МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА. 10 КЛАСС

Условная вероятность

Цель блока — повторение материала курса «Вероятность и статистика», пройденного в 7 – 9 классах, или первичное изучение материала. Основное содержание — условная вероятность, формула полной вероятности и независимые случайные события.

Используемая литература

1. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2014. — 248 с.

Условная вероятность. Формула умножения вероятностей и последовательный выбор. Ошибка игрока

Часто случайное событие A в случайном опыте приходится рассматривать при условии, что произошло некоторое другое событие B. Наступление события B меняет эксперимент. При его наступлении мы получаем новый эксперимент, и вероятности других событий при этом могут измениться. Вероятность события A может вырасти, уменьшиться или остаться прежней.

Пример 1. Было бы справедливо, если бы автомобильный страховой полис стоил тем дороже, чем выше вероятность страхового случая для данного водителя. Приблизительная вероятность страхового случая известна. Как изменится вероятность аварии и, стало быть, цена страховки при условии, что водитель имеет малый водительский стаж? А если водитель имеет хороший стаж и за всё время ни разу не попадал в ДТП?

Желательный результат обсуждения. Если за рулём неопытный водитель, можно сказать, что вероятность аварии выше. То есть, наступление события «За рулём неопытный водитель» меняет вероятность события «наступление страхового случая», а именно – увеличивает эту вероятность.

Если водитель опытный и ни разу не попадал в ДТП – это говорит о том, что он аккуратен, значит наступление события «за рулём опытный водитель» может уменьшить вероятность страхового случая.

Пример 2. В семье двое детей.

а) Какова вероятность того, что в семье оба ребёнка — мальчики?

б) Известно, что один из них — мальчик. Какова вероятность того, что другой ребёнок тоже мальчик?

Считайте, что рождение мальчика и рождение девочки равновозможны.

Желательный результат обсуждения. В случае (а) элементарных исходов четыре: ММ, МД, ДМ, ДД. Вероятность рождения двух мальчиков равна $1/4$.

В пункте (б) спрашивается тоже вероятность рождения двух мальчиков. Но отличие состоит в том, что вероятность надо найти, исходя из условия: один из детей — мальчик. Элементарных событий уже не четыре, а три: ММ, МД и ДМ. И искомая вероятность события ММ равна $1/3$, а это больше, чем $1/4$.

Вероятность того, что в семье два мальчика при условии, что один ребёнок — мальчик, отличается от вероятности такого же события «два мальчика», которое рассматривается без условий. Условие «один из детей — мальчик» увеличило вероятность двух мальчиков.

Вероятность наступления события при условии, что какое-то событие заведомо наступило, называется ***условной вероятностью***.

Пример 3. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятности событий:

а) «сумма очков кратна 3, и во второй раз выпало хотя бы 5 очков»;

б) «сумма очков кратна 3», если известно, что во второй раз выпало хотя бы 5 очков.

Желательный результат обсуждения.

Введём обозначения для событий: A «сумма очков кратна 3» и B «во второй раз выпало хотя бы 5 очков».

В пункте (а) нужно найти вероятность пересечения событий A и B. Благоприятствующих исходов всего $N(A \cap B) = 4$ (см. рис. 1), поэтому $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

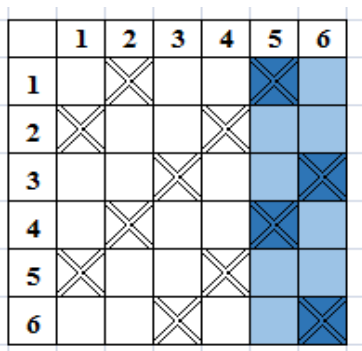


Рис. 1. Пересечение событий A и B

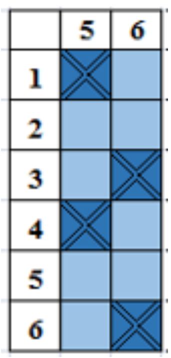


Рис. 2

В пункте (б) нужно найти вероятность события A при условии, что событие B произошло. Обозначим такое событие $A|B$. Если событие B наступило, то от всего эксперимента осталось 12 элементарных событий. Событию A из них благоприятствуют всего четыре (см. рис. 2). Поэтому

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Определение. Вероятность события A при условии, что наступило событие B, называется ***условной вероятностью*** события A при условии B. Обозначается эта вероятность $\mathrm{P}(A|B)$.

Чтобы понять, чем отличается безусловная вероятность от условной, проиллюстрируйте эксперименты на диаграммах Эйлера (рис. 3).

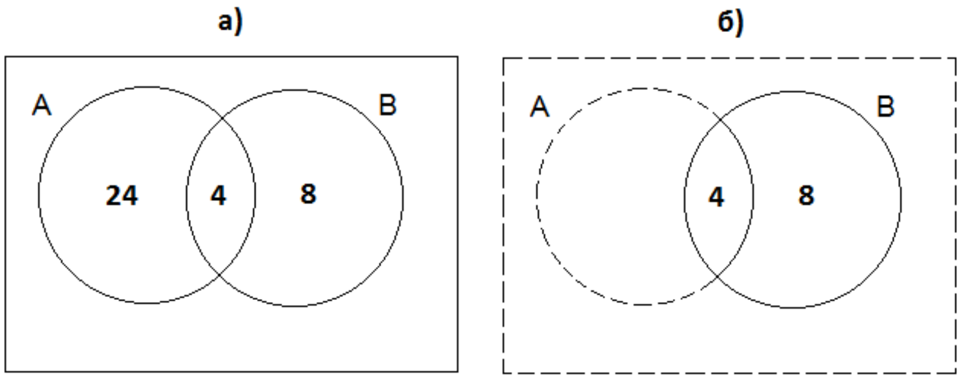


Рис. 3

В пункте (а) мы находим вероятность события, исходя из того, что всего элементарных событий 36 (см. рис. 3а). Когда же нас просят найти условную вероятность, эксперимент уже другой — он сводится к событию B (рис. 3б), и нужно найти долю благоприятных исходов уже не среди всех 36 элементарных событий, а лишь среди 12, благоприятствующих событию B.

Пример 4. В некотором городе четвёртую часть населения составляют дети и подростки. Среди взрослых жителей треть не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города — взрослый работающий человек?

Желательный результат обсуждения. Искомая вероятность равна доле взрослых работников среди всего населения города. Из условия ясно, что взрослые составляют $3/4$ населения города, и $2/3$ из них работают. Значит, $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ населения — взрослые работающие люди. Искомая вероятность равна $0{,}5$.

Предложите учащимся посмотреть на задачу с другой стороны. Пусть событие A «выбранный горожанин работает», и событие B «выбранный горожанин — взрослый». Из условия следует, что доля взрослого населения $3/4$ и есть вероятность $\mathrm{P}(B)$. А $2/3$ — доля работающих среди взрослого населения — есть условная вероятность $\mathrm{P}(A|B)$. А вероятность одновременного наступления событий A и B равна произведению вероятностей, то есть: $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)$.

Правило умножения вероятностей. Вероятность пересечения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B).$$

Из полученного равенства можно выразить условную вероятность.

Формула условной вероятности. Вероятность наступления события A при условии, что B наступило, равна отношению вероятности одновременного наступления этих событий и вероятности наступившего события B:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Доказательство этого утверждения приведено на с. 51 учебника [1].

Важно! Эта формула верна, если вероятность события B не равна нулю.

Эти формулы мы получили на примере, но они верны для любых случайных событий в любых случайных опытах.

Пример 5. В торговом центре установлены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна 0,3. В обоих автоматах кофе заканчивается к вечеру с вероятностью 0,21. Вечером пришел мастер, чтобы обслужить автоматы, и обнаружил, что в первом кофе закончился. Какова теперь вероятность того, что во втором автомате кофе тоже закончился?
Желательный результат обсуждения. Введём обозначения событий: A «кофе закончился в первом автомате» и B «кофе закончился во втором автомате». Во всех четырёх областях диаграммы подпишем вероятности соответствующих событий (рис. 6).

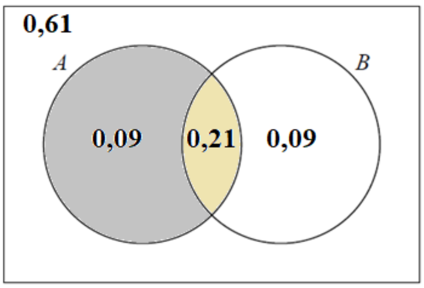


Рис. 6

Нужно найти вероятность события B при условии, что событие A наступило, то есть $\mathrm{P}(B|A)$. Вероятность события A равна 0,3. Из этой вероятности 0,21 приходится на случай, когда наступило ещё и событие B. Поэтому

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7.$$

Обсудите с учащимися это. Можно ли сказать, что событие B при условии A стало более вероятным, чем было до того, как мы узнали, что событие A произошло? Почему такое произошло?

Действительно, если в одном автомате кофе закончился, то все жаждущие кофе направились ко второму автомату. Нагрузка на него значительно возросла, и весьма вероятно, что кофе скоро закончится и в нём тоже.

Пример 6. В некотором опыте произошло событие B. Может ли это увеличить вероятность другого события? Уменьшить вероятность другого события? Приведите примеры, когда условная вероятность события больше и когда она меньше исходной вероятности этого события.

Желательный результат обсуждения. Самые простые примеры можно привести с помощью бросания монеты или игральной кости. Например, при двукратном бросании монеты событие «хотя бы раз выпал орёл» имеет вероятность 0,75.

Но если известно, что при первом броске выпал орёл, то вероятность этого события увеличивается до 1. Напротив, если в первый раз выпала решка, то событие «хотя бы раз выпал орёл» становится менее вероятным: вероятность уменьшается до 0,5.

Если же события относятся к разным броскам, то они не влияют друг на друга. Например, событие «в первый раз выпал орёл» и «во второй раз выпала решка» не влияют друг на друга: наступление одного из них не влияет на вероятность другого.

Иногда сложный случайный эксперимент представляет собой череду последовательных случайных опытов, причём вероятности событий в этих опытах зависят от исхода предыдущих опытов. Тут мы также имеем дело с условной вероятностью. Рассмотрим пример.

Пример 7. В коробке 5 красных и 5 синих карандашей. По очереди из коробки извлекают два случайных карандаша. Найдите вероятность того, что сначала появится синий, а затем — красный карандаш.

Желательный результат обсуждения. Вначале красных и синих карандашей в коробке поровну, поэтому вероятность извлечь первым синий карандаш (событие A) равна $1/2$. После того, как это случилось, в коробке осталось 9 карандашей, и 5 из них — красные. Поэтому теперь вероятность вторым извлечь красный карандаш (событие B) равна $5/9$. Заметьте, мы здесь не вычисляли условную вероятность, а нашли ее из соображений равновозможности. Искомая вероятность, в соответствии с правилом умножения, равна

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18} \approx 0,278.$$

Удобно изобразить эксперимент с помощью **дерева**.

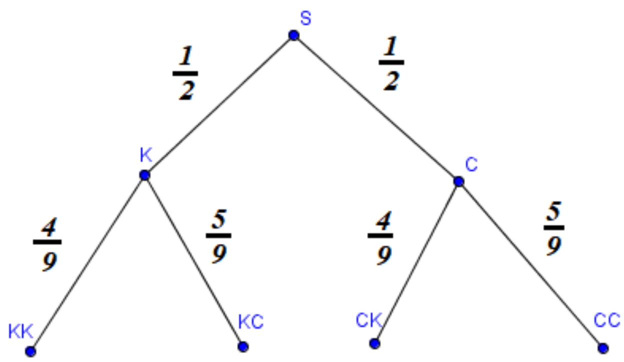


Рис. 7

Предположим, что для эксперимента удалось построить дерево вероятностей и понять, каковы условные вероятности переходов между состояниями. Тогда **вероятности сложных событий можно найти умножением условных вероятностей вдоль соответствующих цепочек рёбер**. Именно эту возможность предоставляет полученная формула умножения вероятностей.

Правило произведения можно применять и тогда, когда событие состоит из более чем двух этапов.

Пример 8. На кассе универсама продаются леденцы. В какой-то момент в коробке осталось 10 красных, 9 синих и 6 зелёных леденцов. Таня, Ваня и Маша по очереди именно в таком порядке покупают по одному леденцу. Кассир, не глядя, достает леденцы из коробки. Найдите вероятность того, что:

а) Таня и Ваня получат зелёные, а Аня — красный леденец;
б) Таня и Аня получат синие, а Ваня — красный;
в) Таня получит зелёный, Ваня — красный, а Аня — синий;
г) все трое получат красные леденцы.

Желательный результат обсуждения. Решим пункт (а). Введём обозначение событий: A «Таня получила зелёный леденец», B «Ваня получил зелёный леденец» и C «Аня получила красный леденец». Первой леденец покупает Таня. Вероятность того, что при этом ей достанется зелёный леденец, равна $\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{25}$. Вторым леденец покупает Ваня. Вероятность того, что ему тоже достанется зелёный леденец (при условии, что один достался Тане), нужно рассчитывать исходя из того, что у продавца осталось 24 леденца, и только 5 из них зелёные. Таким образом $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{24}$. Найдем вероятность события «Таня и Ваня получат зеленые леденцы» по формуле:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}=\frac{1}{20}.$$

Если известно, что $A\cap B$ произошло, то мы знаем, что у продавца осталось 23 леденца, и 10 из них красные. Поэтому $\mathrm{P}(C|A\cap B)=\dfrac{10}{23}$. Найдём вероятность искомого события $A\cap B\cap C$ по формуле:

$$\mathrm{P}\big((A\cap B)\cap C\big)=\mathrm{P}(A\cap B)\cdot\mathrm{P}(C|A\cap B)=\frac{1}{20}\cdot\frac{10}{23}=\frac{1}{46}.$$

Обсудите с учениками результат. Получается, что для нахождения вероятности такой цепочки событий нужно последовательно умножать их условные вероятности.

Остальные пункты предложите учащимся выполнить самостоятельно.

Ответ: а) $\frac{1}{46}$; б) $\frac{9}{25}\cdot\frac{10}{24}\cdot\frac{8}{23}=\frac{6}{115}$; в) $\frac{6}{25}\cdot\frac{10}{24}\cdot\frac{9}{23}=\frac{9}{230}$; г) $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{8}{23}=\frac{6}{115}$.

Пример 9. Тест по истории сдало 85% учащихся школы, а тест по английскому языку — 70% учащихся. Известно, что тест по английскому языку сдало 77% тех, кто сдал тест по истории. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик из тех, кто сдал тест по английскому, также сдал тест по истории.

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения для событий: A «случайно выбранный ученик сдал тест по английскому», B «случайно выбранный ученик сдал тест по истории». Тогда по условию $\mathrm{P}(A)=0{,}7$, $\mathrm{P}(B)=0{,}85$ и $\mathrm{P}(A\mid B)=0{,}77$. А найти нужно $\mathrm{P}(B\mid A)$.

Из правила умножения следует верность двух равенств:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B) \text{ и } \mathrm{P}(B\cap A)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A).$$

Сравнивая две предыдущие формулы, получаем равенство

$$\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B).$$

Подставляя в это равенство известные значения, находим:

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{0{,}85\cdot0{,}77}{0{,}7}=0{,}935.$$

Пример 10. Нет ничего невероятного или удивительного в том, что хорошо подготовленный школьник ошибётся в несложной задаче, хотя вероятность этого мала. С другой стороны, практически невероятно, что этот школьник допустит какую-нибудь ошибку в пяти простых задачах подряд.

А что, если школьник ошибся в первой же задаче? Изменилась ли вероятность пяти неудач подряд? Да. Эта вероятность стала больше, потому что теперь достаточно ошибиться не пять раз подряд, а только четыре.

Представим себе, что школьник ошибся уже четыре раза. Теперь вероятность пяти неудач стала намного выше. Она теперь равна вероятности одной ошибки. Но нам по-прежнему кажется, что этого не может быть, поскольку мы не можем представить, что хорошо подготовленный школьник ошибётся подряд пять раз.

Конечно, такие случаи крайне редко встречаются. Но если испытания проводятся очень много раз, подобные маловероятные события происходят. Например, во время ЕГЭ, который сдают сотни тысяч выпускников, встречаются хорошо подготовленные учащиеся, случайно давшие неверный ответ на пять-семь простых заданий подряд. Их очень-очень мало, но несколько человек на всю страну вполне может быть.

Опыт показывает, что люди часто путают вероятность пересечения событий A и B и условную вероятность события B при условии A. Чтобы разобраться в этом, воспользуемся опытом с двукратным бросанием игральной кости. Пусть событие А состоит в том, что выпало две шестёрки, а событие В – в том, что в первый раз выпала шестёрка. Мы знаем, что $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{36}$ и $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$.

Событие $A\cap B$ совпадает с событием A, поэтому $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$.

Если же мы знаем, что событие В уже осуществилось, то теперь для наступления события А достаточно, чтобы шестёрка выпала еще только один раз. Вероятность этому $\frac{1}{6}$. Поэтому $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{1}{6}$.

Формула условной вероятности даёт такой же результат:

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{36}:\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Пример 11 (Ошибка игрока). В предыдущем примере речь шла о том, как может подвести вероятностная интуиция, когда требуется переоценка вероятности в соответствии с изменившимися обстоятельствами.

Вот ещё замечательный пример похожего заблуждения. В ошибку впадает знаменитый автор детективов Эдгар Аллан По в своём рассказе «Тайна Мари Роже».

В эпилоге есть рассуждение о теории вероятностей, которое автор вкладывает в уста своего главного героя Огюста Дюпена:

«*Например, обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестёрки делает почти невероятным выпадение её в третий раз и даёт все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий ещё пока только в будущем. Возможность выпадения шестёрки кажется точно такой же, как и в любом случае, — то есть зависящей только от того, как именно будет брошена кость. И это представляется настолько очевидным, что всякое возражение обычно встречается насмешливой улыбкой, а отнюдь не выслушивается с почтительным вниманием. Суть скрытой тут ошибки — грубейшей ошибки — я не могу объяснить в пределах места, предоставленного мне здесь, а людям, искушённым в философии, никакого объяснения и не потребуется*».

Неудивительно, что Эдгар По не может объяснить «суть ошибки» в пределах предоставленного места. Вряд ли её можно объяснить и более пространно. Разберёмся в этой парадоксальной ситуации. По считает, что выпадение трёх шестёрок подряд — очень маловероятное событие, а поэтому выпадение двух шестёрок подряд делает третью шестёрку практически невозможной.

Рассмотрим два события:

$A_2 = \{$*два раза подряд выпала шестёрка*$\}$;

$A_3 = \{$*три раза подряд выпала шестёрка*$\}$.

Рассмотрим эксперимент, в котором нам уже известно, что две шестерки выпали. Вероятность этого события $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{36}$. Тогда вероятность трёх шестёрок подряд становится условной вероятностью события A_3, при условии, что две шестёрки уже выпали:

$$\mathrm{P}(A_3 \mid A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_2)} = \frac{\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(A_2)} = \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

Иными словами, теперь мы имеем дело с вероятностью выпадения одной последней шестёрки, а это вполне вероятное событие.

Скорее всего, Эдгар По не принял во внимание то, что выпадение двух шестёрок подряд меняет условия эксперимента. Ошибку По можно пояснить совсем просто: предположим, что рядом с игровым столом находятся двое зрителей. Первый отвлёкся и вернулся к игре, когда выпали уже три шестёрки подряд. Он, конечно, удивлён — ведь для него вероятность этого события равна $\frac{1}{216}$. Второй зритель не отвлекался и видел, как выпали две первые шестёрки. Тогда третья шестёрка его уже не сильно удивляет — для него вероятность трёх шестёрок сначала выросла до $\frac{1}{36}$, а потом до $\frac{1}{6}$. Эта ситуация может показаться парадоксальной только в том случае, если мы почему-то считаем, что вероятность трёх шестёрок не меняется по мере изменения условий. Но это, как мы теперь понимаем, неверно: условная вероятность события может значительно меняться в зависимости от того, какие события уже наступили в ходе эксперимента.

Задачи для уроков

Учебник [1], с. 54, упр. 141–144.

Упражнения

141. В эксперименте бросают одну игральную кость. Найдите вероятность события:

а) выпало больше трёх очков, если известно, что выпало чётное число;

б) выпало число пять, если известно, что выпало нечётное число;

в) выпало число, кратное 3, если известно, что выпало чётное число.

142. В эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что:

а) в сумме выпало больше десяти очков, если известно, что в первый раз выпало чётное число;

б) в сумме выпало больше девяти очков, если известно, что оба раза выпало одно и то же;

в) в сумме выпало менее пяти очков, если известно, что во второй раз выпало либо два, либо три.

143. Известно, что в некотором эксперименте возможны события A и B.

а) Найдите $P(A|B)$, если $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}35$, $P(B|A) = 0{,}8$.

б) Найдите $P(B)$, если $P(A) = 0{,}4$, $P(A|B) = 0{,}56$, $P(B|A) = 0{,}7$.

144. Бросают три различные монеты. Известно, что по меньшей мере одна из них выпала орлом вверх. Найдите условную вероятность того, что:

а) орёл выпал ровно на двух монетах;

б) орёл выпал больше чем на одной монете.

Учебник [1], с. 56, упр. 148-150

148. В эксперименте бросают две игральные кости. Известно, что сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события:

а) на первой кости выпало меньше трёх очков;

б) на второй кости выпало больше четырёх очков.

149. Монету бросают пять раз. Известно, что ровно три раза выпал орёл. Найдите вероятность того, что:

а) в первый раз выпал орёл; б) во второй раз выпал орёл;

в) орёл выпал во второй и в пятый раз.

150. Клещ переносит заболевание П., опасное для собак. Известно, что среди собак, которых укусил клещ, заболевают только 3%. Если собаку укусил клещ, хозяевам рекомендуют сделать анализ крови, который у здоровой собаки в 98% случаев показывает отсутствие заболевания П. Известно, что 4% всех анализов положительные, то есть показывают наличие заболевания. Найдите вероятность того, что в случае положительного анализа на самом деле собака здорова.

Дополнительные задания

1. Тест по обществознанию сдали 90% учащихся школы, а тест по химии сдали 75% учащихся. При этом известно, что тест по химии сдали 63% тех, кто сдал тест по обществознанию. Найдите вероятность того, что ученик, случайно выбранный из тех, кто сдал тест по химии, также сдал тест по обществознанию.

Ответ: 0,756.

2. В первом классе 19 мальчиков и 12 девочек. Выбирают случайным образом двух учащихся. Какова вероятность, что:

а) вторым выбранным учеником окажется мальчик;

б) вторым окажется мальчик, если известно, что сначала выбрали девочку;
в) вторым выбрали мальчика, если известно, что сначала выбрали мальчика.
Какая из найденных вероятностей самая большая и самая маленькая?

Ответ: а) $\frac{19}{31}$; б) $\frac{19}{30}$; в) $\frac{18}{30}$; самая большая вероятность (б), а самая маленькая — (в).

3. В детском саду 36% детей не любят манную кашу, а 48% детей не любят суп. Среди детей, не любящих манную кашу, 80% не любят суп. Найдите вероятность того, что воспитанник, случайно выбранный из тех, кто не любит суп, не любит манную кашу тоже.
Ответ: 0,6

4. В коробке 25 фломастеров, три из них высохли и не пишут. Маша наугад берёт два фломастера из коробки. Найдите вероятность того, что:

а) ровно один из выбранных фломастеров пишет;

б) хотя бы один из выбранных фломастеров пишет.

Ответ: а) 0,22; б) 0,99.

Формула полной вероятности

Пример 12. В группе 3 мальчика и 5 девочек. Случайным образом выбирают двух человек. Какова вероятность того, что будут выбраны один мальчик и одна девочка?

Желательный результат обсуждения. Мысленно разобьем одновременный выбор двоих на два последовательных выбора и изобразим дерево случайного опыта. Выбор мальчика обозначим буквой М, а девочки – Д. При первом выборе вероятность выбрать мальчика равна $\frac{3}{8}$, а девочку – $\frac{5}{8}$. Укажем эти вероятности около рёбер SМ и SД (см. рис. 8).

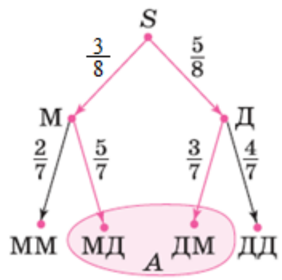


Рис. 8

При втором выборе вероятности мальчика и девочки становятся условными и зависят от того, кто был выбран в первый раз. Если в первый раз был выбран мальчик, то мальчиков осталось 2 из 7 человек. Поэтому во второй раз мальчик будет выбран (ребро М – ММ) с вероятностью $2/7$, а девочка будет выбрана (М – МД) с вероятностью $5/7$.

Точно так же, если в первый раз была выбрана девочка, то остаётся 4 девочки и 3 мальчика из 7 оставшихся детей. Вероятности выбора мальчика и девочки теперь $3/7$ и $4/7$ соответственно.

Ранее изучалось, что вероятности сложных событий можно найти умножением условных вероятностей вдоль соответствующих цепочек рёбер.

Событие А состоит из двух таких событий, поэтому для нахождения вероятности этого события мы складываем вероятности каждой цепочки в соответствии с правилом сложения вероятностей для несовместных событий.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(S-\text{М}-\text{МД})+\mathrm{P}(S-\text{Д}-\text{ДМ})=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{28}.$$

Полученное равенство также можно записать в виде формулы:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(M)\cdot\mathrm{P}(A\,|\,M)+\mathrm{P}(Д)\cdot\mathrm{P}(A\,|\,Д).$$

Это равенство называется **формулой полной вероятности.** Рассмотрим ее в общем виде.

Разобьём множество всех элементарных событий эксперимента на непересекающиеся подмножества B_1, B_2, B_3, ..., B_n (см. рис. 9).

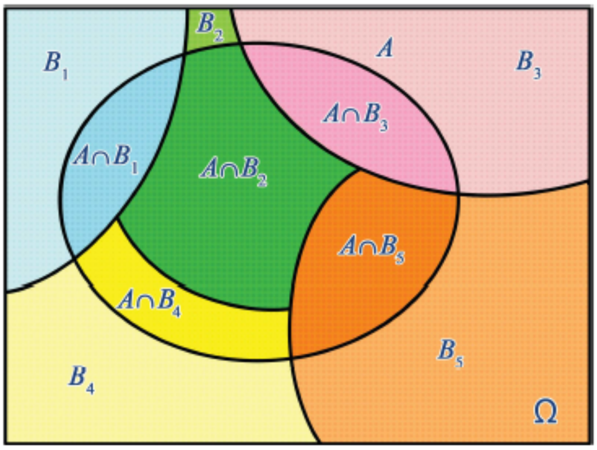


Рис. 9. Множество Ω разбито на пять непересекающихся событий

Если нас интересует некоторое событие A, то можно записать очевидное равенство: $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$.

Выразив вероятности пересечений через условные вероятности события A, получим ***формулу полной вероятности:***

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A | B_n) \cdot P(B_n).$$

Пример 13. В некотором городе 4% выпускников оканчивают специализированные школы, остальные — общеобразовательные. Результаты показали, что 60 баллов и выше на ЕГЭ по математике получили 35% выпускников общеобразовательных школ и 74% выпускников специализированных школ. Найти вероятность события

$$A = \left\{ \begin{matrix} \textit{случайный выпускник в городе получит на} \\ \textit{ЕГЭ по математике не менее } 60 \textit{ баллов} \end{matrix} \right\}.$$

Желательный результат обсуждения. Определим эксперимент как выбор случайного выпускника. Тогда каждый выпускник представляет собой элементарное событие в этом эксперименте. Определим два события:

$$B_1 = \{\textit{выпускник оканчивает специализированную школу}\}$$

и

$$B_2 = \{\textit{выпускник оканчивает общеобразовательную школу}\}.$$

Эти два события несовместны и в совокупности покрывают всё множество элементарных исходов.

Из условия следует, что $P(B_1) = 0{,}04$; $P(B_2) = 0{,}96$.

Вероятность события $A = \{\textit{выпускник получит не менее } 60 \textit{ баллов}\}$ найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2).$$

По известным результатам работы имеем вероятности:

$$P(A | B_1) = 0{,}74; \; P(A | B_2) = 0{,}35.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}74 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}96 = 0{,}3656.$$

Решение задачи при помощи дерева эксперимента (см. рис. 10) гораздо компактнее. Не следует увлекаться формализацией событий и применением формулы. Однако ученики должны понимать, что, решая задачи с помощью дерева, они по сути пользуются формулой полной вероятности, «собирая» ее по отдельным веткам-цепочкам.

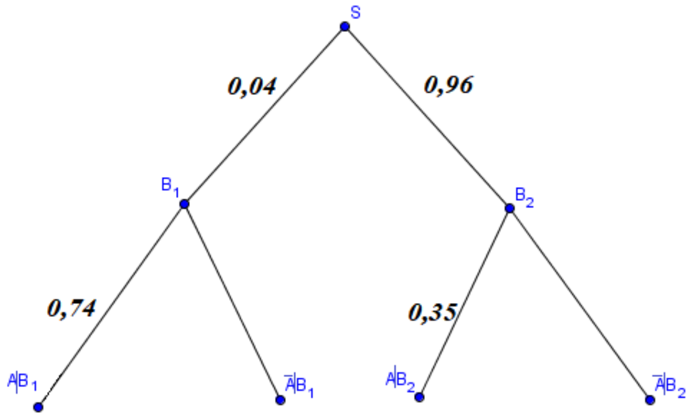


Рис. 10

Правило. Чтобы найти вероятность события с помощью дерева, нужно сложить вероятности всех цепочек, ведущих к этому событию от начальной вершины.

Пример 14. Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов. Известно, что 3% готовых устройств неисправны. Из этих неисправных устройств 98% обнаруживаются при контроле качества продукции. Однако система контроля ошибочно бракует 1% исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сошедшее с автоматической линии зарядное устройство поступит в продажу.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (рис. 11). Событие «устройство исправно» обозначим буквой *И*, а событие «устройство неисправно» – буквой *Н*. Устройства, забракованные системой контроля (а точнее, событие «устройство забраковано системой») обозначим буквой *Б*, противоположное событие «устройство не забраковано» обозначим *П*.

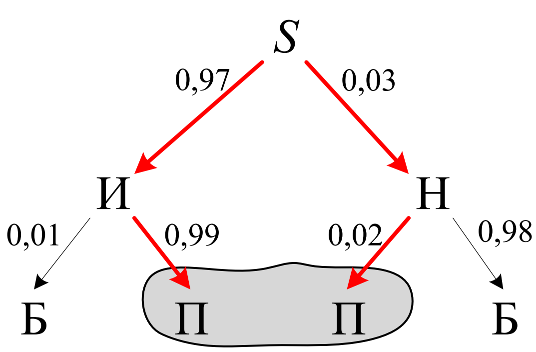


Рис. 11

Событию *П* «устройство поступит в продажу» благоприятствуют цепочки *SИП* и *SНП*, поэтому

$$\mathrm{P}(\textit{П}) = \mathrm{P}(\textit{SИП}) + \mathrm{P}(\textit{SНП}) = 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}03 \cdot 0{,}02 = 0{,}9609.$$

Рассмотрим обратную задачу.

Пример 15. Агрофирма закупает куриные яйца в двух фермерских хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 80% яиц. Найдите вероятность того, что случайное яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (см. рис. 12). Естественно строить дерево, начиная с хозяйств. Так и поступим. Первое хозяйство (точнее, событие «яйцо из первого хозяйства») обозначим *A*, второе – *B*. Событие «выбранное яйцо окажется вышей категории» обозначим *H*, а остальные категории нам не нужны. Неизвестную вероятность события *A* «яйцо из первого хозяйства» обозначим *p*.

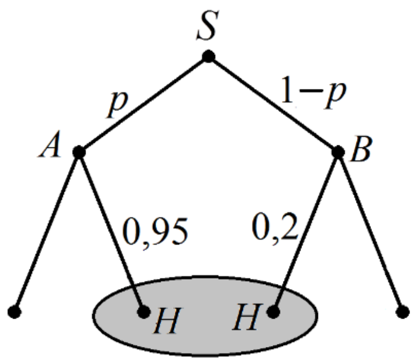


Рис. 12

Вероятность события *H* по условию равна 0,8. Этому событию благоприятствуют цепочки *SAH* и *SBH*, поэтому

$$\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(SAH)+\mathrm{P}(SBH)=p\cdot 0{,}95+(1-p)\cdot 0{,}2=0{,}75p+0{,}2.$$

Составим уравнение $0{,}75p+0{,}2=0{,}8$, откуда $p=\dfrac{0{,}6}{0{,}75}=0{,}8$.

Пример 16. Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй — 0,8; на третий — 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав случайный билет, ответит по крайней мере на два вопроса.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево. Обозначим знаками «+» и «–» успешные и неуспешные ответы на три последовательных вопроса (рис. 13). Выделим на рисунке нужные цепочки.

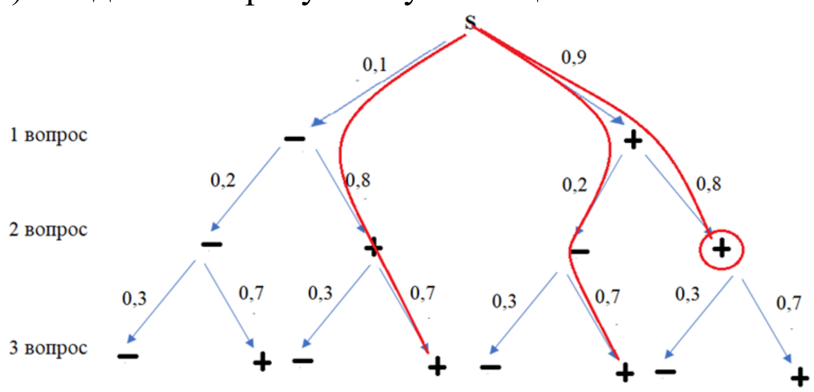


Рис. 13

Искомая вероятность равна

$$0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}902.$$

Предложите ученикам найти другие вероятности в этом случайном опыте. Например, чему равна вероятность того, что студент ответит только на один вопрос? (Ответ.: 0,092).

Самостоятельная работа

См. Приложение

Задачи для уроков

Учебник [1], с. 60, упр. 154-158

154. Задние фонари для сборки автомобилей определённой марки поставляют два завода из двух городов: К. и В. Завод в городе К. поставляет 40% всех фонарей. Среди изделий завода из города К. брак составляет 2%. Среди изделий завода из города В. брак составляет 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный фонарь имеет брак.

155. Горожане составляют 70% населения. Остальные жители — сельские. Известно, что проект некоторого закона одобряет 50% жителей страны. Среди горожан этот проект одобряет 60%. Определите, какая доля сельских жителей одобряет данный закон.

156. Лесной клещ переносит заболевание П., опасное для собак. Известно, что среди собак, которых укусил клещ, заболевают только 3%. Если собаку укусил клещ, хозяевам рекомендуют сделать анализ крови, который показывает наличие заболевания П. в 4% случаев. Если собака больна, то анализ показывает заболевание в 98% случаев. Найдите вероятность того, что анализ ошибочно покажет заболевание у здоровой собаки.

157. Опытный операционист банка допускает ошибку при проведении сложной операции в 1% случаев. Неопытный — в 5% случаев. В большом отделении банка из 100 операционистов 76 опытных. Найдите вероятность ошибки при проведении операции случайно выбранным операционистом отделения.

158. Один сказочный король всегда следовал советам советника. Однажды король решил, что лучше иметь двух советников, чем одного. Если советники советуют одно и то же, то нужно следовать их совету. Если советники расходятся, то нужно принимать решение, бросая монету. Будем считать, что каждый из советников даёт независимо от другого верный совет с вероятностью p. Правда ли, что, имея двух советников, король будет чаще принимать верные решения, чем имея одного? Какова вероятность принятия верного решения при двух советниках?

Дополнительные задания

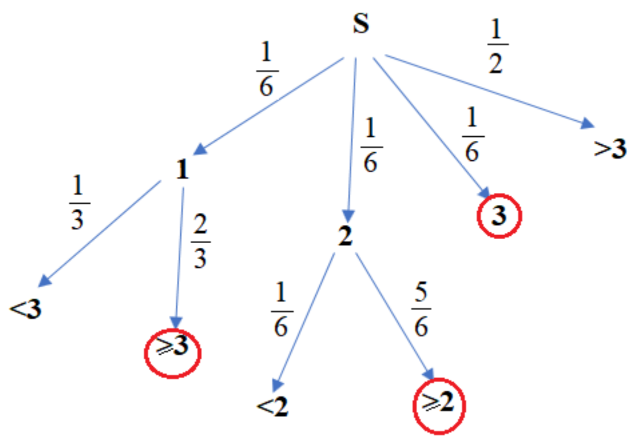
1. Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет возбудителя лихорадки, то результат анализа называется положительным. У больных лихорадкой пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что у пациентов, поступающих с подозрением на лихорадку, анализ оказывается положительным в 19,6% случаев. Найдите вероятность того,

что поступивший с подозрением пациент действительно болен этой лихорадкой.
Ответ: 0,2.

2. Чтобы поступить на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и иностранному языку. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент Р получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,7. Найдите вероятность того, что Р сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.
Ответ: $P = 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 + 0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}408$.

3. Известно, что в некоторой школе ЕГЭ по обществознанию планируют сдавать 57% выпускников, а ЕГЭ по физике – 39%. Известно, что ЕГЭ по физике сдаёт 65% тех, кто сдает ЕГЭ по обществознанию. Найдите вероятность того, что случайно выбранный выпускник из числа тех, кто сдает ЕГЭ по физике, также сдает и ЕГЭ по обществознанию.
Ответ: 0,95.

4. Игральную кость последовательно бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не станет больше или равна 4. Найдите вероятность, что будет сделано ровно два броска.
Решение. Нарисуем дерево. Полное дерево не нужно. Достаточно рассмотреть один-два первых броска. Найдём в дереве цепочки, благоприятствующие событию A «сумма выпавших очков станет больше или равна 4 при двух бросках». Обведём конечные вершины этих цепочек:



Вероятность события A равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

Независимые случайные события

Дублирование жизненно важных систем

В жизни со взаимосвязанными событиями. По наступлению одного события можно судить о более или менее вероятном наступлении другого. Например, если на небе тучи, то дождь более вероятен, чем в ясную погоду. Если нам сказали, что на игральной кости выпало число, большее 4, то мы можем ожидать шестёрку (условная вероятность этого 0,5), но не можем ожидать число 3 (условная вероятность равна нулю).

Бывают события, которые не зависят друг от друга. Например, при бросании двух костей результат бросания первой кости не влияет на результат бросания второй кости. Про такие события говорят, что они ***независимы***.

Пусть A и B — случайные события некоторого случайного эксперимента. Рассмотрим условную вероятность $\mathrm{P}\left(A|B\right)$события A при условии, что событие B произошло. Предположим, что

$$\mathrm{P}\left(A|B\right)=\mathrm{P}\left(A\right).$$

Это равенство говорит, что событие B не влияет на вероятность события A. В этом случае естественно сказать, что ***событие*** A ***не зависит от события*** B.

Покажем,

Свойство независимости что если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Запишем определение условной вероятности:

$$\mathrm{P}\left(A|B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)}.$$

Воспользовавшись равенством $\mathrm{P}\left(A|B\right)=\mathrm{P}\left(A\right)$, получим:

$$\mathrm{P}\left(A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}{\mathrm{P}\left(B\right)},\text{ откуда } \mathrm{P}\left(A\cap B\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right).$$

Если в полученном равенстве события A и B можно поменять местами, но само равенство сохранится. Поэтому если A не зависит от B, то и B не зависит от A.

событий оказалось взаимным. Поэтому в качестве определения независимости можно взять любое из трёх равенств:

$$\mathrm{P}\left(A|B\right)=\mathrm{P}\left(A\right),\ \mathrm{P}\left(B|A\right)=\mathrm{P}\left(B\right),\ \mathrm{P}\left(A\cap B\right)=\mathrm{P}\left(A\right)\cdot\mathrm{P}\left(B\right).$$

Обычно определением считают последнее равенство[1].

---

[1] Аналогично можно говорить о независимости трёх, четырёх и более событий. Если вероятность пересечения любого набора из этих событий равна произведению их вероятностей, то события называются независимыми.

Определение[2]. Два события A и B называются ***независимыми***, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Нужно помнить, что события A и B относятся к одному эксперименту.

Важно! Не следует путать независимые и несовместные события. Несовместные события чаще всего зависимы: если произошло одно из них, то мы заведомо знаем, что не произошло другое.

Пример 17. Монету бросают два раза. Являются ли независимыми события:

а) A «при первом броске выпал орёл» и B «при втором броске выпала решка»;

б) A «при первом броске выпал орёл» и B «орёл выпал хотя бы один раз»?

Решение. В случае (а) получаются следующие вероятности событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Равенство $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ верно, значит, события A и B независимы.

В случае (б) получаются следующие вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B) = \frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

В этом случае $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq \mathrm{P}(A \cap B)$, поэтому события не являются независимыми. Это можно понять и без формул. Ясно, что если произошло событие A, то и B заведомо произошло (то есть $\mathrm{P}(B|A) = 1$).

Пример 18. Игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\textit{на первой кости выпало больше трёх очков}\};$$

$$B = \{\textit{на второй кости выпало менее пяти очков}\}.$$

Являются ли эти события зависимыми?

Желательный результат обсуждения. Интуитивно мы понимаем, что результат одного броска не влияет на второй. Проверим это.

---

[2] Это определение имеет смысл, если оба события имеют ненулевую вероятность. В опытах, где рассматриваются события с нулевой вероятностью, определение независимости намного сложнее. Например, согласно данному определению, невозможное и достоверное события оказываются независимы, при этом они несовместны. Такие противоречия неизбежно возникают при построении наивной теории вероятностей, не опирающейся на аксиомы. Не следует обращать внимание школьников на подобные тонкости. Однако призываем воздержаться от рассмотрения независимых событий и условных вероятностей в опытах, где хотя бы одно из событий имеет нулевую вероятность. Например, не следует спрашивать школьников, будут ли независимы события «на первой кости выпало пять очков» и «на второй кости выпало семь очков».

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}.$$

Равенство $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$ выполняется.

Обратите внимание учеников на то, что если мы возьмём два любых других события, также связанных с двумя разными костями, то они тоже будут независимы.

На рис. 14 наглядно видна независимость событий.

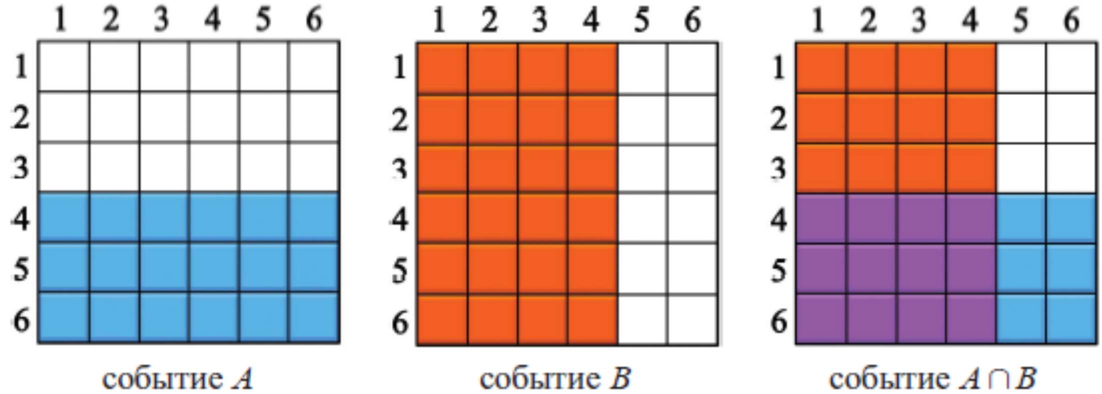


Рис. 14

Событие A занимает половину всей таблицы (рис. слева). Это же событие A занимает половину события B (рис. справа). Иными словами, событие A занимает одинаковую часть внутри всего опыта и внутри только события B.

Если два события получены в двух независимых экспериментах, то эти события будут независимыми в новом сложном эксперименте, полученном соединением первых двух. На практике независимость экспериментов обычно обеспечивается способом их проведения.

Пример 19. В шахматной коробке лежат 16 белых и 16 черных фигур. Из коробки не глядя достают по очереди две фигуры. Найдите вероятность события «обе фигуры чёрные», если

а) перед тем, как достать вторую фигуру, первую не кладут в коробку;

б) перед тем, как достать вторую фигуру, первую снова кладут в коробку.

Желательный результат обсуждения. Уже из условия ясно, что в первом случае события A «в первый раз попалась черная фигура» и B «во второй раз попалась черная фигура» зависимы. На прошлых уроках решались подобные задачи, искомая вероятность $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{31}=\frac{15}{62}\approx 0{,}242$.

Во втором случае фигуру кладут обратно, и условия для событий A и B одинаковые. Вероятности вытащить черную фигуру в первый и во второй раз одинаковы и равны $\frac{1}{2}$, события независимы. Поэтому вероятность вытащить черную фигуру оба раза равна $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$. Обратите внимание учеников на то, что нам не нужно тут проверять независимость событий A и B — этот факт и так очевиден из условий эксперимента.

Пример 20. Наудачу выбираем число из ряда $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$. Пусть событие A состоит в том, что это число четное; событие B — что это число делится на 5. Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранное число делится и на 2, и на 5. Как известно, это означает, что выбранное число делится на 10.

Покажем, что события A и B независимы. Нужно найти вероятности $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ и $\mathrm{P}(A \cap B)$ и убедиться в том, что выполняется равенство $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B\right)$.

Среди 100 первых натуральных чисел всего 50 чётных. Поэтому $\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$. Среди 100 первых натуральных чисел на 5 делится каждое пятое число — всего 100 : 5 = 20 чисел. Поэтому $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$. Тем же способом находим, что среди первых 100 натуральных чисел всего 100 : 10 = = 10 чисел, кратных 10. Следовательно, $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$

Таким образом, $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = 0{,}1$ и $\mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B\right) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$.

Получается, что $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B\right)$. Следовательно, события A и B независимы. Так вышло, потому что число 100 делится и на 2, и на 5. Если бы мы выбирали числа не из 100, а например, из 99 первых натуральных чисел, то события A и B не были бы независимыми. Предложите учащимся самостоятельно проверить это.

Если мы знаем, что события A и B независимы, то формулу $\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = \mathrm{P}\left(A\right) \cdot \mathrm{P}\left(B\right)$ можно использовать для нахождения вероятности пересечения этих событий.

Пример 21. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Желательный результат обсуждения. Введём обозначения событий: $A = \left\{ \textit{А. выиграл, играя белыми} \right\}$ и B « $B = \left\{ \textit{А. выиграл, играя белыми} \right\}$. События A и B независимы. Требуется найти вероятность события $A \cap B$, причём порядок партий не играет роли. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(A \cap B\right) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

Свойство. Если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

Доказательство. Рассмотрим условную вероятность события $\overline{A}$ при условии B:

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\middle|B\right)=1-\mathrm{P}\left(A\middle|B\right).$$

Так как по условию A и B независимы, то $\mathrm{P}\left(A\middle|B\right)=\mathrm{P}(A)$. Значит,

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\middle|B\right)=1-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(\overline{A}\right).$$

А значит, что $\overline{A}$ и B независимы.

Предложите ученикам самостоятельно доказать независимость A и $\overline{B}$, а потом $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Пример 22*. Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй — 0,8; на третий — 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав билет, ответит

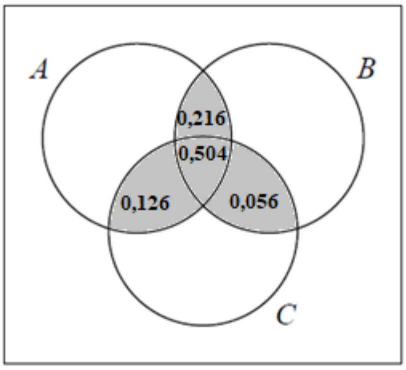
а) на все вопросы;

б) по крайней мере на два вопроса.

Желательный результат обсуждения. Судя по условию, события независимы. Введем обозначения событий: A «студент ответит на первый вопрос», B «студент ответит на второй вопрос», C «студент ответит на третий вопрос». Ответ на пункт (а) дать легко — три независимых события наступают одновременно с вероятностью, равной произведению вероятностей всех трёх событий, то есть

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

Задачи, подобные задаче (б), мы уже решали с помощью диаграмм Эйлера. При этом нам требовалось больше сведений. Но если события независимы, задача становится проще. Найдём вероятности четырёх несовместных элементарных событий:



$$\mathrm{P}\left(A\cap B\cap \overline{C}\right)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}216,$$

$$\mathrm{P}\left(A\cap \overline{B}\cap C\right)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}126,$$

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}056 \text{ и}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

Сложив эти вероятности, получим искомую вероятность $0{,}216+0{,}126+0{,}056+0{,}504=0{,}902$.

Пример 23. **Дублирование жизненно важных систем**. Свойство вероятностей независимых событий применяется в технике для многократного понижения вероятностей отказов жизненно важных систем. Простейший пример – – автомобильные тормоза. Сейчас автомобили оснащаются двумя независимыми тормозными системами. Отказ в каждой системе может произойти независимо от работоспособности второй системы.

Это усложнение конструкции оправдано. Оно снижает вероятность полного отказа тормозов до пренебрежимо малой величины.

Предположим, что вероятность отказа каждой из двух тормозных систем
равна $p = 0,0001$. Это означает, что в среднем на 10000 нажатий педали тормоза случается один отказ. При том огромном количестве автомобилей, которые сейчас заполняют крупные города, такая вероятность отказа приводила бы к ежедневным многочисленным авариям. Что же даёт дублирование тормозной системы? При наличии двух независимых тормозных контуров полный отказ системы произойдёт, только если откажут оба контура, то есть если A_1 — отказ первого контура, а A_2 — отказ второго контура, то тормоза полностью отказывают при наступлении события $A_1 \cap A_2$. В силу независимости вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2\right) = \mathrm{P}\left(A_1\right) \cdot \mathrm{P}\left(A_2\right) = p^2 = 10^{-8}.$$

Эта вероятность пренебрежимо мала. Получается, что отказ тормозов – – практически невозможное событие.

Задача теперь заключается в том, чтобы оба контура были исправны. Для этого существуют регламентные технические обслуживания.

Дублирование является важнейшим принципом при проектировании автомобилей, судов или самолётов, электростанций, больниц и других объектов, где отказ оборудования может вызвать жертвы или очень большие потери.

Отказ одной отдельно взятой системы не смертелен и вполне вероятен. А вот вероятность того, что все системы одновременно откажут, ничтожна. Но когда одна поломка случается, то вероятность катастрофы многократно возрастает. Именно поэтому важно вовремя проводить техобслуживание транспортных средств, ***не оставлять на волю случая то, что должно быть сделано вовремя человеком***.

В природе также встречается дублирование важных систем: например, большинство высших животных имеет два органа слуха, два независимых органа зрения.

Обсудите с учащимися другие примеры дублирования важных систем. Например, в состав современной спортивной парашютной системы входят два парашюта (основной и запасной). Запасной предназначен для спасения жизни парашютиста в случае частичного или полного отказа основного парашюта.

Задачи для уроков

Учебник [1], с. 66, упр. 166, 167.

166. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятность поразить мишень при каждом выстреле равна 0,7 независимо от результатов предыдущих выстрелов. Изобразите дерево вероятностей этого эксперимента и найдите вероятность того, что мишень будет поражена:

а) хотя бы один раз;

б) ровно два раза;

в) хотя бы два раза при условии, что первый выстрел закончился попаданием.

167. Вероятность поразить мишень при одном выстреле равна 0,7. Стрелок делает три выстрела. Рассмотрим события

$$A = \{\text{первые два выстрела удачные}\},$$
$$B = \{\text{все три выстрела удачные}\}.$$

Найдите: а) $\mathrm{P}(A)$; б) $\mathrm{P}(B)$; в) $\mathrm{P}(A \cap B)$; г) $\mathrm{P}(B|A)$.

Учебник [1], с. 69, упр. 179, 180.

179. В автомобиле две независимые тормозные системы. Вероятность того, что одна система откажет при торможении, равна 0,00001. Такая же вероятность отказа второй системы. Рассмотрим события

$$A = \{\text{отказ первой системы}\}, \quad B = \{\text{отказ второй системы}\}.$$

а) Запишите формулой событие «обе системы откажут при торможении».

б) Найдите вероятность того, что обе тормозные системы случайно откажут.

в) Найдите вероятность события B при условии A.

г) Во сколько раз вероятность $\mathrm{P}(B|A)$ выше, чем $\mathrm{P}(A \cap B)$? Чем можно объяснить это отличие?

180. В отделении банка стоят два круглосуточных банкомата. Утром каждый из них неисправен с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что утром хотя бы один банкомат исправен.

Учебник [1], с. 70, упр. 184-186.

184. В тесте по химии три части. Чтобы пройти тест, учащийся должен получить не менее 6 баллов за каждую часть. Учащийся В. лучше подготовлен к первой части — вероятность получить не менее 6 баллов за первую часть равна 0,9, за вторую — 0,5, за третью — 0,4. Найдите вероятность того, что учащийся В. не пройдёт тест.

185. Системный администратор обслуживает три независимых сервера. Вероятность того, что в течение дня первый сервер потребует вмешательства, равна 0,3. Вероятность того, что второй сервер потребует вмешательства, равна 0,2. Вероятность того, что третий сервер потребует вмешательства, равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение случайного взятого дня ни один из серверов не потребует вмешательства.

186. В банке три окна работы с клиентами. В случайный момент вероятность того, что окно закрыто (нет оператора, неисправно оборудование и т. п.), равна 0,9. Окна работают независимо друг от друга. В банк заходит клиент. Найдите вероятность того, что в этот момент работает хотя бы одно окно.