Задачи и решения

6–7 классы

Задача 1/1. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 12. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 100?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 1).

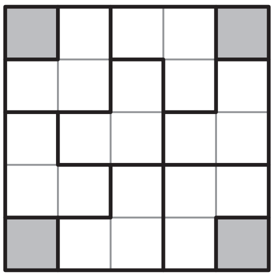

Рис. 1: к решению задачи 1/1

Таким образом, сумма чисел в угловых клетках равна $100 - 7 \cdot 12 = 16$. □

Задача 1/2. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 9. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 75?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 2).

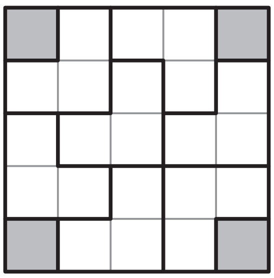

Рис. 2: к решению задачи 1/2

Таким образом сумма чисел в угловых клетках равна $75 - 7 \cdot 9 = 12$. □

Задача 1/3. На доске нарисован квадрат 5×5. В каждом маленьком квадратике Федя написал число. Оказалось, что сумма чисел в любом уголке из трех клеток равна 15. Чему равняется сумма чисел в угловых клетках квадрата, если известно, что сумма всех чисел в квадрате 5×5 равна 125?

Ответ: 20.

Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно разрезать на 7 трехклеточных уголков и 4 угловых клетки (рис. 3).

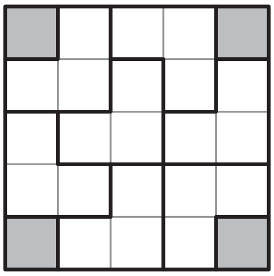

Рис. 3: к решению задачи 1/3

Таким образом сумма чисел в угловых клетках равна $125 - 7 \cdot 15 = 20$. □

Задача 2/1. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 11. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 1 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 4.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 11\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$b - a = c - b + 1\,;$$
$$2b - a - c = 1\,.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$11 + 1 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,;$$
$$b = 4\,.$$

□

Задача 2/2. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 13. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 2 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 5.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 13\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$b - a = c - b + 2\,;$$
$$2b - a - c = 2\,.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$13 + 1 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,;$$
$$b = 5\,.$$

□

Задача 2/3. Учитель математики выписал на доску трехзначное число, состоящее из различных цифр. Петя быстро посчитал, что сумма цифр числа равна 15. Вася сказал, что все цифры идут по возрастанию. А Таня обратила внимание, что разность между второй и первой цифрой на 3 больше, чем разность между третьей и второй цифрой. Какая цифра стоит в разряде десятков, если никто из ребят не ошибся?

Ответ: 6.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — исходное число. Из слов Пети следует, что

$$a + b + c = 15\,.$$

А из слов Тани следует, что

$$b - a = c - b + 3\,;$$
$$2b - a - c = 3\,.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$15 + 3 = (a + b + c) + (2b - a - c) = 3b\,;$$
$$b = 6\,.$$

□

Задача 3/1. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 100 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 58 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 20.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 58 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 42 гнома, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталась $21 = 42 : 2$ группа. Если хотя бы 11 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 10, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 20.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 10 групп гномов с красными колпаками и 11 других групп. Так и сделаем: возьмем 10 групп гномов с красными колпаками и 11 групп гномов 11 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 10 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 60 гномов, а остальные — из двух. □

Задача 3/2. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 105 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 67 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 18.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 67 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 38 гномов, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталось $19 = 38 : 2$ групп. Если хотя бы 10 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 9, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 18.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 9 групп гномов с красными колпаками и 10 других групп. Так и сделаем: возьмем 9 групп гномов с красными колпаками и 10 групп гномов 10 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 9 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 69 гномов, а остальные — из двух. □

Задача 3/3. В подземелье живут гномы в разноцветных колпаках. Однажды 95 жителей подземелья встали в круг. Оказалось, что каждый гном стоит рядом хотя бы с одним гномом в колпаке того же цвета; при этом 49 гномов стоят между двумя гномами в колпаках того же цвета. Какое наибольшее количество гномов в красных колпаках могли иметь соседа в не красном колпаке?

Ответ: 22.

Решение. Назовем *группой* последовательность подряд стоящих гномов в одноцветных колпаках, при этом «крайние» гномы группы стоят рядом с гномами в колпаках другого цвета. Тогда весь круг состоит из нескольких групп.

При этом в каждой группе есть хотя бы два гнома, иначе в ней только один гном, тогда он стоит рядом с двумя гномами в колпаках другого цвета, что противоречит условию.

Давайте попросим 49 гномов, каждый из которых стоит между гномами в колпаках того же цвета, выйти из круга. Тогда всего осталось 46 гномов, при этом в каждой группе осталось 2 гнома.

Рассмотрим группы в красных колпаках. Заметим, что все гномы, которые сейчас в них состоят, и есть те гномы, которые имели соседа в не красном колпаке. Их количество равно удвоенному количеству «красных» групп.

Всего осталось $23 = 46 : 2$ группы. Если хотя бы 12 из них будут красными, то две красные группы будут идти подряд. Получается, что максимальное количество красных групп равно 11, то есть максимальное количество гномов в красных колпаках, которые стоят рядом с гномом в не красном колпаке, равно 22.

Приведем пример, когда это возможно. Из предыдущего решения следует, что в таком примере должно быть 11 групп гномов с красными колпаками и 12 других групп. Так и сделаем: возьмем 11 групп гномов с красными колпаками и 12 групп гномов 12 других различных цветов, и расположим их по кругу так, чтобы никакие две группы красных гномов не стояли рядом (достаточно сначала расположить 11 красных групп по кругу, а потом разделить их группами других цветов). Одну группу сделаем состоящей из 51 гнома, а остальные — из двух. □

Задача 4/1. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в три раза медленее. При этом Малыш ест 5 пряников в минуту, а Карлсон 6 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 7 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 7.

Решение. Малыш съедает один пряник за 12 секунд, то есть на 7 пряников у него ушло 84 секунды. Карлсон съедает пряник за 10 секунд, и у него на 7 пряников ушло 70 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $3x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 84 = 3x + 70\,,$$

откуда получаем $14 = 2x$, то есть $x = 7$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо семь, так как 7 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — семь. □

Задача 4/2. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в четыре раза медленее. При этом Малыш ест 4 пряника в минуту, а Карлсон 5 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 5 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 5.

Решение. Малыш съедает один пряник за 15 секунд, то есть на 5 пряников у него ушло 75 секунд. Карлсон съедает пряник за 12 секунд, и у него на 5 пряников ушло 60 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $4x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 75 = 4x + 60\,,$$

откуда получаем $15 = 3x$, то есть $x = 5$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо пять, так как 5 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — пять. □

Задача 5/1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выписать на доску так, чтобы произведение любых четырех из них делилось на 210, но при этом никакое из них не делилось на 210?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что число делится на 210 тогда и только тогда, когда оно делится на 2, на 3, на 5 и на 7.

Предположим, что на доску можно выписать хотя бы 13 чисел. Тогда среди них не более трех чисел не делятся на 2 (иначе есть четыре числа, чье произведение не делится на 2, а следовательно, не делится на 210), не более трех не делятся на 3, не более трех не делятся на 5, не более трех не делятся на 7. Получается, что максимум 12 чисел не делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 7. Таким образом, есть хотя бы одно число, делящееся на 210. Противоречие.

Пример для 12 чисел:
$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x$, $a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y$, $a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z$,
$a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x$, $a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot y$, $a_6 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot z$,
$a_7 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x$, $a_8 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y$, $a_9 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z$,
$a_{10} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x$, $a_{11} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y$, $a_{12} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z$,

где в качестве x, y, z достаточно взять три различных «больших» простых числа, например, $x = 29$, $y = 31$, $z = 37$. □

Задача 5/2. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выписать на доску так, чтобы произведение любых пяти из них делилось на 330, но при этом никакое из них не делилось на 330?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что число делится на 330 тогда и только тогда, когда оно делится на 2, на 3, на 5 и на 11.

Предположим, что на доску можно выписать хотя бы 17 чисел. Тогда среди них не более четырех чисел не делятся на 2 (иначе есть пять чисел, чье произведение не делится на 2, а следовательно, не делится на 210), не более четырех не делятся на 3, не более четырех не делятся на 5, не более четырех не делятся на 11. Получается, что максимум 16 чисел не делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 11. Таким образом, есть хотя бы одно число, делящееся на 330. Противоречие.

Пример для 16 чисел:
$a_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x$, $a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y$, $a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z$, $a_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot t$,
$a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot x$, $a_6 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot y$, $a_7 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot z$, $a_8 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot t$,
$a_9 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x$, $a_{10} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot y$, $a_{11} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot z$, $a_{12} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot t$,
$a_{13} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x$, $a_{14} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot y$, $a_{15} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot z$, $a_{16} = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot t$,

где в качестве x, y, z, t достаточно взять три различных «больших» простых числа. Например $x = 29$, $y = 31$, $z = 37$, $t = 41$. □

Задача 6/1. У караванщика есть 8 верблюдов. На одном из них сидит одна блоха, на втором — две блохи, на третьем — три блохи, ..., на 8-м верблюде сидят 8 блох. Сколько существует способов расставить верблюдов в колонну так, чтобы ровно у одного верблюда было блох больше, чем его порядковый номер в колонне?

Ответ: 247.

Решение. Сначала посчитаем количество способов расставить верблюдов, если верблюд с номером m имеет n блох, $n > m$ (соответственно, у всех остальных верблюдов количество блох не превышает их номер).

Тогда верблюд с 8 блохами может стоять только на 8-м месте (если $n < 8$), с 7 блохами — на 7-м, ..., с $n+1$ блохами — на $(n+1)$-м месте. Аналогично, на 1-м месте может стоять только верблюд с 1 блохой (если $m > 1$), на 2-м — с 2 блохами, ..., на $(m-1)$-м месте стоит верблюд с $m-1$ блохами.

Осталось посчитать возможные расположения верблюдов с количествами блох от m до $n-1$, ведь остальные уже расставлены однозначно. Верблюд с $n-1$ блохами может стоять только на n-м или $(n-1)$-м месте, так как все бóльшие позиции уже заняты — это дает нам два варианта расположения. Верблюд с $n-2$ блохами, аналогично, может стоять на любой из трех позиций от $n-2$ до n, кроме той, что уже занята предыдущим верблюдом — это опять два варианта, и т. д. Верблюд с $n-k$ блохами, где $n-k > m$, может располагаться на позициях от $n-k$ до n, из которых $k-1$ позиций уже заняты верблюдами, рассмотренными до этого — это снова два варианта расположения.

Наконец, верблюду с m блохами останется только одна позиция. Всего получилось 2^{n-m-1} вариантов.

Нарисуем таблицу 8×8, и в клетку с номером строки n и столбца m впишем 2^{n-m-1}, если $n > m$. Осталось просуммировать все эти числа. В строке с номером $n > 1$ располагаются числа $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 1$, и сумма в ней равна $2^{n-1}-1$. Суммируя все строки, получаем

$$\begin{aligned} &2^7 - 1 + 2^6 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 2^1 - 1 = \\ &\quad = (2^7 + 2^6 + \ldots + 2^1) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 2^8 - 9\,. \end{aligned}$$ □

Задача 6/2. У караванщика есть 7 верблюдов. На одном из них сидит одна блоха, на втором — две блохи, на третьем — три блохи, ..., на 7-м верблюде сидят 7 блох. Сколько существует способов расставить верблюдов в колонну так, чтобы ровно у одного верблюда было блох больше, чем его порядковый номер в колонне?

Ответ: 120.

Решение. Сначала посчитаем количество способов расставить верблюдов, если верблюд с номером m имеет n блох, $n > m$ (соответственно, у всех остальных верблюдов количество блох не превышает их номер).

Тогда верблюд с 7 блохами может стоять только на 7-м месте (если $n < 7$), с 6 блохами — на 6-м, $\ldots$, с $n+1$ блохами — на $(n+1)$-м месте. Аналогично, на 1-м месте может стоять только верблюд с 1 блохой (если $m > 1$), на 2-м — с 2 блохами, $\ldots$, на $(m-1)$-м месте стоит верблюд с $m-1$ блохами.

Осталось посчитать возможные расположения верблюдов с количествами блох от m до $n-1$, ведь остальные уже расставлены однозначно. Верблюд с $n-1$ блохами может стоять только на n-м или $(n-1)$-м месте, так как все бóльшие позиции уже заняты — это дает нам два варианта расположения. Верблюд с $n-2$ блохами, аналогично, может стоять на любой из трех позиций от $n-2$ до n, кроме той, что уже занята предыдущим верблюдом — это опять два варианта, и т. д. Верблюд с $n-k$ блохами, где $n-k > m$, может располагаться на позициях от $n-k$ до n, из которых $k-1$ позиций уже заняты верблюдами, рассмотренными до этого — это снова два варианта расположения.

Наконец, верблюду с m блохами останется только одна позиция. Всего получилось 2^{n-m-1} вариантов.

Нарисуем таблицу 7×7, и в клетку с номером строки n и столбца m впишем 2^{n-m-1}, если $n > m$. Осталось просуммировать все эти числа. В строке с номером $n > 1$ располагаются числа $2^{n-2}, 2^{n-3}, \ldots, 1$, и сумма в ней равна $2^{n-1}-1$. Суммируя все строки, получаем

$$\begin{aligned} &2^6 - 1 + 2^5 - 1 + \ldots + 2^2 - 1 + 2^1 - 1 = \\ &\quad = (2^6 + 2^5 + \ldots + 2^1) - (1 + 1 + \ldots + 1) = 2^7 - 8\,. \end{aligned}$$ $\square$

8–9 классы

Задача 1/1. В одной из клеток доски 5×7 (5 строк, 7 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 30.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 4.

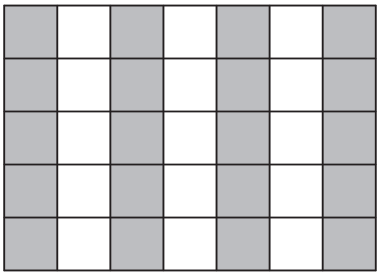

Рис. 4: к решению задачи 1/1

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 20 черных и 15 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более чем по 31 клетке (16 черных и 15 белых).

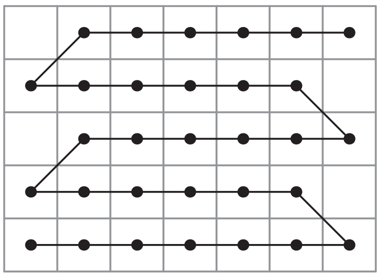

Рис. 5: к решению задачи 1/1

Пример маршрута из 31 клетки (т. е. из 30 ходов) приведен на рис 5. □

Задача 1/2. В одной из клеток доски 4×7 (4 строки, 7 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 24.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 6.

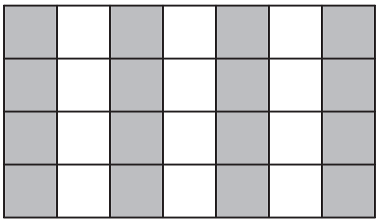

Рис. 6: к решению задачи 1/2

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 16 черных и 12 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более, чем по 25 клеткам (13 черных и 12 белых).

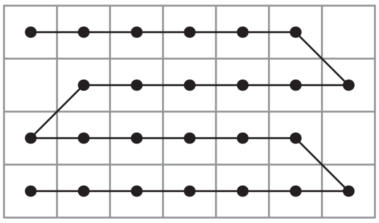

Рис. 7: к решению задачи 1/2

Пример маршрута из 25 клеток (т. е. из 24 ходов) приведен на рис 7. □

Задача 1/3. В одной из клеток доски 5×5 (5 строк, 5 столбцов) стоит фишка. За один ход можно передвинуть её на соседнюю по углу клетку, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку влево. Какое наибольшее количество ходов можно сделать так, чтобы фишка не побывала ни в какой клетке дважды?

Ответ: 20.

Решение. Раскрасим все клетки таблицы в два цвета так, как показано на рис. 8.

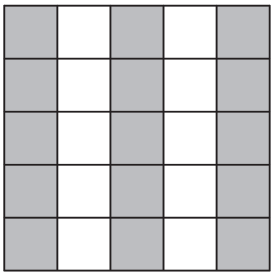

Рис. 8: к решению задачи 1/3

Заметим, что за один ход фишка «меняет свой цвет», то есть если она стояла на белой клетке, то она переходит на черную клетку, и наоборот. Следовательно, в любом маршруте фишки цвета будут чередоваться.

При этом всего есть 15 черных и 10 белых клеток. Таким образом, маршрут максимальной длины проходит не более чем по 21 клетке (11 черных и 10 белых).

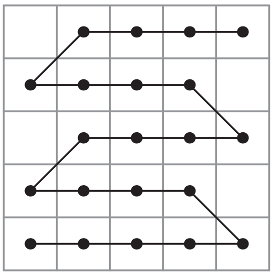

Рис. 9: к решению задачи 1/3

Пример маршрута из 21 клетки (т. е. из 20 ходов) приведен на рис 9. □

Задача 2/1. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в три раза медленее. При этом Малыш ест 5 пряников в минуту, а Карлсон 6 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 7 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 7.

Решение. Малыш съедает один пряник за 12 секунд, то есть на 7 пряников у него ушло 84 секунды. Карлсон съедает пряник за 10 секунд, и у него на 7 пряников ушло 70 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $3x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 84 = 3x + 70\,,$$

откуда получаем $14 = 2x$, то есть $x = 7$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо семь, так как 7 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — семь. □

Задача 2/2. Малыш и Карлсон едят пряники с молоком. Малыш выпивает один стакан молока за некоторое целое число секунд, а Карлсон выпивает его в четыре раза медленее. При этом Малыш ест 4 пряника в минуту, а Карлсон 5 пряников в минуту. Одновременно есть пряники и пить молоко ни один из них не может. Спустя некоторое время они выпили по одинаковому количеству стаканов молока (каждый выпил больше одного стакана) и съели по 5 пряников. Сколько стаканов молока выпил Малыш?

Ответ: 5.

Решение. Малыш съедает один пряник за 15 секунд, то есть на 5 пряников у него ушло 75 секунд. Карлсон съедает пряник за 12 секунд, и у него на 5 пряников ушло 60 секунд. Пусть Малыш потратил на молоко x секунд; Карлсон тогда потратил $4x$. Суммарное время у них совпадает:

$$x + 75 = 4x + 60\,,$$

откуда получаем $15 = 3x$, то есть $x = 5$. Так как на каждый стакан у Малыша уходит целое число секунд, то он мог выпить либо один стакан, либо пять, так как 5 секунд не делятся ни на какие другие числа. Но по условию выпитых стаканов было больше одного, так что ответ — пять. □

Задача 3/1. Обыкновенную дробь $\frac{1}{123}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 3075.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 123. Заметим, что

$$10^3 = 8 \cdot 123 + 16.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 8. Когда мы вычеркнем цифру 8, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{123} - 0{,}008\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{123} - \frac{1}{125}\right) = \frac{20}{15375} = \frac{4}{3075}.$$

Таким образом, ответ равен 3075. □

Задача 3/2. Обыкновенную дробь $\frac{1}{147}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 7350.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 147. Заметим, что

$$10^3 = 6 \cdot 147 + 118.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 6. Когда мы вычеркнем цифру 6, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{147} - 0{,}006\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{147} - \frac{3}{500}\right) = \frac{10}{147} - \frac{3}{50} = \frac{59}{7350}.$$

Таким образом, ответ равен 7350. □

Задача 3/3. Обыкновенную дробь $\frac{1}{138}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Затем из неё вычеркнули первую ненулевую цифру и получившееся число записали в виде несократимой обыкновенной дроби. Найдите знаменатель этой дроби.

Ответ: 6900.

Решение. Для начала определим первую ненулевую цифру после запятой. Для этого надо определить степень 10, большую 138. Заметим, что

$$10^3 = 7 \cdot 138 + 34.$$

Это означает, что первая ненулевая цифра стоит на третьем месте и равна 7. Когда мы вычеркнем цифру 7, то получим число, равное

$$10 \cdot \left(\frac{1}{138} - 0{,}007\right) = 10 \cdot \left(\frac{1}{138} - \frac{7}{1000}\right) = \frac{5}{69} - \frac{7}{100} = \frac{17}{6900}.$$

Таким образом, ответ равен 6900. □

Задача 4/1. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD : KA = 2$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $5 \cdot AL : LB$.

Ответ: 7.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

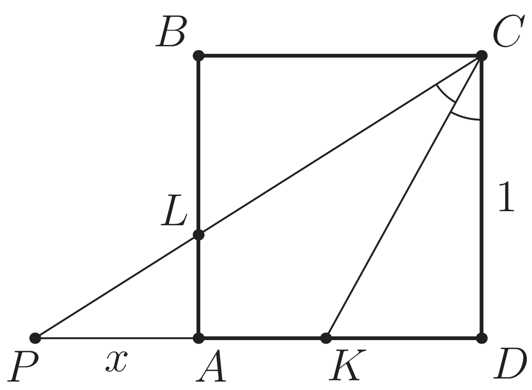

Рис. 10: к решению задачи 4/1

а отрезок AP за x (рис. 10). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP} = \frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2 + CD^2 = (1 + x)^2 + 1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1 + (1 + x)^2}}{\frac{1}{3} + x} = \frac{3}{2}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{3}+x)^2} = \frac{9}{4}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$4(1+1+2x+x^2) = 9\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2\right)\,;$$
$$8+8x+4x^2 = 1+6x+9x^2\,;$$
$$5x^2-2x-7=0\,;$$
$$x=\frac{7}{5}\quad \text{или}\quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x=\frac{7}{5}$.

Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $5\cdot AL:LB = 5\cdot CP:BC = 5x = 7$. □

Задача 4/2. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD:KA=3$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $7\cdot AL:LB$.

Ответ: 17.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

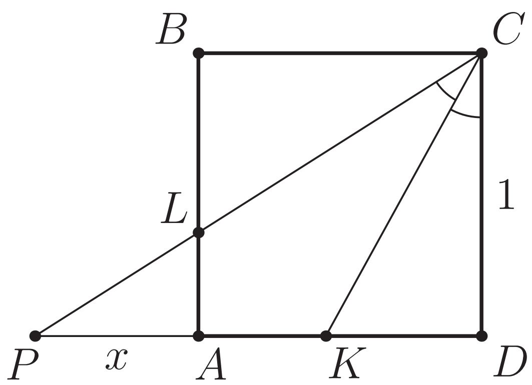

Рис. 11: к решению задачи 4/2

а отрезок AP за x (рис. 11). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP}=\frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2 + CD^2 = (1+x)^2+1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+(1+x)^2}}{\frac{1}{4}+x} = \frac{4}{3}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{4}+x)^2} = \frac{16}{9}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$9(1+1+2x+x^2) = 16\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+x^2\right)\,;$$
$$18+18x+9x^2 = 1+8x+16x^2\,;$$
$$9x^2-10x-17=0\,;$$
$$x=\frac{17}{7} \quad \text{или} \quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x=\frac{17}{7}$.

Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $7\cdot AL:LB = 7\cdot CP:BC = 7x = 17$. □

Задача 4/3. Точка K — такая точка на стороне AD квадрата $ABCD$, что $KD:KA=4$. Прямая, симметричная CD относительно CK, пересекает сторону AB в точке L. Найдите величину $9\cdot AL:LB$.

Ответ: 31.

Решение. Пусть P — пересечение CL и AD. Обозначим сторону квадрата за 1,

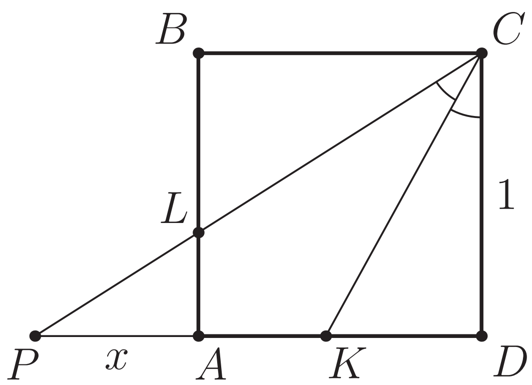

Рис. 12: к решению задачи 4/3

а отрезок AP за x (рис. 12). Тогда по свойству биссектрисы в треугольнике PCD получим, что $\frac{CP}{KP}=\frac{CD}{KD}$. Чтобы найти сторону PC, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника PCD:

$$CP^2 = PD^2 + CD^2 = (1+x)^2+1\,.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{1+(1+x)^2}}{\frac{1}{5}+x} = \frac{5}{4}\,.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим что

$$\frac{1+(1+x)^2}{(\frac{1}{5}+x)^2} = \frac{25}{16}\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем уравнение

$$16(1+1+2x+x^2) = 25\left(\frac{1}{25}+\frac{2}{5}x+x^2\right)\,;$$
$$32+32x+16x^2 = 1+10x+25x^2\,;$$
$$9x^2-22x-31=0\,;$$
$$x=\frac{31}{9} \quad \text{или} \quad x=-1\,.$$

Заметим, что корень $x=-1$ не имеет геометрического смысла, поэтому $x = \frac{31}{9}$. Несложно заметить, что треугольники ALP и BLC подобны, откуда будет следовать, что $9\cdot AL : LB = 9\cdot CP : BC = 9x = 31$. □

Задача 5/1. По кругу записаны 268 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 75. Числа 3, 4 и 9 записаны на позициях с номерами 17, 83 и 144 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 210?

Ответ: -1.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $268 = 20\cdot 13+8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $268 = 8\cdot 33+4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $75:5=15$. Заметим, что числа 17, 83, 144 и 210 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 210-м месте стоит число $15-(4+3+9) = -1$. □

Задача 5/2. По кругу записаны 148 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 90. Числа 3, 4 и -5 записаны на позициях с номерами 41, 19 и 84 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 146?

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $148 = 20\cdot 7+8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $148 = 8 \cdot 18 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $90 : 5 = 18$. Заметим, что числа 41, 19, 84 и 146 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 146-м месте стоит число $18 - (3 + 4 - 5) = 16$. $\square$

Задача 5/3. По кругу записаны 308 целых чисел таким образом, что сумма любых 20 последовательных из них равна 65. Числа 7, 3 и 6 записаны на позициях с номерами 61, 103 и 204 соответственно. Какое число записано на позиции с номером 10?

Ответ: -3.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $308 = 20 \cdot 15 + 8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $308 = 8 \cdot 38 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой.

Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $65 : 5 = 13$. Заметим, что числа 61, 103, 204 и 10 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 10-м месте стоит число $13 - (7 + 3 + 6) = -3$. $\square$

Задача 6/1. Сколько существует натуральных n таких, что $100 < n < 20000$, и n можно представить в виде $\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a)$ с натуральными a, b, c?

Ответ: 19891.

Решение. Представим число n в виде $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Если $m > 1$, то возьмем $a = 2^k \cdot \frac{m-1}{2}$, $b = c = 2^k$. Получается

$$\begin{aligned} &\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\ &\quad = \text{НОК}(2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}) = \\ &\quad = 2^k \cdot \frac{m-1}{2} + 2^k + 2^k \cdot \frac{m-1}{2} = 2^k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2^k$. Пусть $a = 2^\alpha \cdot a_1$, $b = 2^\beta \cdot b_1$, $c = 2^\gamma \cdot c_1$, где a_1, b_1, c_1 — нечетные числа; без ограничения общности будем считать $\alpha \leqslant$

$\beta \leqslant \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^\alpha \cdot a_1, 2^\beta \cdot b_1) + \text{НОК}(2^\beta \cdot b_1, 2^\gamma \cdot c_1) + \text{НОК}(2^\gamma \cdot c_1, 2^\alpha \cdot a_1) = \\
&\quad = 2^\beta \cdot \text{НОК}(a_1, b_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^k\,.
\end{aligned}$$

Получается

$$\text{НОК}(a_1, b_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^{k-\beta}\,.$$

Если $\gamma = \beta$, то в левой части сумма трех нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

Если $\gamma > \beta$, то в левой части сумма четного и двух нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

То есть нам подходят все числа из промежутка, кроме степеней двойки.

Заметим, что $100 < 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14} < 20000$.

Получаем ответ $20000 - 1 - 100 - 8 = 19891$. □

Задача 6/2. Сколько существует натуральных n таких, что $150 < n < 15000$, и n можно представить в виде $\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a)$ с натуральными a, b, c?

Ответ: 14843.

Решение. Представим число n в виде $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Если $m > 1$, то возьмем $a = 2^k \cdot \frac{m-1}{2}$, $b = c = 2^k$. Получается

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k) + \text{НОК}(2^k, 2^k \cdot \tfrac{m-1}{2}) = \\
&\quad = 2^k \cdot \frac{m-1}{2} + 2^k + 2^k \cdot \frac{m-1}{2} = 2^k \cdot m\,.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2^k$. Пусть $a = 2^\alpha \cdot a_1$, $b = 2^\beta \cdot b_1$, $c = 2^\gamma \cdot c_1$, где a_1, b_1, c_1 — нечетные числа; без ограничения общности будем считать $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a) = \\
&\quad = \text{НОК}(2^\alpha \cdot a_1, 2^\beta \cdot b_1) + \text{НОК}(2^\beta \cdot b_1, 2^\gamma \cdot c_1) + \text{НОК}(2^\gamma \cdot c_1, 2^\alpha \cdot a_1) = \\
&\quad = 2^\beta \cdot \text{НОК}(a_1, b_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^\gamma \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^k\,.
\end{aligned}$$

Получается

$$\text{НОК}(a_1, b_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(b_1, c_1) + 2^{\gamma-\beta} \cdot \text{НОК}(c_1, a_1) = 2^{k-\beta}\,.$$

Если $\gamma = \beta$, то в левой части сумма трех нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

Если $\gamma > \beta$, то в левой части сумма четного и двух нечетных слагаемых, а в правой четное число. Противоречие.

То есть нам подходят все числа из промежутка, кроме степеней двойки.

Заметим, что $150 < 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13} < 15000$.

Получаем ответ $15000 - 1 - 150 - 6 = 14843$. $\square$

10–11 классы

Задача 1/1. Среднее арифметическое девяти неотрицательных чисел равно 20. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 36.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_5. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 180, а значит

$$5a_5 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 180 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \leqslant 180\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 36$. $\square$

Задача 1/2. Среднее арифметическое девяти неотрицательных чисел равно 10. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 18.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_5. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 90, а значит

$$5a_5 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 90 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \leqslant 90\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 18$. $\square$

Задача 1/3. Среднее арифметическое одиннадцати неотрицательных чисел равно 12. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 22.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_6. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 132, а значит

$$6a_6 \leqslant a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 132 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \leqslant 132\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 22$. $\square$

Задача 1/4. Среднее арифметическое одиннадцати неотрицательных чисел равно 24. Какое наибольшее значение может принимать среднее из них по величине?

Ответ: 44.

Решение. Упорядочим числа: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}$. Требуется найти максимальное возможное значение числа a_6. Непосредственно из условия вытекает, что сумма чисел равна 264, а значит

$$6a_6 \leqslant a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 264 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 \leqslant 264\,,$$

откуда следует требуемая оценка. Примером служит набор $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = 44$. $\square$

Задача 2/1. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 507 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 507 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 507 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. $\square$

Задача 2/2. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 608 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 608 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 608 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. $\square$

Задача 2/3. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 709 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 709 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 709 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. $\square$

Задача 2/4. Сколько различных натуральных решений имеет уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{8}\right] + 810 = x\,?$$

Ответ: 8.

Решение. Пусть $x = 8k + m$, где k целое и $0 \leqslant m \leqslant 7$. Тогда уравнение переписывается в виде

$$4k + \left[\frac{m}{2}\right] + 2k + \left[\frac{m}{4}\right] + k + \left[\frac{m}{8}\right] + 810 = 8k + m\,,$$

или, после сокращения,

$$\left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] + \left[\frac{m}{8}\right] + 810 = k + m\,.$$

Заметим, что если m фиксировано, то k существует и определяется однозначно. Разным $m \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ соответствуют различные $x = 8k + m$. Следовательно, различных x столько же, сколько и различных m, то есть 8. $\square$

Задача 3/1. Из квадрата 218×218 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×5. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 3.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 218. Тогда в каждом прямоугольнике 1×5 сумма чисел делится на 5. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 5k + 10$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 5, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$218(1 + 2 + \ldots + 218) = \frac{218 \cdot 218 \cdot 219}{2} = 109 \cdot 218 \cdot 219\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 5 равен остатку от деления $4 \cdot 3 \cdot 4$ на 5, то есть 3. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 4 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум три строки. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

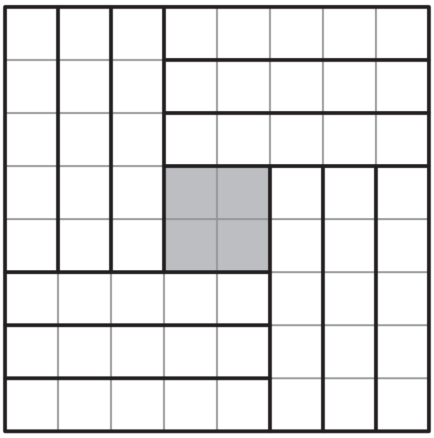

Рис. 13: к решению задачи 3/1

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии трех клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×5. Легко придумать такое разрезание для квадрата 8×8 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×5 (рис. 13). Далее из квадрата 218×218 удаляем квадрат 8×8, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 8×210 и 210×8 и квадрата 210×210. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×5, так как 210 делится на 5. □

Задача 3/2. Из квадрата 418×418 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×5. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 3.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 418. Тогда в каждом прямоугольнике 1×5 сумма чисел делится на 5. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + (k+4) = 5k + 10$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 5, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$418(1 + 2 + \ldots + 418) = \frac{418 \cdot 418 \cdot 419}{2} = 209 \cdot 418 \cdot 419\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 5 равен остатку от деления $4 \cdot 3 \cdot 4$ на 5, то есть 3. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 4 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум три строки. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

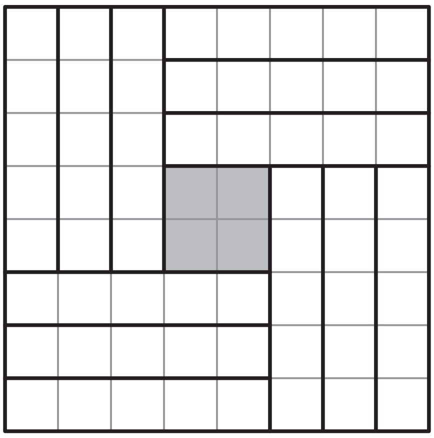

Рис. 14: к решению задачи 3/2

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии трех клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×5. Легко придумать такое разрезание для квадрата 8×8 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×5 (рис. 14). Далее из квадрата 418×418 удаляем квадрат 8×8, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 8×410 и 410×8 и квадрата 410×410. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×5, так как 410 делится на 5. $\square$

Задача 3/3. Из квадрата 698×698 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×7. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 5.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 698. Тогда в каждом прямоугольнике 1×7 сумма чисел делится на 7. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+6) = 7k + 21$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 7, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$698(1 + 2 + \ldots + 698) = \frac{698 \cdot 698 \cdot 699}{2} = 349 \cdot 698 \cdot 699\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления $6 \cdot 5 \cdot 6$ на 7, то есть 5. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 6 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум пять строк. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

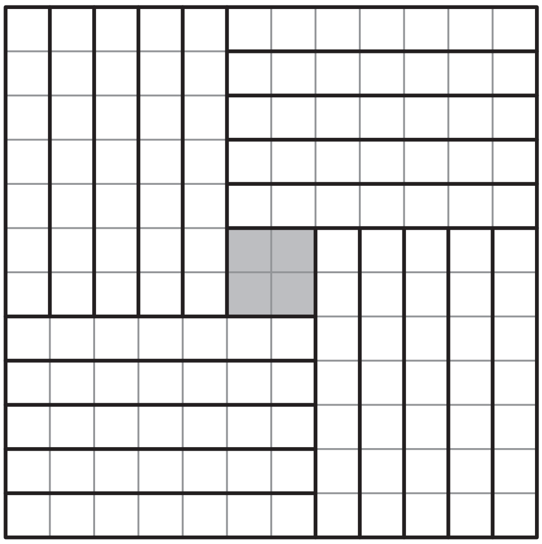

Рис. 15: к решению задачи 3/3

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии пяти клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×7. Легко придумать такое разрезание для квадрата 12×12 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×7 (рис. 14). Далее из квадрата 698×698 удаляем квадрат 12×12, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 12×686 и 686×12 и квадрата 686×686. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×7, так как 686 делится на 7. □

Задача 3/4. Из квадрата 418×418 вырезали квадратик 2×2 так, что оставшуюся фигуру удалось разрезать на прямоугольники 1×7. На каком минимальном расстоянии от края доски может находиться квадратик, если сторона клетки равна 1 см? (Ответ дайте в сантиметрах.)

Ответ: 5.

Решение. Расставим в клетках доски натуральные числа следующим образом: первую строку заполним единицами, вторую — двойками, третью — тройками, и т. д., в каждую клетку последней строки поставим число 418. Тогда в каждом прямоугольнике 1×7 сумма чисел делится на 7. Действительно, это утверждение очевидно для горизонтальных прямоугольников, а для вертикальных сумма всегда имеет вид

$$k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+6) = 7k + 21$$

для некоторого натурального k и тоже кратна 5. Следовательно, сумма чисел в квадратике 2×2 должна иметь тот же остаток от деления на 7, что и сумма чисел во всем квадрате. Сумма всех чисел вычисляется по формуле

$$418(1 + 2 + \ldots + 418) = \frac{418 \cdot 418 \cdot 419}{2} = 209 \cdot 418 \cdot 419\,.$$

Нетрудно видеть, что остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления $6 \cdot 5 \cdot 6$ на 7, то есть 5. Такой остаток в квадрате 2×2 с учетом расстановки чисел можно получить, только если в нем стоят два числа с остатком 6 и два числа с остатком 0. Следовательно, от верхнего края большого квадрата квадратик отделяют минимум пять строк. Аналогичное утверждение верно и для трех других сторон.

Осталось привести пример расположения квадратика на расстоянии пяти клеток от края и разрезание оставшейся части на прямоугольники 1×7. Легко придумать такое разрезание для квадрата 12×12 — надо вырезать из него центральный квадрат 2×2, оставшаяся часть легко разобьется на прямоугольники 1×7 (рис. 16). Далее из квадрата 418×418 удаляем квадрат 12×12, расположенный в углу, после чего оставшаяся часть представляется в виде объединения прямоугольников 12×406 и 406×12 и квадрата 406×406. Все они легко разрезаются на прямоугольники 1×7, так как 406 делится на 7. □

Задача 4/1. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{99 + \sqrt{n}} + \sqrt{99 - \sqrt{n}}$$

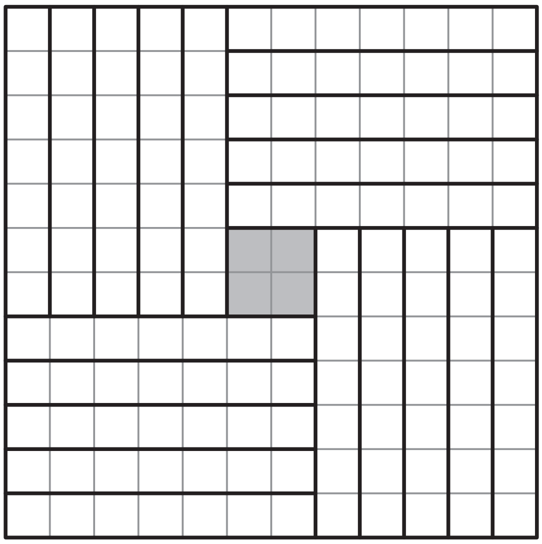

Рис. 16: к решению задачи 3/4

является целым.

Ответ: 5832.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 99 + \sqrt{n} + 99 - \sqrt{n} + 2\sqrt{99^2 - n} = 2 \cdot 99 + 2\sqrt{99^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{99^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 99$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 99$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 63$. В итоге,

$$n \geqslant 99^2 - 63^2 = 5832.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5832$ подходит. □

Задача 4/2. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{98 + \sqrt{n}} + \sqrt{98 - \sqrt{n}}$$

является целым.

Ответ: 5508.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 98 + \sqrt{n} + 98 - \sqrt{n} + 2\sqrt{98^2 - n} = 2 \cdot 98 + 2\sqrt{98^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{98^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 98$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 98$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 64$. В итоге,

$$n \geqslant 98^2 - 64^2 = 5508.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5508$ подходит. □

Задача 4/3. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{97 + \sqrt{n}} + \sqrt{97 - \sqrt{n}}$$

является целым.

Ответ: 5184.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 97 + \sqrt{n} + 97 - \sqrt{n} + 2\sqrt{97^2 - n} = 2 \cdot 97 + 2\sqrt{97^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{97^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 95$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 97$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 65$. В итоге,

$$n \geqslant 97^2 - 65^2 = 5184.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5832$ подходит. □

Задача 4/4. Найдите наименьшее возможное значение натурального числа n, при котором число

$$A = \sqrt{96 + \sqrt{n}} + \sqrt{96 - \sqrt{n}}$$

является целым.

Ответ: 4860.

Решение. Возведем число A в квадрат и получим, что величина

$$A^2 = 96 + \sqrt{n} + 96 - \sqrt{n} + 2\sqrt{96^2 - n} = 2 \cdot 96 + 2\sqrt{96^2 - n}$$

является целой, причем квадратом натурального числа. Это возможно только когда выражение $B = \sqrt{96^2 - n}$ целое. Поскольку $B < 96$, то A^2 — четный квадрат, меньший $4 \cdot 96$. Следовательно, $A^2 \leqslant 324 = 18^2$ и $B \leqslant 66$. В итоге,

$$n \geqslant 96^2 - 66^2 = 4860.$$

Из приведенных рассуждений следует, что $n = 5832$ подходит. □

Задача 5/1. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 115°$, $\angle CB_1D = 130°$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 115.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 115°$ (рис. 17). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек

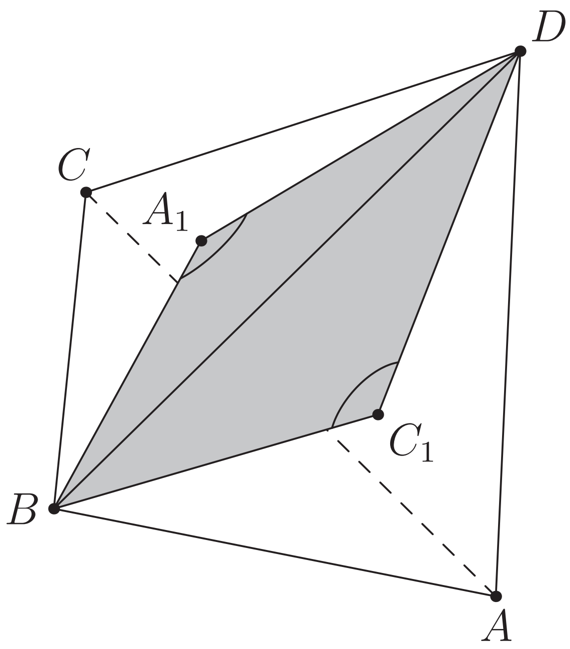

Рис. 17: к решению задачи 5/1

касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 130^\circ$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360^\circ\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360^\circ - 115^\circ - 130^\circ = 115^\circ\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360^\circ - 115^\circ - \varphi = 245^\circ - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360^\circ - 130^\circ - \varphi = 230^\circ - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360^\circ = 115^\circ + 245^\circ - \varphi + 230^\circ - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/2. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 115^\circ$, $\angle CB_1D = 120^\circ$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 125.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 115^\circ$ (рис. 18).

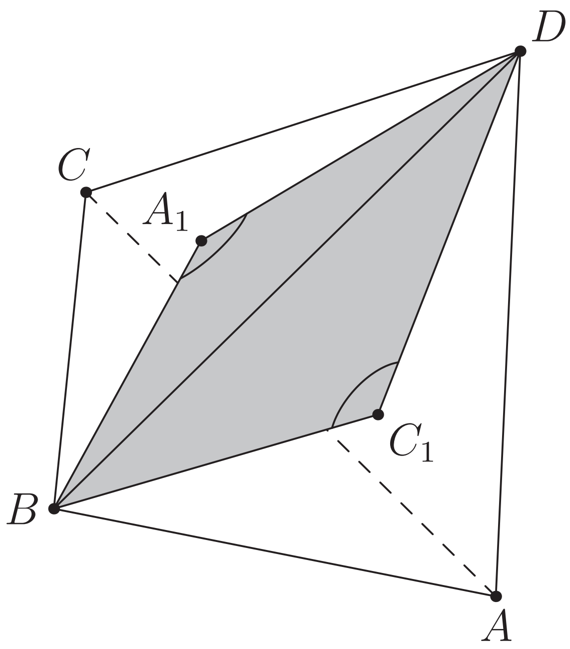

Рис. 18: к решению задачи 5/2

Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 120°$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360°\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360°\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360°\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360° - 115° - 120° = 125°\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360° - 115° - \varphi = 245° - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360° - 120° - \varphi = 240° - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360° = 125° + 245° - \varphi + 240° - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/3. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 115°$, $\angle CB_1D = 125°$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 120.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ — касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки

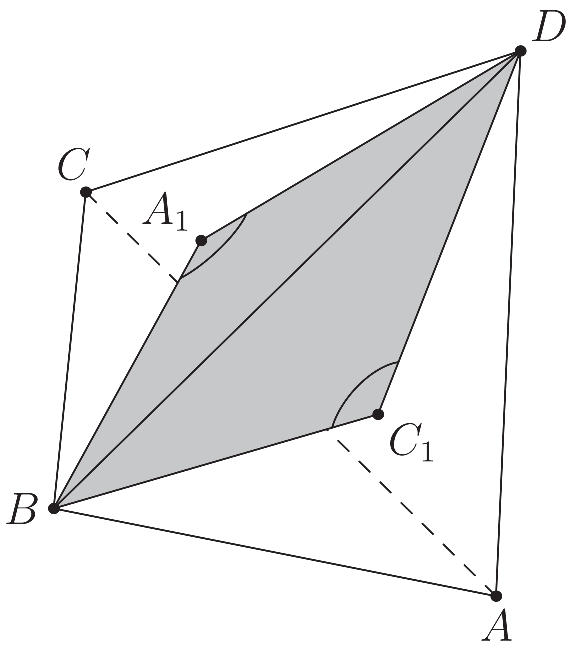

Рис. 19: к решению задачи 5/3

D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 115^\circ$ (рис. 19). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 125^\circ$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360^\circ\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360^\circ - 115^\circ - 125^\circ = 120^\circ\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360^\circ - 115^\circ - \varphi = 245^\circ - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360^\circ - 125^\circ - \varphi = 235^\circ - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360^\circ = 120^\circ + 245^\circ - \varphi + 235^\circ - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 5/4. Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней BCD, CAD и ABD в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $\angle BA_1D = 125^\circ$, $\angle CB_1D = 130^\circ$. Найдите $\angle AC_1D$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 105.

Решение. Пусть D_1 — точка касания сферы и грани ABC и $\angle AC_1D = \varphi$. Заметим, что треугольники BA_1D и BC_1D равны по трем сторонам ($BA_1 = BC_1$ —

касательные к сфере из точки B, $DA_1 = DC_1$ — касательные к сфере из точки D, BD — общая сторона). Следовательно, $\angle BA_1D = \angle BC_1D = 125^\circ$ (рис. 20). Аналогично равны углы, под которыми видно любое ребро тетраэдра из точек

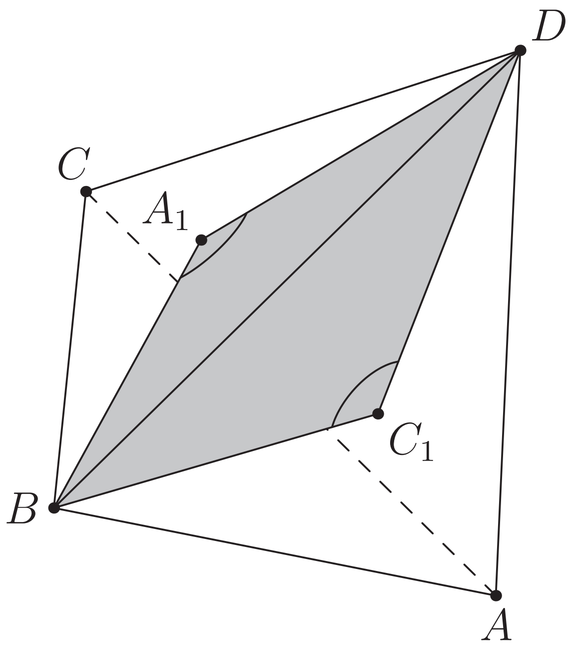

Рис. 20: к решению задачи 5/4

касания прилегающих к нему граней. В частности, $\angle CB_1D = \angle CA_1D = 130^\circ$ и $\angle AC_1D = \angle AB_1D = \varphi$. Кроме того, верны соотношения

$$\angle BA_1D + \angle DA_1C + \angle CA_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle BC_1D + \angle DC_1A + \angle AC_1B = 360^\circ\,,$$
$$\angle CB_1D + \angle DB_1A + \angle AB_1C = 360^\circ\,,$$

из которых заключаем, что

$$\angle CD_1B = \angle CA_1B = 360^\circ - 125^\circ - 130^\circ = 105^\circ\,,$$
$$\angle BD_1A = \angle BC_1A = 360^\circ - 125^\circ - \varphi = 235^\circ - \varphi\,,$$
$$\angle AD_1B = \angle AC_1B = 360^\circ - 130^\circ - \varphi = 230^\circ - \varphi\,.$$

Осталось сложить три полученных равенства и получить уравнение на φ:

$$360^\circ = 105^\circ + 235^\circ - \varphi + 230^\circ - \varphi\,,$$

из которого следует ответ. □

Задача 6/1. По кругу записаны 150 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 149.

Решение. Начнем с того, что если $n = 150$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 150 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 150$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 149$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 150$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 150. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{150}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, ..., число на 150-й позиции — x_{150} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{149} - x_{148} - x_{150} = 0\\
&2x_{150} - x_{149} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{150} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{150}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 149, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$

Задача 6/2. По кругу записаны 250 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 249.

Решение. Начнем с того, что если $n = 250$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 250 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 250$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 249$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 250$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 250. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{250}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, $\ldots$, число на 250-й позиции — x_{250} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{249} - x_{248} - x_{250} = 0\\
&2x_{250} - x_{249} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{250} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{250}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 249, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. □

Задача 6/3. По кругу записаны 350 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 349.

Решение. Начнем с того, что если $n = 350$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 350 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 350$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 349$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 350$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 350. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{350}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, …, число на 350-й позиции — x_{350} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\dots\\
&2x_{349} - x_{348} - x_{350} = 0\\
&2x_{350} - x_{349} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{350} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{350}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 349, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$

Задача 6/4. По кругу записаны 450 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n. Назовем число *удачным,* если оба его соседа являются натуральными. Раз в минуту выбирается удачное число, к нему прибавляется 2, а из его соседей вычитается по единице. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее значение n, при котором процесс заведомо закончится.

Ответ: 449.

Решение. Начнем с того, что если $n = 450$, то процесс необязательно закончится. Действительно, рассмотрим следующую расстановку (мы выписываем числа в строку для удобства, но следует иметь в виду, что первое и последнее число в строке являются соседними на окружности):

$$2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Если мы выберем 0 в качестве удачного числа, то получим следующую расстановку

$$1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1\,.$$

Нетрудно видеть, что она получается из предыдущей сдвигом на одну позицию по часовой стрелке. Проведя такую операцию 450 раз, мы придем в исходную позицию и сможем продолжать процесс бесконечно. При $n > 450$ легко строится аналогичный пример.

Докажем теперь, что если $n \leqslant 449$, то процесс обязательно застопорится. Для этого обратим внимание на нули (хотя бы один ноль обязательно есть, поскольку $n < 450$). Нули разбивают окружность на несколько дуг. Одна из них должна быть заполнена единицами, иначе сумма чисел на каждой дуге хотя бы на 1 больше количества чисел в ней, и тогда общая сумма будет не меньше 450. Выберем наименьшую из дуг, заполненных единицами (возможно, это дуга длины ноль, то есть просто два рядом стоящих нуля). Заметим, что длина такой наименьшей дуги не увеличивается при проведении операций, а если проводится операция, затрагивающая эту дугу, то длина строго уменьшается. Действительно, при проведении операции с единицей внутри, дуга разрывается на меньшие части — одну двойку и две дуги, заполненные единицами. При проведении операции с нулем на конце, дуга, очевидно, укорачивается на одну единицу.

Итак, длина наименьшей дуги не увеличивается, и, рано или поздно, она либо сожмется в пару соседних нулей, операции с которыми станут невозможны, либо операций, затрагивающих эту дугу, начиная с некоторого момента проводится не будет.

Если процесс продолжается бесконечно долго, то комбинация чисел по кругу рано или поздно повторится. Пусть повторилась позиция

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{450}\,,$$

при этом между повторениями число на первой позиции выбирали в качестве удачного x_1 раз, число на второй позиции — x_2 раз, ..., число на 450-й позиции — x_{450} раз. Тогда, поскольку все числа после всех операций не изменились, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&2x_2 - x_1 - x_3 = 0\\
&2x_3 - x_2 - x_4 = 0\\
&\ldots\\
&2x_{449} - x_{448} - x_{450} = 0\\
&2x_{450} - x_{449} - x_1 = 0\\
&2x_1 - x_{450} - x_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Из них следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{450}$ (достаточно рассмотреть максимальное из x_j и понять, что соседние с ним совпадают).

Подведем итог. Зацикливание возможно, только если на каждую позицию приходится ненулевое количество выборов удачного числа. Однако, как мы доказали выше в случае, когда сумма чисел равна 449, появится зона чисел, с которой операции более не проводятся. Это и означает, что процесс будет конечным. $\square$