

6. (Досрочная волна 27.03.2023)

Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN , если $LB : LA = 3 : 7$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{17}$.

7. (Досрочная волна 19.04.2023)

Окружность касается одной из сторон прямого угла с вершиной D в точке E и пересекает вторую сторону в точках A и B (точка A лежит между B и D). В окружности проведён диаметр AC .

а) Докажите, что отрезок BC вдвое больше отрезка DE .

б) Найдите расстояние от точки E до прямой AC , если $AD = 4$ и $AB = 5$.

8. (Основная волна 01.06.2023)

На стороне AC равностороннего треугольника ABC взяли точку M . Серединный перпендикуляр к BM пересекает AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что углы AEM и KMC равны.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и MKC , если $AM : CM = 2 : 5$.

9. (Основная волна 01.06.2023)

Треугольник ABC равносторонний. На стороне AC выбрана точка M , серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает сторону AB в точке E , а сторону BC в точке K .

- а) Докажите, что угол AEM равен углу CMK .
- б) Найти отношение площадей треугольников AEM и CMK , если
10. (Основная волна 01.06.2023)
Дан ромб $ABCD$. Прямая, перпендикулярная стороне AD , пересекает его диагональ AC в точке M , диагональ BD – в точке N , причем $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.
- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = 0,2$.
- б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.
11. (Основная волна 01.06.2023)
Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O . Точки M и N отмечены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Известно, что $AM = MO$ и $CN = NO$.
- а) Докажите, что точки M , N и O лежат на одной прямой.
- б) Найдите $AM : MB$ если известно, что $AO = OC$ и $BC : AD = 1 : 7$.
12. (Основная волна 01.06.2023)
Биссектриса AM острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ делит боковую сторону CD пополам. Отрезок DN перпендикулярен отрезку AM и делит сторону AB в отношении $AN : NB = 7 : 1$.
- а) Докажите, что прямые BM и CN перпендикулярны.
- б) Найдите длину отрезка MN , если площадь трапеции равна $4\sqrt{55}$.
13. (Основная волна 01.06.2023)
Биссектриса AM острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ делит боковую сторону CD пополам. Отрезок DN перпендикулярен отрезку AM и делит сторону AB в отношении $AN : NB = 5 : 1$.
- а) Докажите, что прямые BM и CN перпендикулярны.
- б) Найдите длину отрезка MN , если площадь трапеции равна $3\sqrt{2}$.
14. (Основная волна 01.06.2023)
Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O . Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая ее боковые стороны.

- а) Докажите, что длина отрезка этой прямой с концами на боковых сторонах трапеции, равна ее боковой стороне.
- б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = OC$ и данная прямая делит AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.
15. (Основная волна 01.06.2023)
- Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O . Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая ее боковые стороны.
- а) Докажите, что длина отрезка этой прямой с концами на боковых сторонах трапеции, равна ее боковой стороне.
- б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = OC$ и данная прямая делит AB в отношении $AM : MB = 2 : 3$.
16. (Резервная волна 26.06.2023)
- В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $AC = 5$ и $BC = \sqrt{61}$. На его стороне BC вне треугольника построим равносторонний треугольник $B'CD$ (точки A и D лежат в разных плоскостях относительно прямой BC).
- а) Докажите, что около четырехугольника $AB'CD$ можно описать окружность.
- б) Найдите расстояние от центра этой окружности до точки пересечения диагоналей четырехугольника $AB'CD$.
17. (Резервная волна 26.06.2023)
- На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно. Оказалось, что $BC_1 = CB_1 = BC$.
- а) Докажите, что точки B , C и середины отрезков BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.
- б) Найдите косинус угла между прямыми BB_1 и CC_1 , если $BC = 5$, $AB = 12$, $AC = 13$.
18. (Резервная волна 26.06.2023)
- На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно. Оказалось, что $BC_1 = CB_1 = BC$.
- а) Докажите, что точки B , C и середины отрезков BB_1 и CC_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите косинус угла между прямыми BB_1 и CC_1 , если $BC = 8$, $AB = 15$, $AC = 17$.

19. (Резервная волна 01.07.2023)

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

20. (Резервная волна 01.07.2023)

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 4$?

21. (Резервная волна 01.07.2023)

Стороны AB и AD квадрата $ABCD$ касаются окружности, радиус которой втрое меньше стороны квадрата.

а) Докажите, что эта окружность разбивает диагональ BD на три равных отрезка.

б) Касательная к окружности, проведённая через точку B , пересекает сторону CD в точке E . Найдите длину отрезка DE , если сторона квадрата равна 18.

Ответы

1. $\frac{147\sqrt{5}}{5}$

2. $\sqrt{10}$

3. $\sqrt{34}$

4. $\frac{375\sqrt{11}}{11}$

5. $\frac{115}{6}$

6. $\frac{340}{21}$

7. 6

8. 9 : 16

9. 4 : 9

10. $60\sqrt{6}$

11. 1 : 2

12. 4

13. 1,5

14. 1 : 7

15. 7 : 17

16. $\frac{\sqrt{427}}{9}$

17. $\frac{\sqrt{26}}{26}$

18. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

19. 1 : 3

20. 1 : 4

21. 4,5

Задание 18. Задача с параметром**Экзамен 2013 года**

1. (Досрочная волна 23.04.2013)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_{x+1}(a+x-6) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$.

2. (Досрочная волна 23.04.2013)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_{x+1}(x+a-5) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 2]$.

3. (Досрочная волна 23.04.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

4. (Досрочная волна 23.04.2013)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_{1-x}(a-x+2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$.

5. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + 3 + a| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственный корень.

6. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y , удовлетворяющих неравенству

$$5|x - 2| + 3|x + a| \leq \sqrt{4 - y^2} + 7.$$

7. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y , удовлетворяющих неравенству

$$4|x + 3| + 3|x - a| \leq \sqrt{16 - y^2} + 2.$$

8. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a - 3)^2 = |x + 3 - a| + |x + a - 3|$$

имеет единственный корень.

9. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8a + \sqrt{7 + 6x - x^2} = ax + 4$$

имеет единственный корень.

10. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

11. (Основная волна 03.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственный корень.

12. (Основная волна 10.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49} = 3|x - 7a| - 6|x|$$

имеет хотя бы один корень.

13. (Основная волна 10.06.2013)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

14. (Резервная волна 19.06.2013)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$|\cos^2 x + 2 \sin x - 2a| = \cos^2 x + \sin x + 2a$$

имеет на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; 0)$ единственный корень.

15. (Резервная волна 19.06.2013)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$|2 \sin^2 x + 8 \cos x - 3a| = 2 \sin^2 x + 7 \cos x + 3a$$

имеет на промежутке $[\frac{\pi}{2}; \pi)$ единственный корень.

Ответы

1. $a \in [\frac{27}{4}; 7) \cup (7; 9]$.
2. $a \in [-2; 4) \cup (4; \frac{17}{4}]$.
3. $a \in (-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$.
4. $a \in [-\frac{5}{4}; -1) \cup (-1; 1]$.
5. $a = -5, a = -1$.
6. $a \in [-5; 1]$.
7. $a \in [-5; -1]$.
8. $a = 1, a = 5$.
9. $a \in \{0\} \cup (\frac{4}{9}; 4]$.
10. $a \in [-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}) \cup \{0\}$.
11. $a \in [-1; -\frac{1}{3}) \cup \{0\}$.
12. $a \in \{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3}; 14 + 7\sqrt{3}]$.
13. $a \in \{-5\} \cup [15 - 10\sqrt{2}; 15 + 10\sqrt{2}]$.
14. $a \in \{-\frac{1}{8}\} \cup [0; +\infty)$.
15. $a \in \{-\frac{1}{24}\} \cup (0; +\infty)$.

Экзамен 2014 года

1. (Досрочная волна 28.04.2014)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

2. (Досрочная волна 28.04.2014)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a - 2)^4} = |x + a - 2| + |x - a + 2|$$

имеет единственное решение.

3. (Досрочная волна 08.05.2014)

Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

4. (Досрочная волна 08.05.2014)

Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$3\sqrt[5]{6,2x - 5,2} + 4\log_5(4x + 1) + 5a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 6]$.

5. (Основная волна 05.06.2014)

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sin^{14} x + (a - 3 \sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3 \sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

6. (Основная волна 05.06.2014)

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(|x + 2| + |x - a|)^2 - 5(|x + 2| + |x - a|) + 3a(5 - 3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

7. (Основная волна 05.06.2014)

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(|x + 7| - |x - a|)^2 - 13a(|x + 7| - |x - a|) + 30a^2 + 21a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

8. (Основная волна 05.06.2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\log_8(x + a) - \log_8(x - a))^2 - 12a(\log_8(x + a) - \log_8(x - a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

9. (Основная волна 05.06.2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\log_2(x + a) - \log_2(x - a))^2 - 3a(\log_2(x + a) - \log_2(x - a)) + 2a^2 - a - 1 = 0$$

имеет ровно два решения.

10. (Основная волна 05.06.2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\log_6(x + a) - \log_6(x - a))^2 - 4a(\log_6(x + a) - \log_6(x - a)) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

имеет ровно два решения.

11. (Резервная волна 19.06.2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x - a}\right)^2 - (a + 9)\left(x + \frac{1}{x - a}\right) + 2a(9 - a) = 0$$

имеет ровно четыре решения.

Ответы

1. $a = 3, a = 7$.
2. $a = 0, a = 4$.
3. $a \in [-\frac{17}{2}; -\frac{7}{2}]$.
4. $a \in [-\frac{14}{5}; -\frac{7}{5}]$.
5. $a \in [-4; 2]$.
6. $a \in (-\infty; \frac{3}{4}) \cup (1; +\infty)$.
7. $a \in (-\frac{4}{11}; \frac{6}{7}) \cup (\frac{6}{7}; \frac{10}{9})$.
8. $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -\frac{3}{7}) \cup (\frac{3}{5}; +\infty)$.
9. $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.
10. $a \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 2) \cup (2; +\infty)$.
11. $a \in (-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; \frac{7}{2}) \cup (\frac{11}{2}; +\infty)$.

Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. (Основная волна 04.06.2015)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10| \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

4. (Основная волна 04.06.2015)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2|x + 2y - 5| \\ 2x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Ответы

1. $a \in (-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$.
2. $a \in (-\infty; 6] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)$.
3. $a \in (-5\sqrt{5}; -5] \cup [5; 5\sqrt{5})$.
4. $a \in (-5\sqrt{2}; -5] \cup [5; 5\sqrt{2})$.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 6y + 12}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 4y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - x \log_2(b-3) + 6 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - xy - 3y + 3)\sqrt{6-x} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6-x} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

8. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 - 3x - a$$

имеет ровно три различных корня.

9. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

10. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значение a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1$$

имеет ровно один корень.

11. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 + 3x - a$$

имеет ровно три различных корня.

12. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 2y - 8) = |x|(2y - 8) \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

13. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - y - 2) = |x|(y - 2) \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

14. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2)(y + 2x - 4) = |x - 2|^3 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

15. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)(y + 3x - 9) = |x - 3|^3 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

16. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2)(2x - 4 - y) = |x - 2|^3 \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

17. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

18. (Основная волна 06.06.2016)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$$

имеет единственный корень.

Математик МГУ

Ответы

1. $a \in \{-1\} \cup [1; 5)$.
2. $a \in \{-3\} \cup [0; 3)$.
3. $a \in (0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$.
4. $a \in (0; \frac{1}{4}] \cup \{1\}$.
5. $b \in (3; \frac{385}{128}] \cup \{2051\} \cup (32771; +\infty)$
6. $a \in (\frac{1}{12}; \frac{1}{6}] \cup \{\frac{1}{3}\}$.
7. $a \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{3}] \cup \{\frac{2}{3}\}$.
8. $a \in (-\infty; -9) \cup (-9; 0)$.
9. $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.
10. $a = -\frac{1+\sqrt{10}}{2}$, $a = -2$, $a = -1$, $a = 1$, $a = \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.
11. $a \in (-\infty; -9) \cup (-9; 0)$.
12. $a \in \{2 - 2\sqrt{2}\} \cup [0; 4) \cup (4; 4\sqrt{2})$.
13. $a \in \{1 - \sqrt{2}\} \cup [0; 2) \cup (2; 2\sqrt{2})$.
14. $a \in (-\frac{17}{4}; -2) \cup (-2; \frac{1}{4})$.
15. $a \in (-7; -3) \cup (-3; 1)$.
16. $a \in (-\frac{9}{4}; -2) \cup (-2; -\frac{7}{4})$.
17. $a \in \{\frac{1}{6}\} \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$.
18. $a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

2. (Досрочная волна 14.04.2017)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| \leq 4 \\ x^2 + 8x < 16a + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 0]$.

3. (Основная волна 02.06.2017)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

4. (Основная волна 02.06.2017)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3} \cdot \ln(2x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

5. (Основная волна 02.06.2017)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2} \cdot \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \cdot \ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

6. (Основная волна 02.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x) \cdot \ln(2x+2a-5) = \ln(3a-x) \cdot \ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

7. (Основная волна 02.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(6a - x) \cdot \ln(2x + 2a - 2) = \ln(6a - x) \cdot \ln(x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

8. (Основная волна 02.06.2017)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \cdot \sin x = \sqrt{x - a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

9. (Основная волна 02.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x - 1) \cdot \sqrt{2x - a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

10. (Основная волна 02.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x - 1) \cdot \sqrt{3x - a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

11. (Основная волна 02.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a + 7x + 4)(a - 2x + 4) \leq 0 \\ a + 3x \geq x^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

12. (Резервная волна 28.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

13. (Резервная волна 28.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

14. (Резервная волна 28.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2)\sqrt{x+3} = 0 \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

15. (Резервная волна 28.06.2017)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

Ответы

1. $a \in [\frac{1}{2}; \sqrt{3})$.
2. $a \in (8 - 8\sqrt{2}; 4]$.
3. $a \in (-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{4}; 2)$.
4. $a \in (-\frac{9}{4}; -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{3}{8}; \frac{3}{2})$.
5. $a \in (-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.
6. $a \in (\frac{7}{8}; \frac{5}{4})$.
7. $a \in (\frac{2}{7}; \frac{1}{2})$.
8. $a \in (-\infty; 0) \cup [\frac{\pi}{4}; \pi]$.
9. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 2]$.
10. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 3]$.
11. $a \in [-\frac{9}{4}; 4] \cup \{10\}$.
12. $a \in (-\infty; 0) \cup [2 - \sqrt{2}; 1]$.
13. $a \in (-\infty; 0) \cup [3 - \sqrt{6}; 1]$.
14. $a \in (-4; -2] \cup \{0\}$.
15. $a \in (-\frac{3+\sqrt{41}}{2}; -3) \cup \{-\frac{5}{2}\} \cup (-2; 1]$.

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0 \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x+y-a+5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = a^2 - 3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения?

3. (Основная волна, 01.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

4. (Основная волна, 01.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(a-3)x - 4ay + 5a^2 - 6a = 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

5. (Основная волна, 01.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

6. (Основная волна, 01.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (4a - 6)x + 4ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

7. (Основная волна, 01.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x + 2a - 1} + \sqrt{x - a} = 1$$

имеет хотя бы один корень.

8. (Резервная волна, 25.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

9. (Резервная волна, 25.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2x - x^2)^2 - 4\sqrt{2x - x^2} = a^2 - 4a$$

имеет хотя бы один корень.

10. (Резервная волна, 25.06.2018)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$$

имеет хотя бы один корень.

Ответы

1. $a \in (1; 2] \cup [8; 9)$.
2. $a \in \{2; 6\}$.
3. $a \in (\frac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1) \cup (-1; -\frac{3}{5}) \cup (-\frac{3}{5}; -2 + \sqrt{2})$.
4. $a \in (1 - \sqrt{2}; 0) \cup (0; \frac{6}{5}) \cup (\frac{6}{5}; -3 + 3\sqrt{2})$.
5. $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (3; \frac{25}{8})$.
6. $a \in (-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{7}{2}; 0) \cup (1; \frac{9}{2})$.
7. $a \in [0; \frac{2}{3}]$.
8. $a \in [0; 6] \cup [8; 14]$.
9. $a \in [0; 1] \cup [3; 4]$.
10. $a \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$$

больше -4 .

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$$

меньше -2 .

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше -2 .

4. (Досрочная волна 29.03.2019) Найдите все значения параметра
- a
- , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 3|x + a| + |x^2 - x - 2|$$

меньше 2 .

5. (Досрочная волна 10.04.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2 \sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

6. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - a}{15x^2 - 8ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

7. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

8. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

9. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

10. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

11. (Основная волна, 29.05.2019) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

12. (Основная волна, 29.05.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4|x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

13. (Резервная волна, 24.06.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

14. (Резервная волна, 24.06.2019)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Ответы

1. $a \in (-1,25; 2)$.
2. $a \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.
3. $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (4; +\infty)$.
4. $a \in (-\frac{8}{3}; -1) \cup (0; \frac{5}{3})$.
5. $a \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}) \cup \{\sqrt{5}\}$.
6. $a \in (-4; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$.
7. $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$.
8. $a \in (-\frac{9}{8}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.
9. $a \in (-\frac{9}{8}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.
10. $a \in (-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.
11. $a \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$.
12. $a \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$.
13. $a \in (-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$.
14. $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

2. (Основная волна, 10.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2) \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

3. (Основная волна, 10.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{11}(16 - y^2) = \log_{11}(16 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

4. (Основная волна, 10.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{16 - y^2} = \sqrt{16 - a^2x^2} \\ x^2 + y^2 = 6x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5. (Основная волна, 10.07.2020)

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2} \\ y = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

6. (Основная волна, 10.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-4x^2} \\ xy + a^2 = ax + ay \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

7. (Резервная волна, 25.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 + 2ax - a^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

8. (Резервная волна, 25.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

9. (Резервная волна, 25.07.2020)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 \cos \alpha + 2x^2 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответы

1. $a \in (-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$.

2. $a \in (1; 25]$.

3. $a \in (-\infty; -2] \cup \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\} \cup [2; +\infty)$.

4. $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}) \cup \{0\} \cup (\frac{2}{3}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

5. $a \in [\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

6. $a \in [-2; -1) \cup (1; 2]$.

7. $a \in (-2\sqrt{2}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{2})$.

8. $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.

9. $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, k – целое.

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|} \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x - a|\sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$$

имеет ровно два различных корня.

3. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{x^2 - ax + 4a}$$

имеет ровно два различных корня.

4. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a|x + 1| + (1 - a)|x - 1| + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

5. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| + 8 = |x + a| + 8|x - a|$$

имеет ровно три различных корня.

6. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a|x + 2| + (1 - a)|x - 2| + 3 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

7. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{3x + 1}$$

имеет ровно два различных корня.

8. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{4x + 3}$$

имеет ровно два различных корня.

9. (Основная волна, 07.06.2021)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2a|x - 1| - 2) - (1 + 2a)|x + 1| = 0$$

имеет ровно два различных корня.

10. (Резервная волна 29.06.2021)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|a - 4|x^4 - 2ax^2 + |a - 30| = 0$$

имеет хотя бы два различных корня.

11. (Резервная волна 29.06.2021)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|a - 2|x^4 - 2ax^2 + |a - 12| = 0$$

имеет хотя бы два различных корня.

Ответы

1. $a = 1$.
2. $a \in (0; \frac{5}{7}) \cup (\frac{5}{7}; \frac{5}{3}]$.
3. $a \in (-\infty; -2] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.
4. $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
5. $a = -4,5, a = -3,5, a = 3,5, a = 4,5$.
6. $a \in (-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$.
7. $a \in \{-\frac{13}{12}, -1, \frac{1}{4}\} \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.
8. $a \in \{-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\} \cup (\frac{3}{4}; +\infty)$.
9. $a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.
10. $a \in [\frac{60}{17}; 5] \cup [12; +\infty)$.
11. $a \in [\frac{12}{7}; 3] \cup [4; +\infty)$.

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных решения.

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет два различных решения.

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 3xy - 3y + 9)\sqrt{x-3} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных решения.

4. (Досрочная волна 28.03.2022)

Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных корня.

5. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + x - 7a = |7x + a|$$

имеет более двух различных корней.

6. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + 2x - 4a = |4x + 2a|$$

имеет более двух различных корней.

7. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$$

имеет четыре различных корня.

8. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 7x - 5a| = x + a$$

имеет четыре различных корня.

9. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

10. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 9x^2 + 18|x| - 9 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

11. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a|$$

имеет ровно два различных корня.

12. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных решения.

13. (Основная волна 02.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет ровно 4 различных решения.

14. (Резервная волна 27.06.2022)

Найти все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$$

имеет ровно три различных корня.

15. (Резервная волна 27.06.2022)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 9x^2 + a^2} = x^2 + 3x - a$$

имеет ровно три различных корня.

16. (Резервная волна 27.06.2022)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$$

имеет ровно два различных корня.

Ответы

1. $x \in (0; 1) \cup (1; 4)$.
2. $x \in (0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$.
3. $x \in (0; \frac{1}{3})$.
4. $(0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; 5)$.
5. $[-1; 0] \cup [7; 8]$.
6. $[3 - \sqrt{10}; 0] \cup [4; 1 + \sqrt{10}]$.
7. $1 - \sqrt{5} < a < -1; 0 < a < 1 + \sqrt{5}$.
8. $2 - \sqrt{13} < a < -1; 0 < a < 2 + \sqrt{13}$.
9. $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$.
10. $a < -3, a = 0, a > 3$.
11. $(2 - 2\sqrt{5}; 4 - 2\sqrt{5}) \cup (0; 6) \cup (2 + 2\sqrt{5}; 4 + 2\sqrt{5})$.
12. $a < -1; a = 0; a > 1$.
13. $(0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6)$.
14. $a < -4; -4 < a \leq 0$.
15. $a < -9; -9 < a < 0$.
16. $2 \leq a < 4$.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} \cdot \ln(25x^2 - a^2) = \sqrt{1-2x} \cdot \ln(5x - a)$$

имеет ровно один корень.

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-5} \cdot \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3x-5} \cdot \ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень.

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-7} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$.

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

5. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x-3} \cdot \ln(5x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(6x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

6. (Досрочная волна 27.03.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$.

7. (Досрочная волна 19.04.2023)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

8. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (yx - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0, \\ y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

9. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 4x) \cdot \sqrt{2x + y + 6} = 0, \\ y = a(x - 2) \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

10. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \cdot \sqrt{x + y + 6} = 0, \\ y = a(x - 3) \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

11. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 6x - y + 2) \cdot \sqrt{x - y + 2} = 0, \\ y = 4x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

12. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

13. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 7x - y + 4) \cdot \sqrt{x - y + 4} = 0, \\ y = -x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

14. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 16) \cdot \sqrt{y - 2x + 16} = 0, \\ y = ax - 14 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

15. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 7x + 8 - y) \cdot \sqrt{x - y + 8} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

16. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 6x - y + 2) \cdot \sqrt{x - y + 2} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

17. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \cdot \sqrt{x + y + 6} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - x + 7) \cdot (y - x + 7) = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x + 1| + |x - 3| - y) \cdot \sqrt{10 - x - y} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

20. (Основная волна 01.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x + 2| + |x - 1| - y) \cdot \sqrt{10 - x - y} = 0, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

21. (Резервная волна 26.06.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} = \sqrt{a - 6x}$$

имеет корни (хотя бы один), из которых ровно один отрицательный.

22. (Резервная волна 26.06.2023)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

23. (Резервная волна 26.06.2023)

Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2x - x^2)^2 - 4\sqrt{2x - x^2} = a^2 - 4a$$

имеет хотя бы один корень.

24. (Резервная волна 01.07.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 + 2x| = y^2 + |y^2 + 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно более двух решений.

25. (Резервная волна 01.07.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 1| - 2x - x^2 = |y^2 - 1| - 2y - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно более двух решений.

26. (Резервная волна 01.07.2023)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x + |x^2 - x - 2| = y^2 + y + |y^2 - y - 2|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно более двух решений.

Ответы

1. $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
2. $a \in \left(-\frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.
3. $a \in \left(-\frac{\sqrt{89}}{5}; -\frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{\sqrt{89}}{5}\right)$.
4. $a \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{4}; 2\right)$.
5. $a \in \left(-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{8}; \frac{15}{4}\right)$.
6. $a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$.
7. $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.
8. $a \in (-16; -9] \cup \{-7\} \cup \{9\}$.
9. $a \in \left[-\frac{3}{14}; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.
10. $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.
11. $a \in \{-23\} \cup [-19; 2)$.
12. $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.
13. $a \in \{-5\} \cup [4; 20)$.
14. $a \in (-\infty; 0) \cup \left[0; \frac{7}{4}\right] \cup \{2\} \cup \{4\}$.
15. $a \in \{-1\} \cup \{1\} \cup \left[\frac{16}{9}; 8\right)$.

$$16. a \in \{-2\} \cup \{1\} \cup \left[\frac{9}{8}; 2\right).$$

$$17. a \in \{3 - 3\sqrt{2}\} \cup [0; 6] \cup \{3 + 3\sqrt{2}\}.$$

$$18. a \in \{-21\} \cup \{-9\} \cup \{1 - 2\sqrt{21}\} \cup \{1 + 2\sqrt{21}\}.$$

$$19. a \in \{1\} \cup [2; 26].$$

$$20. a \in \{2\} \cup [4; 32].$$

$$21. a \in \{-31\} \cup (-30; -6) \cup [5; +\infty).$$

$$22. a \in [0; 6] \cup [8; 14].$$

$$23. a \in [0; 1] \cup [3; 4].$$

$$24. a \in [-1; 0).$$

$$25. a \in (-2; -1].$$

$$26. a \in (-2; 0].$$

Задание 19. Теория чисел



Экзамен 2013 года

1. (Досрочная волна 23.04.2013)

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
- б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 1000?
- в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 129.

2. (Досрочная волна 23.04.2013)

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
- б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 900?
- в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 123.

3. (Досрочная волна 23.04.2013)

Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

- а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
- б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
- в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

4. (Основная волна 03.06.2013)

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

- а) На доске выписан набор $-6, -2, 1, 4, 5, 7, 11$. Какие числа были задуманы?
- б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
- в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

5. (Основная волна 03.06.2013)

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?
- в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

6. (Основная волна 03.06.2013)

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 20?
- б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?
- в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

7. (Основная волна 03.06.2013)

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

- а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?
- б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
- в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

8. (Основная волна 03.06.2013)

- а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 1; 2; 3$?
- б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 1; 2; 3$ ровно 130 способами?
- в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 1; 2; 3$ ровно 130 способами?

9. (Основная волна 03.06.2013)

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются.

Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

10. (Основная волна 03.06.2013)

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

11. (Основная волна 03.06.2013)

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

12. (Основная волна 10.06.2013)

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

13. (Основная волна 10.06.2013)

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

14. (Резервная волна 19.06.2013)

Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{350},$$

$$S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{350}^2,$$

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{350}^3,$$

$$S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 513$.

а) Найдите S_4 , если еще известно, что $S_2 = 1097$, $S_3 = 3243$.

б) Может ли $S_4 = 4547$?

в) Пусть $S_4 = 4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

15. (Резервная волна 19.06.2013)

Каждое из чисел a_1, a_2, \dots, a_{450} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{450},$$

$$S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{450}^2,$$

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{450}^3,$$

$$S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_{450}^4.$$

Известно, что $S_1 = 739$.

а) Найдите S_4 , если еще известно, что $S_2 = 1779$, $S_3 = 5611$.

б) Может ли $S_4 = 6547$?

в) Пусть $S_4 = 6435$. Найдите все значения, которые может принимать S_2 .

Ответы

1. а) да; б) 44; в) 3, 6.
2. а) да; б) 41; в) 3, 6.
3. а) да; б) нет; в) 39.
4. а) $-6, 4, 7$; б) 5; в) нет, например, для задуманных чисел $-3, 1, 2$ и $-2, -1, 3$ на доске будет выписан один и тот же набор.
5. а) да; б) нет; в) 11.
6. а) да; б) нет; в) 11.
7. а) $-7, -4, 6$; б) 5; в) нет, например, для задуманных чисел $-3, 1, 2$ и $-2, -1, 3$ на доске будет выписан один и тот же набор.
8. а) 130; б) да; в) 20.
9. а) 2, 2, 2, 2, 2 (или 2, 4, 4 или 2, 2, 2, 4); б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.
10. а) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 7, 7, 7, 9, 11 или 7, 9, 11, 14.
11. а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.
12. а) да; б) нет; в) 91.
13. а) да; б) нет; в) 91.
14. а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.
15. а) 19995; б) нет; в) 1371 или 1383.

Экзамен 2014 года

1. (Досрочная волна 28.04.2014)

На окружности некоторым способом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

- а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
- б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
- в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

2. (Досрочная волна 08.05.2014)

Целое число S является суммой не менее трех последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

- а) Может ли S равняться 8?
- б) Может ли S равняться 1?
- в) Найдите все значения, которые может принимать S .

3. (Досрочная волна 08.05.2014)

Целое число S является суммой не менее пяти последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

- а) Может ли S равняться 9?
- б) Может ли S равняться 2?
- в) Найдите все значения, которые может принимать S .

4. (Основная волна 05.06.2014)

Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел a_1, \dots, a_n равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов — это различные целые числа.

- а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?
- б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?
- в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

5. (Основная волна 05.06.2014)

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

- а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?
- б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

6. (Основная волна 05.06.2014)

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

- а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Голоса распределились так, что рейтинг некоторого футболиста стал равным 31. Затем Вася проголосовал за этого футболиста. Каков теперь рейтинг футболиста с учётом голоса Васи?
- б) Голоса распределяют между двумя футболистами. Может ли суммарный рейтинг быть больше 100?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста

рейтинг стал равен 9. При каком наибольшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

7. (Основная волна 05.06.2014)

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

8. (Основная волна 05.06.2014)

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

9. (Резервная волна 19.06.2014)

а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

- б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?
- в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Математик МГУ

Ответы

1. а) нет; б) да; в) б.
2. а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме -1 и 1 .
3. а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме -2 , -1 , 1 и 2 .
4. а) нет; б) да; в) 4 .
5. а) нет, б) да, в) 110 .
6. а) 36 ; б) да; в) 92 .
7. а) нет; б) да; в) $\frac{6}{7}$.
8. а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.
9. а) да; б) нет; в) 110 .

Экзамен 2015 года

1. (Досрочная волна 26.03.2015)

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

- а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
- б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
- в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

2. (Досрочная волна 26.03.2015)

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

- а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
- б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?
- в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

3. (Основная волна 04.06.2015)

Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого участника является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

- а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл учеников, сдавших тест, понизился, и средний балл учеников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл учеников, сдавших тест, составил 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших – 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

4. (Основная волна 04.06.2015)

Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших – 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Ответы

1. а) Например, это 20 раз число 17, число 11 и число 12; б) нет; в) 1650.
2. а) например, 32 раза число 92 и число 26; б) нет; в) 693.
3. а) да; б) да; в) 15.
4. а) да; б) да; в) 15.

Математик МГУ

Экзамен 2016 года

1. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[23; 84]$. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

- а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
- б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?
- в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

2. (Досрочная волна 28.03.2016)

Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[13; 70]$. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

- а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
- б) Может ли Петин результат быть ровно в 7 раз больше Васиного?
- в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

3. (Досрочная волна 28.03.2016)

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

- а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$ хорошим?
- б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$ хорошим?
- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?

4. (Досрочная волна 28.03.2016)

Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

- а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ хорошим?
- б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ хорошим?
- в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?

5. (Досрочная волна 28.03.2016)

Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 36?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

6. (Досрочная волна 11.04.2016)

Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а сумма которых больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

а) 80;

б) 82;

в) 81.

7. (Досрочная волна 11.04.2016)

Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 11, а сумма которых больше 110, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 110, но больше:

а) 99;

б) 101;

в) 100.

8. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанных на доске заменяется на два числа: $a + b$ и $2a - 1$ или $a + b$ и $2b - 1$. Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5, соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100.

в) Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

9. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанных на доске заменяется на два числа: $a + b$ и $2a - 1$ или $a + b$ и $2b - 1$. Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5, соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

10. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанных на доске заменяется на два числа: $a + b$ и $2a - 1$ или $a + b$ и $2b - 1$. Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5, соответственно.

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 15.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100.

в) Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

11. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

- а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.
- б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?
- в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

12. (Основная волна 06.06.2016)

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из пяти членов, сумма которых равна 60.
- б) Может ли такая последовательность состоять из пяти членов и содержать два одинаковых числа?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 8$?

13. (Основная волна 06.06.2016)

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

- а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.
- б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

14. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написано 30 чисел: десять «5», десять «4» и десять «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно

В. (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 15 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

15. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написано 24 числа: восемь «5», восемь «4» и восемь «3». Эти числа разбивают на две группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. Среднее арифметическое чисел в первой группе равно A , среднее арифметическое чисел во второй группе равно B . (Для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу.)

а) Приведите пример разбиения исходных чисел на две группы, при котором среднее арифметическое всех чисел меньше $\frac{A+B}{2}$.

б) Докажите, что если разбить исходные числа на две группы по 12 чисел, то среднее арифметическое всех чисел будет равно $\frac{A+B}{2}$.

в) Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{A+B}{2}$.

16. (Основная волна 06.06.2016)

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_7 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1,5$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

17. (Основная волна 06.06.2016)

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1,6$.

- б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?
- в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

18. (Основная волна 06.06.2016)

На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 30$. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

- а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
- б) Можно ли сделать 10 ходов?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

19. (Резервная волна 27.06.2016)

Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

- а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.
- б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?
- в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

ОТВЕТЫ

1. а) да; б) нет; в) 3.
2. а) да; б) нет; в) 5.
3. а) да; б) нет; в) 8.
4. а) да; б) нет; в) 8.
5. а) да; б) нет; в) 23.
6. а) да, б) нет, в) да.
7. а) да, б) нет, в) да.
8. а) (2, 3), (5, 5), (10, 9), (19, 17); б) нет; в) 2.
9. а) (2; 3), (5; 5), (10; 9), (19; 19); б) нет; в) 2.
10. а) (2; 3), (3; 5), (8; 9), (15; 17); б) нет; в) 2.
11. а) например, числа 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.
12. а) 4, 9, 13, 16, 18; б) да; в) 36.
13. а) 1, 12, 17, 20; б) да; в) 70
14. а) например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»;
в) $4\frac{14}{29}$.
15. а) например, в первой группе все «5», во второй — все «3» и «4»;
в) $4\frac{11}{23}$.
16. а) например, 6, 0, 3, 1, 1, 1, 0; б) нет; в) 2,5.
17. а) например, 5; 0; 2; 1; 1; 1 б) нет; в) 2,8.
18. а) (13, 14, 7), (12, 15, 6), (11, 16, 5), (10, 17, 4), (9, 18, 3); б) нет; в) 6.
19. а) например, 339; б) нет; в) $\frac{931}{27}$.

Экзамен 2017 года

1. (Досрочная волна 31.03.2017)

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

2. (Досрочная волна 11.04.2017)

На доске написано несколько (более одного) различных натуральных чисел, причем любые два из них отличаются не более чем в три раза.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел, сумма которых равна 47?
- б) Может ли на доске быть 10 чисел, сумма которых равна 94?
- в) Сколько может быть чисел на доске, если их произведение равно 8000?

3. (Основная волна 02.06.2017)

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
- б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

4. (Основная волна 02.06.2017))

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 3, или на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 2502.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 3 или на 7?
- б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

5. (Основная волна 02.06.2017)

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 4, или на цифру 8. Сумма написанных чисел равна 2786.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 4 или на 8?
- б) Могут ли ровно четыре числа на доске оканчиваться на 8?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 8, может быть на доске?

6. (Основная волна 02.06.2017)

Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S .

- а) Приведите пример, когда $S < 15$.
- б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?
- в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

7. (Основная волна 02.06.2017)

Каждый из 32 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 14. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S .

- а) Приведите пример, когда $S < 14$.
- б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 11$?
- в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 11$?

8. (Основная волна 02.06.2017)

Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S .

- а) Приведите пример, когда $S < 15$.
- б) Могло ли значение S быть равным 5?
- в) Какое наименьшее значение могло принимать S , если обе контрольные работы писали 10 студентов?

9. (Основная волна 02.06.2017)

Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n , а остальные числа, равные n , стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

- а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
- б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 105, 315, 945?
- в) Приведите все примеры шести задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 82.

10. (Основная волна 02.06.2017)

Задумано несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Эти числа и все их возможные произведения (по 2 числа, по 3 числа и т. д.) выписывают на доску. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n , а остальные числа, равные n , стирают. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 9, 12, 36.

- а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150.
- б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 5, 10, 11, 22, 25, 55, 110, 275, 550?
- в) Приведите все примеры пяти задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор, наибольшее число в котором равно 91.

11. (Основная волна 02.06.2017)

Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем среднее арифметическое результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвертого числа, потом среднее арифметическое полученного результата и пятого числа – число A .

- а) Может ли число A равняться среднему арифметическому начальных пяти чисел?
- б) Может ли число A быть больше среднего арифметического начальных чисел в пять раз?
- в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического начальных пяти чисел?

12. (Резервная волна 28.06.2017)

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

- а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
- б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
- в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трехзначного числа?

13. (Резервная волна 28.06.2017)

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

- а) Приведите пример числа, из которого получается 4106137125.
- б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 27593118?
- в) Какое наибольшее число, кратное 9, может получиться из трехзначного числа, в десятичной записи которого нет девяток?

14. (Резервная волна 28.06.2017)

Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 7$, $M_2 = 6$.

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4$.
- б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?
- в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

15. (Резервная волна 28.06.2017)

В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
- б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
- в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

Ответы

1. а) да; б) нет; в) 35.
2. а) да; б) нет; в) 2 или 3.
3. а) нет; б) нет; в) 11.
4. а) нет; б) нет; в) 12.
5. а) нет; б) нет; в) 9.
6. а) Например, если 20 студентов написали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а по 4 студента написали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов; б) нет; в) 12.
7. а) например, если 28 студентов писали обе контрольные и получили по 15 баллов за каждую, по 2 студента писали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов за каждую; б) нет; в) 16.
8. а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а 4 студента писали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов; б) нет; в) $\frac{185}{14}$.
9. а) 2, 3, 3, 5; б) нет; в) 1, 1, 1, 1, 1, 82 или 1, 1, 1, 1, 2, 41.
10. а) 2, 3, 5, 5; б) нет; в) 1, 1, 1, 1, 91 или 1, 1, 1, 7, 13.
11. а) да; б) нет; в) 2.
12. а) 2847; б) нет; в) 9167169.
13. а) 4675; б) нет; в) 8168157.
14. а) например, 4, 9, 7, 7, 7, 5; б) нет; в) 5,2.
15. а) да; б) нет; в) $\frac{31}{6}$.

Экзамен 2018 года

1. (Досрочная волна 30.03.2018)

На доске написано n чисел a_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на $r_i\%$. При этом либо $r_i = 2\%$, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным $a_i - 2$. (Какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то – на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел r_1, r_2, \dots, r_n быть равным 5?

б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел r_1, r_2, \dots, r_n больше 2, при этом сумма чисел a_1, a_2, \dots, a_n уменьшилась более чем на $2n$?

в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел r_1, r_2, \dots, r_n .

2. (Досрочная волна 11.04.2018)

а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $|\frac{m^2}{n^2} - 2| \leq \frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом из которых значение выражения $|\frac{n+10}{n} - \sqrt{2}|$ будет наименьшим.

3. (Основная волна 01.06.2018)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?

в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

4. (Основная волна 01.06.2018)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 81 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 20%, средний балл в школе № 2 также вырос на 20%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?

в) Средний балл в школе № 1 вырос на 20%, средний балл в школе № 2 также вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

5. (Основная волна 01.06.2018)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. В первой школе он составил 54 балла. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, при этом средние баллы за тест увеличились на 12,5% в обеих школах.

а) Сколько учеников, писавших тест, могло быть в первой школе?

б) Какой максимальный балл мог быть у учащегося из первой школы?

в) Какой минимальный средний балл мог быть у учащихся во второй школе?

6. (Основная волна 01.06.2018)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл

был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?
- б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?
- в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

7. (Основная волна 01.06.2018)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 2 раза?
- б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 9?
- в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

8. (Основная волна 01.06.2018)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

- а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?
- б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?
- в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

9. (Основная волна 01.06.2018)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

- а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 5?
- б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?
- в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

10. (Основная волна 01.06.2018)

а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n , для которых $m \leq n$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$.

11. (Резервная волна 25.06.2018)

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

- а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?
- б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?
- в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 – при получении двух звёзд и 2000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

12. (Резервная волна 25.06.2018)

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 9 пунктов при получении трёх звёзд, на 12 пунктов при получении двух звёзд и на 15 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

- а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 50 пунктов?
- б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?
- в) За пройденный уровень начисляется 7000 очков при получении трёх звёзд, 6000 – при получении двух звёзд и 3000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?

13. (Резервная волна 25.06.2018)

- а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?
- б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?
- в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Ответы

1. а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$.
2. а) да; б) нет; в) $n = 24$.
3. а) нет; б) нет; в) 3.
4. а) нет; б) нет; в) 4.
5. а) 5; б) 240; в) 1.
6. а) да; б) нет; в) 5.
7. а) да; б) нет; в) 6.
8. а) нет; б) нет; в) $\frac{24}{11}$.
9. а) нет; б) нет; в) $\frac{18}{11}$.
10. а) да; б) да; в) 28 и 28; 21 и 42; 16 и 112; 15 и 210; 18 и 63.
11. а) нет; б) 7; в) 49000.
12. а) нет; б) 6; в) 33000.
13. а) да; б) нет; в) 5.

Экзамен 2019 года

1. (Досрочная волна 29.03.2019)

Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

2. (Досрочная волна 29.03.2019)

Вася и Петя решали задачи из сборника, причем каждый следующий день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя – на две задачи больше, чем в предыдущий. В первый день каждый решил хотя бы одну задачу, а в итоге каждый решил все задачи сборника.

а) Могло ли быть в сборнике 85 задач?

б) Могло ли быть в сборнике 213 задач, если каждый из мальчиков решал их более трех дней?

в) Какое наибольшее количество дней мог решать задачи Петя, если Вася решил весь сборник за 16 дней, а количество задач в сборнике меньше 300.

3. (Досрочная волна 29.03.2019)

Вася и Петя решают задачи из сборника. Они начали решать задачи в один и тот же день, и решили в этот день хотя бы по одной задаче каждый. Вася решал в каждый следующий день на одну задачу больше, чем в предыдущий, а Петя – на две задачи больше, чем предыдущий день. В итоге каждый из них решил все задачи из сборника.

- а) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за пять дней?
- б) Могло ли быть так, что в первый день они решили одинаковое число задач, при этом Петя прорешал весь сборник за десять дней?
- в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день Вася решил больше задач чем Петя, а за 7 дней Петя решил задач больше, чем Вася?

4. (Досрочная волна 29.03.2019)

Готовясь к экзамену, Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

- а) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 5 дней?
- б) Могло ли получиться так, что каждый из них решил все задачи сборника ровно за 10 дней?
- в) Какое наименьшее число задач могло быть в сборнике, если известно, что каждый из них решал задачи более 6 дней, в первый день Вася решил больше задач, чем Петя, а за семь дней Петя решил больше задач, чем Вася?

5. (Досрочная волна 10.04.2019)

Склад представляет собой прямоугольный параллелепипед с целыми сторонами, контейнеры – прямоугольные параллелепипеды с размерами $1 \times 1 \times 3$ м. Контейнеры на складе можно класть как угодно, но параллельно границам склада.

- а) Может ли оказаться, что полностью заполнить склад размером 120 кубометров нельзя?
- б) Может ли оказаться, что на склад объемом 100 кубометров не удастся поместить 33 контейнера?
- в) Пусть объем склада равен 800 кубометров. Какой процент объема такого склада удастся гарантировано заполнить контейнерами при любой конфигурации склада?

6. (Досрочная волна 10.04.2019)

Склад имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого выражаются целыми числами. Этот склад заполняют контейнерами размером $1 \times 1 \times 3$. При этом контейнеры можно располагать как угодно, но их грани должны быть параллельны граням склада.

- а) Могло ли получиться так, что склад объёмом 150 невозможно полностью заполнить контейнерами?
- б) Могло ли получиться так, что на складе объёмом 400 невозможно разместить 133 контейнера?
- в) Какой наибольший процент объёма любого склада объёмом не менее 200 гарантированно удастся заполнить контейнерами?

7. (Основная волна, 29.05.2019)

В ящике лежат 68 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 944 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1016 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться ровно 15 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
- в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

8. (Основная волна, 29.05.2019)

В ящике лежат 65 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 982 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1024 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться ровно 13 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
- в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

9. (Основная волна, 29.05.2019)

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждые из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество чисел меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 8. Может ли n быть больше 7?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 4, среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4,5?

в) Известно, что $n = 4$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

10. (Основная волна, 29.05.2019)

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 7. Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 2,5?

в) Известно, что $n = 6$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

11. (Основная волна, 29.05.2019)

Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 26?

б) Может ли сумма всех пяти чисел быть равна 23?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех пяти чисел?

12. (Основная волна, 29.05.2019)

Последовательность натуральных чисел (a_n) состоит из 400 членов. Каждый член последовательности, начиная со второго, либо вдвое больше предыдущего, либо на 98 меньше предыдущего.

- а) Может ли последовательность (a_n) содержать ровно 5 различных чисел?
- б) Чему может равняться a_1 , если $a_{100} = 75$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать наибольший член последовательности (a_n) ?

13. (Основная волна, 29.05.2019)

В ящике лежат 73 овоща, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 988 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1030 г

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться ровно 11 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?
- в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

14. (Основная волна, 29.05.2019)

Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой карточке написано натуральное число. Среднее арифметическое всех чисел равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

- а) Может ли быть 10 синих карточек?
- б) Может ли быть 10 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?

15. (Резервная волна, 24.06.2019)

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

- а) Пусть $q = 34$. Найдите все возможные значения p .
- б) Пусть $p + q = 22$. Найдите все возможные значения q .
- в) Пусть $q^2 - p^2 = 2812$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

16. (Резервная волна, 24.06.2019)

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

- а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p .
- б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q .
- в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

17. (Резервная волна, 24.06.2019)

Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму – целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма – это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел a_1, \dots, a_n равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$. Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов – различные целые числа.

- а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?
- б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?
- в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

ОТВЕТЫ

1. а) да; б) нет; в) 84.
2. а) да; б) нет; в) 14.
3. а) да; б) да; в) 72.
4. а) да; б) нет; в) 72.
5. а) нет; б) да; в) 99%.
6. а) нет; б) да; в) 96%.
7. а) нет; б) нет; в) 229.
8. а) нет; б) нет; в) 387.
9. а) нет; б) да; в) 14.
10. а) нет; б) да; в) 33.
11. а) да; б) нет; в) 18.
12. а) да, б) 9777, в) 112.
13. а) нет; б) нет; в) 449.
14. а) да, б) нет, в) 35.
15. а) -35 , -19 ; б) 48; в) 4 и 14.
16. а) -56 , -16 ; б) 64; в) 6 и 8.
17. а) нет; б) да; в) 4.

Экзамен 2020 года

1. (Досрочная волна 27.03.2020)

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел за эти дни?

2. (Досрочная волна 27.03.2020) В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

3. (Основная волна, 10.07.2020)

В наборе 70 гирек массой 1, 2, ..., 70 граммов. Их разложили на две кучки так, что в каждой кучке есть хотя бы одна гирька. Потом из второй кучки переложили одну гирьку в первую кучку. В результате средняя масса гирек в первой кучке увеличилась ровно на один грамм.

а) Могла ли первая кучка (до переукладывания) состоять из гирек с весами 11 г, 15 г, 19 г?

б) Мог ли средний вес гирек в первой кучке до переукладывания равняться 9,5 грамма?

в) Какое максимальное количество гирек могло быть первоначально в первой кучке?

4. (Основная волна, 10.07.2020)

В наборе 100 гирек весом 1, 2, ..., 100 граммов. Их разложили на две кучки, так что в каждой кучке есть хотя бы одна гирька. Потом из второй кучки переложили одну гирьку в первую кучку. В результате средняя масса гирьки в первой кучке увеличилась ровно на один грамм.

а) Могла ли первая кучка (до перекалывания) состоять из гирек с весами 1 г, 5 г, 9 г?

б) Мог ли средний вес гирек в первой кучке до перекалывания равняться 7,5 граммов?

в) Какое максимальное количество гирек могло быть первоначально в первой кучке?

5. (Основная волна, 10.07.2020)

Десять мальчиков и семь девочек пошли в лес за грибами. Известно, что любые две девочки набрали больше грибов, чем любые три мальчика, но любые пять мальчиков набрали больше грибов, чем любые три девочки.

а) Может ли так случиться, что какая-то девочка набрала меньше грибов, чем какой-нибудь мальчик?

б) Может ли так случиться, что количество найденных грибов у всех детей будет различным?

в) Найдите минимальное возможное количество грибов, собранное всеми детьми суммарно.

6. (Основная волна, 10.07.2020)

На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

а) Может ли сумма составлять 282?

б) Может ли их сумма составлять 390?

в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

7. (Основная волна, 10.07.2020)

На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки $+$ и посчитали сумму. Например, если изначально было написано $n = 12$ единиц, то могла получиться, например, такая сумма: $1 + 11 + 11 + 111 + 11 + 1 + 1 = 147$.

- а) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 60$?
- б) Могла ли сумма равняться 150, если $n = 80$?
- в) Чему могло равняться n , если полученная сумма чисел равна 150?

8. (Основная волна, 10.07.2020)

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 6, к каждому числу из второй группы приписали справа цифру 9, а числа третьей группы оставили без изменений.

- а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 9 раз?
- б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?
- в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

9. (Резервная волна, 25.07.2020)

По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы 2 мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа одну третью или одну четвертую своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек – одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

- а) Возможно ли, чтобы мальчиков было столько же, сколько и девочек?
- б) Могло ли быть ровно 4 мальчика?
- в) Могло ли быть ровно 10 мальчиков?

10. (Резервная волна, 25.07.2020) По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы 2 мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое количество конфет, а у любых двух девочек

– разное. По команде каждый отдал соседу справа одну третью или одну четвертую своих конфет. После этого у любых двух мальчиков стало разное количество конфет, а у любых двух девочек – одинаковое. Известно, что каждый отдал натуральное число конфет.

- а) Возможно ли, чтобы мальчиков было столько же, сколько и девочек?
- б) Могло ли быть ровно 5 мальчика?
- в) Могло ли быть ровно 9 мальчиков?

11. (Резервная волна, 25.07.2020)

- а) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 17?
- б) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 54?
- в) Какое наименьшее значение принимает дискриминант D квадратного трехчлена $x^2 + (3m + n)x + (3n + m)$ если известно, что числа m , n и D – натуральные?

12. (Резервная волна, 25.07.2020)

По кругу стоят несколько детей, среди которых есть хотя бы два мальчика и хотя бы две девочки. У каждого из детей есть натуральное число конфет. У любых двух мальчиков одинаковое число конфет, а у любых двух девочек – разное. По команде каждый отдал соседу справа четверть своих конфет. После этого у любых двух девочек оказалось одинаковое число конфет, а у любых двух мальчиков – разное. Известно, что каждый из детей отдал натуральное число конфет.

- а) Может ли мальчиков быть ровно столько же, сколько девочек?
- б) Может ли мальчиков быть больше, чем девочек?
- в) Пусть девочек вдвое больше, чем мальчиков. Может ли у всех детей суммарно быть 328 конфет?

Ответы

1. а) да, б) да, в) 48.
2. а) да, б) да, в) 34.
3. а) нет, б) нет, в) 45.
4. а) нет, б) нет, в) 65.
5. а) нет, б) да, в) 106.
6. а) да, б) нет, в) 9.
7. а) да, б) нет, в) 150, 141, 132, 123, 114, 105, 96, 87, 78, 69, 60, 51, 42, 33, 24, 15.
8. а) да, б) нет, в) в 11,6 раза.
9. а) да, б) да, в) нет.
10. а) да, б) да, в) нет.
11. а) да, б) нет, в) 5.
12. а) да, б) нет, в) да.

Экзамен 2021 года

1. (Досрочная волна 29.04.2021)

В последовательности из 80 целых чисел каждое число (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних чисел. Первый и последний члены последовательности равны 0.

- а) Может ли второй член такой последовательности быть отрицательным?
- б) Может ли второй член такой последовательности быть равным 20?
- в) Найдите наименьшее значение второго члена такой последовательности.

2. (Основная волна 07.06.2021)

Даны три различных натуральных числа такие, что второе число равно сумме цифр первого, а третье – сумме цифр второго.

- а) Может ли сумма трех чисел быть равной 420?
- б) Может ли сумма трех чисел быть равной 419?
- в) Сколько существует троек чисел, таких что: первое число – трехзначное, а последнее равно 5?

3. (Основная волна 07.06.2021)

Даны три различных натуральных числа такие, что второе число равно сумме цифр первого, а третье – сумме цифр второго.

- а) Может ли сумма трех чисел быть равной 2022?
- б) Может ли сумма трех чисел быть равной 2021?
- в) Сколько существует троек чисел, таких что первое число трехзначное, а последнее равно 2?

4. (Основная волна 07.06.2021)

Дано трёхзначное число A , сумма цифр которого равна S .

- а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 28000$?
- б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2971$?
- в) Найдите наибольшее произведение $A \cdot S < 5997$.

5. (Основная волна 07.06.2021)

Дано трёхзначное число A , сумма цифр которого равна S .

- а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1105$?
- б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 1106$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $A \cdot S$, если оно больше 1503?

6. (Основная волна 07.06.2021)

Трёхзначные натуральные числа делят на сумму их цифр. Известно, что полученное частное – целое число.

- а) Может ли получиться 13?
- б) Может ли получиться 6?
- в) Какое наибольшее частное может получиться, если число не делится на 100, а его первая цифра равна 6?

7. (Основная волна 07.06.2021)

Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.

- а) Может ли это отношение быть равным 11?
- б) Может ли это отношение быть равным 5?
- в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

8. (Основная волна 07.06.2021)

Трёхзначные натуральные числа делят на сумму их цифр. Известно, что полученное частное – целое число.

- а) Может ли получиться 55?
- б) Может ли получиться 87?
- в) Найдите наименьшее возможное частное, если число не делится на 100, а его первая цифра равна 7?

9. (Резервная волна 29.06.2021)

Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трёхзначных натуральных чисел равен 128. Известно, что в прогрессии не меньше трех чисел.

- а) Может ли число 686 являться членом такой прогрессии?

- б) Может ли число 496 являться членом такой прогрессии?
- в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

10. (Резервная волна 29.06.2021)

Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из трехзначных натуральных чисел, равен 272. Известно, что в прогрессии не меньше трех чисел.

- а) Может ли число 425 являться членом такой прогрессии?
- б) Может ли число 680 являться членом такой прогрессии?
- в) Какое наибольшее число может являться членом такой прогрессии?

ОТВЕТЫ

1. а) нет; б) нет; в) 39.
2. а) да, б) нет, в) 85.
3. а) да, б) нет, в) 97.
4. а) нет, б) нет, в) 5992.
5. а) да, б) нет, в) 1507.
6. а) да, б) нет, в) 70.
7. а) да, б) нет, в) 80.
8. а) да, б) нет, в) 37.
9. а) да, б) нет, в) 972.
10. а) да, б) нет, в) 918.

Математик МГУ

Экзамен 2022 года

1. (Досрочная волна 28.03.2022)

Каждое из четырёх подряд идущих натуральных чисел разделили на их первые цифры и результаты сложили в сумму S .

а) Может ли быть $S = 41\frac{11}{24}$?

б) Может ли быть $S = 569\frac{29}{72}$?

в) Найдите наибольшее целое S , если все четыре числа лежат в отрезке от 400 до 999 включительно.

2. (Досрочная волна 28.03.2022)

Даны четыре последовательных натуральных числа. Каждое из чисел поделили на одну из его цифр, не равную нулю, а затем четыре полученных результата сложили.

а) Может ли полученная сумма равняться 386?

б) Может ли полученная сумма равняться 9,125?

в) Какое наибольшее целое значение может принимать полученная сумма, если известно, что каждое из исходных чисел не меньше 200 и не больше 699?

3. (Досрочная волна 28.03.2022)

Каждое из четырех последовательных натуральных чисел, последняя цифра которых не равна нулю, разделили на его последнюю цифру. Полученные результаты сложили и назвали S .

а) Может ли быть $S = 16\frac{5}{6}$?

б) Может ли быть $S = 369\frac{29}{126}$?

в) Какое наибольшее целое значение может принимать полученная сумма, если известно, что все четыре числа были трехзначными?

4. (Основная волна 02.06.2022)

По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 425. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.

- а) Может ли N быть равным 280?
- б) Может ли N быть равным 149?
- в) Найдите наибольшее значение N .

5. (Основная волна 02.06.2022)

Есть четыре коробки: в первой коробке 101 камень, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой – 4?
- б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 306 камней?
- в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

6. (Основная волна 02.06.2022)

Есть четыре коробки: в первой коробке 121 камень, во второй – 122, в третьей – 123, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 121 камень, во второй – 122, в третьей – 119, а в четвёртой – 4?
- б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 366 камней?
- в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

7. (Основная волна 02.06.2022)

Имеются три коробки: в первой – 97 камней, во второй – 104 камня, в третьей пусто. За один ход разрешается взять по камню из двух коробок и положить в оставшуюся.

- а) Может ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 89, в третьей – 15?
- б) Может ли в третьей коробке оказаться 201 камень?
- в) Известно, что в первой коробке 1 камень. Найдите наибольшее возможное количество камней в третьей коробке.

8. (Основная волна 02.06.2022)

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

- а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
- б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
- в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

9. (Основная волна 02.06.2022)

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

- а) Могло ли в результате такой операции получиться число 201?
- б) Могло ли в результате такой операции получиться число 251?
- в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

10. (Основная волна 02.06.2022)

На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 99. Для любых двух написанных на доске чисел a и b , таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$, и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

- а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 18, 19 и 20?
- б) Среди написанных на доске чисел есть 17. Может ли N быть равно 25?
- в) Найдите наибольшее значение N .

11. (Основная волна 02.06.2022)

На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 159. Для любых двух написанных на доске чисел a и b , таких, что $a < b$, ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$, и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

- а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 28, 29 и 30 ?
- б) Среди написанных на доске чисел есть 13. Может ли N быть равно 20?
- в) Найдите наибольшее значение N .

12. (Основная волна 02.06.2022)

На доске написано N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 27. Для каждых двух написанных чисел a и b таких, что $a < b$ ни одно из написанных чисел не делится на $b - a$ и ни одно из написанных чисел не является делителем числа $b - a$.

- а) Могли ли на доске быть написаны какие-то два числа из чисел 4, 5, 6?
- б) Среди написанных на доске чисел есть 5. Может ли N быть равным 7?
- в) Найдите наибольшее значение N .

13. (Резервная волна 27.06.2022)

У ювелира есть 38 полудрагоценных камней, масса каждого из которых – целое число граммов, не меньше 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трем кучам: в первой куче n_1 камней, во второй – n_2 камней, в третьей – n_3 камней, причем $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1 , во второй – S_2 , а в третьей – S_3

- а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?
- б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 108 граммов?
- в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$

14. (Резервная волна 27.06.2022)

У ювелира есть 47 полудрагоценных камней, масса каждого из которых – целое число граммов, не меньше 100 (некоторые камни могут иметь равную массу). Эти камни распределили по трем кучам: в первой куче n_1 камней, во второй – n_2 камней, в третьей

– n_3 камней, причем $n_1 < n_2 < n_3$. Суммарная масса (в граммах) камней в первой куче равна S_1 , во второй – S_2 , а в третьей – S_3 .

- а) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$?
- б) Может ли выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$, если масса любого камня не превосходит 105 граммов?
- в) Известно, что масса любого камня не превосходит k граммов. Найдите наименьшее целое значение k , для которого может выполняться неравенство $S_1 > S_2 > S_3$.

15. (Резервная волна 27.06.2022)

На доске написано несколько различных натуральных чисел. Дробная часть среднего арифметического этих чисел равна 0,32 (то есть если вычесть из среднего арифметического этих чисел 0,32, то получится целое число).

- а) Могло ли на доске быть написано меньше 100 чисел?
- б) Могло ли на доске быть написано меньше 20 чисел?
- в) Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического этих чисел.

Ответы

1. а) да; б) нет; в) 478.
2. а) да; б) нет; в) 2470.
3. а) да; б) нет; в) 2004.
4. а) нет; б) нет; в) 212.
5. а) да; б) нет; в) 303.
6. а) да; б) нет; в) 363.
7. а) да; б) нет; в) 198.
8. а) да; б) нет; в) 51.
9. а) да; б) нет; в) 40.
10. а) нет; б) нет; в) 33.
11. а) нет; б) нет; в) 53.
12. а) нет; б) нет; в) 9.
13. а) да; б) нет; в) 128.
14. а) да; б) нет; в) 122.
15. а) да; б) нет; в) 13,32.

Экзамен 2023 года

1. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дано натуральное число. К этому числу можно либо прибавить утроенную сумму его цифр, либо вычесть утроенную сумму его цифр. После прибавления или вычитания суммы цифр, число должно остаться натуральным.

- а) Можно ли получить из числа 128 число 29?
- б) Можно ли получить из числа 128 число 31?
- в) Какое наименьшее число можно было получить из числа 128?

2. (Досрочная волна 27.03.2023)

Дано натуральное число, из него либо вычитают утроенную сумму цифр, либо прибавляют утроенную сумму цифр и полученное число должно быть натуральным.

- а) Могло ли из числа 65 получиться число 41?
- б) Могло ли из числа 65 получиться число 43?
- в) Какое наименьшее двузначное число можно получить из 65?

3. (Досрочная волна 27.03.2023)

Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

- а) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см?
- б) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см?
- в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

4. (Досрочная волна 27.03.2023)

У Пети есть монеты номиналом 1, 2, 5 и 10 рублей. Каждого вида монет у него по 100 штук. Цена пирожного в рублях выражается целым числом. Петя хочет купить пирожное без сдачи, но до покупки не знает сколько оно стоит.

- а) Может ли Петя выбрать дома 16 монет так, чтобы купить пирожное стоимостью не более 100 рублей?

б) Может ли Петя выбрать дома 5 монет так, чтобы купить пирожное стоимостью не более 25 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет нужно взять Пете, если известно, что пирожное стоит не более 100 рублей?

5. (Досрочная волна 27.03.2023)

Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

а) Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 32 см на части по 1 см?

б) Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 50 см на части по 1 см?

в) За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

6. (Досрочная волна 19.04.2023)

Трёхзначное натуральное число, в десятичной записи которого нет нулей, разделили на произведение его цифр.

а) Может ли получившееся частное быть равным 5?

б) Может ли получившееся частное быть равным 1?

в) Какое наименьшее значение может принимать это частное?

7. (Основная волна 01.06.2023)

На доске написано трёхзначное число A . Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B , затем Коля записывает число A и зачёркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C .

а) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $A > 140$.

б) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $440 \leq A < 500$.

в) Найдите наибольшее число $A < 900$, для которого выполняется равенство $A = B \cdot C$.

8. (Основная волна 01.06.2023)

На доске написано трёхзначное число A . Серёжа зачёркивает одну цифру и получает двузначное число B , затем Коля записывает число A и зачёркивает одну цифру (возможно ту же, что Серёжа) и получает число C .

- а) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $A > 130$.
- б) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $540 < A \leq 600$.
- в) Найдите наибольшее число A , для которого выполняется равенство $A = B \cdot C$.

9. (Основная волна 01.06.2023)

Даны числа A и B . Из них можно сделать числа $A + 2$ и $B - 1$ или $B + 2$ и $A - 1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

- а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?
- б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?

10. (Основная волна 01.06.2023)

Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару, большее число в которой равно 200?
- б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару $(408; 370)$?
- в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(408; 370)$?

11. (Основная волна 01.06.2023)

Дана правильная несократимая дробь $\frac{a}{b}$. За один ход можно увеличить числитель на знаменатель, а знаменатель на удвоенный числитель, т. е. получить несократимую дробь: $\frac{a+b}{b+2a}$.

- а) Можно ли из дроби $\frac{2}{3}$ получить дробь $\frac{29}{41}$?
- б) Можно ли из некоторой дроби получить дробь $\frac{6}{7}$ за 2 хода?
- в) Дана дробь $\frac{c}{d} > \frac{7}{10}$. Найдите минимальную дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить из другой правильной несократимой дроби за 2 хода.

12. (Основная волна 01.06.2023)

Даны числа A и B . Из них можно сделать числа $A + 2$ и $B - 1$ или $B + 2$ и $A - 1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

- а) Можно ли получить число 200 за 100 ходов?
- б) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить сумму равную 300?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы получить максимальную сумму, но при этом ни одно из чисел не превышало 200?

13. (Основная волна 01.06.2023)

Для чисел A и B , состоящих из одинакового количества цифр, вычислили S – сумму произведений соответствующих цифр. Например, для числа $A = 123$ и $B = 579$ получается сумма $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$.

- а) Существуют ли трёхзначные числа A и B , для которых $S = 100$?
- б) Существуют ли пятизначные числа A и B , для которых $S = 400$?
- в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел A и B ?

14. (Основная волна 01.06.2023)

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21%.

- а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?
- б) Может ли доля девочек составить 30%, если в этот класс придёт новая девочка?
- в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

15. (Основная волна 01.06.2023)

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 36%.

- а) Может ли в этом классе быть 7 девочек?
- б) Может ли доля девочек составить 45%, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

16. (Основная волна 01.06.2023)

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 46%.

а) Может ли в этом классе быть 9 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 55%, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

17. (Основная волна 01.06.2023)

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?

в) Найдите наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

18. (Основная волна 01.06.2023)

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных цифр трехзначное число A . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трех карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно то же самое, что и Петя).

а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A > 150$?

б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 9?

в) Найдите наименьшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

19. (Резервная волна 26.06.2023)

На овощебазу завезли капусту. Каждый из кочанов капусты весит 1, 2 или 3 килограмма. Фермер Иван поехал на овощебазу за капустой. Его сосед Фёдор попросил купить для него столько же капусты (по массе). На овощебазе Ивану составила набор кочанов капусты, суммарная масса которых составила N кг. Нужно разделить эти кочаны поровну (по массе) между Иваном и Федором так, чтобы не пришлось резать кочаны.

а) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 20$, который невозможно разделить поровну?

б) Существует ли набор кочанов суммарной массой $N = 24$, который невозможно разделить поровну?

в) Найдите все значения N , для которых любой набор кочанов суммарной массы N можно разделить поровну.

20. (Резервная волна 26.06.2023)

Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 14 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 22 контейнера массой 2 тонны на 12 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увести за один раз 11 контейнеров массой 7 тонн и 77 контейнеров массой 2 тонны?

21. (Резервная волна 26.06.2023)

Есть контейнеры массой 7 тонн и массой 2 тонны и корабли грузоподъемностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 24 контейнера массой 2 тонны на 15 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 18 контейнера массой 2 тонны на 13 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно увести за один раз 12 контейнеров массой 7 тонн и 45 контейнеров массой 2 тонны?

22. (Резервная волна 01.07.2023)

Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения p , если $q = 5$.

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $p < 10$ и $q > 30$?

в) Найдите наименьшее значение p при $q > 30$.

23. (Резервная волна 01.07.2023)

Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения p , если $q = 13$.

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $p < 8$ и $q > 20$?

в) Найдите наименьшее значение p при $q > 20$.

24. (Резервная волна 01.07.2023)

Квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$ с натуральными коэффициентами p и q имеет два натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения p , если $q = 11$.

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $p > 100$ и $q < 20$?

в) Найдите наибольшее значение $(p + q)$ при $p < 20$ и $q < 20$.

ОТВЕТЫ

1. а) да; б) нет; в) 2.
2. а) да, б) нет, в) 11.
3. а) да; б) нет; в) за 9 ходов.
4. а) да; б) нет; в) 13 монет.
5. а) да; б) нет; в) за 9 ходов.
6. а) да; б) нет; в) $\frac{37}{27}$.
7. а) да; б) нет; в) 810.
8. а) да; б) нет; в) 910.
9. а) нет; б) 582; в) 81.
10. а) да; б) нет; в) 204.
11. а) да; б) нет; в) $\frac{5}{7}$.
12. а) нет; б) 291; в) 390.
13. а) да; б) нет; в) да.
14. а) да, б) нет, в) 25.
15. а) да, б) нет, в) 40.
16. а) да, б) нет, в) 50.
17. а) да; б) нет; в) 189.
18. а) да; б) нет; в) 109.
19. а) да; б) нет; в) N кратно 12.
20. а) да; б) нет; в) 25.
21. а) да; б) нет; в) 19.
22. а) 6; б) нет; в) 12.
23. а) 14; б) нет; в) 10.

24. а) 12; б) нет; в) 37.

Ну а теперь? Точно всё?
Всё – вперед за максимально высокими баллами!
Я верю в каждого из вас!!!
Делитесь своими успехами!

