

6 класс

Задача 6.1. У Джерри есть девять карточек с цифрами от 1 до 9. Он выкладывает их в ряд, образуя девятизначное число. Том выписывает на доску все 8 двузначных чисел, образованных соседними цифрами (например, для числа 789456123 это числа 78, 89, 94, 45, 56, 61, 12, 23). За каждое двузначное число, делящееся на 9, Том отдает Джерри кусочек сыра. Какое наибольшее количество кусочков сыра может получить Джерри?

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что из двузначных чисел на 9 делятся только 18, 27, 36, 45, и числа, получающиеся из них перестановкой цифр (также есть 90 и 99, но у нас нет в распоряжении цифры 0 и только одна цифра 9). Таким образом, только четыре пары цифр из имеющихся могут образовать число, делящееся на 9. Чтобы получить пример, надо все эти пары собрать в любом порядке:

1 8 2 7 3 6 4 5 9.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказано, что 5 двузначных чисел, делящихся на 9, получить нельзя.

3 б. Приведен пример с 4 двузначными числами, делящимися на 9.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.2. Квадрат со стороной 1 м разрезан на три прямоугольника с равными периметрами. Чему могут равняться эти периметры? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: $8/3$ или $5/2$.

Решение. Заметим, что с точностью до поворота разрезать квадрат на три прямоугольника можно только следующими двумя способами:



Первое разрезание. Заметим, что если у прямоугольников одинаковая длина, то периметр может совпадать только если и ширина одинаковая. Следовательно, такие прямоугольники равны, и ширина у них по $1/3$, то есть периметр равен $2 + 2/3 = 8/3$.

Второе разрезание. Пусть левый прямоугольник имеет размеры $x \times 1$, а правые, обладающие одинаковой шириной и, тем самым, длиной, имеют размеры $(1 - x) \times 1/2$. Равенство периметров записывается в виде уравнения

$$2 + 2x = 2 \cdot (1 - x) + 2 \cdot 1/2.$$

Отсюда $x = \frac{1}{4}$ и периметры равны $2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 2 б. Задача решена для первого случая.
- 4 б. Задача решена для второго случая.
- 1 б. Есть верный ответ.

Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:

- 1 б. Верно составлено уравнение, но допущена арифметическая ошибка. За каждый из случаев снимается не более чем по 1 баллу.

Задача 6.3. Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов.» Какое максимальное число рыцарей могло быть? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. Для начала заметим, что графства, у которых ровно три соседних, обязательно управляются графами-лжецами (рис. ??). Следовательно, и угловые графства тоже управляются лжецами, поскольку оба их соседа лжецы.

	Л	Л	Л	
Л				Л
Л				Л
Л				Л
	Л	Л	Л	

Рис. 1: к решению задачи ??

Осталось разобраться с центральным квадратом 3×3 . Все клетки не могут быть заняты рыцарями, поскольку тогда у центрального рыцаря все соседи являются рыцарями. Значит, рыцарей не более 8. Пример с восемью рыцарями приведен на рис. ??.

	Р	Р	Р	
	Р		Р	
	Р	Р	Р	

Рис. 2: к решению задачи ??

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- 4 б. Доказано, что рыцари могут находиться только в центральном квадрате 3×3 .
- 2 б. Приведен пример для 8 рыцарей.

Следующий критерий используется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.4. Все делители натурального числа n выписали в строку в порядке возрастания от 1 до самого n . Оказалось, что предпоследнее число в строке в 101 раз больше второго. Для какого наибольшего n это возможно?

Ответ: 101^3 .

Решение. Пусть p — минимальный делитель числа n , отличный от 1, тогда p — простое число, иначе были бы меньшие делители. Таким образом, первые два числа в строке будут равны 1 и p , а последние два — равны $\frac{n}{p}$ и n . По условию задачи имеем $\frac{n}{p} = 101p$, или, иными словами, $n = 101p^2$.

Поскольку p — наименьший простой делитель n , верно неравенство $p \leq 101$. Следовательно, $n \leq 101^3$. Число 101^3 подходит. \square

Критерии

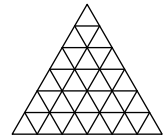
Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

4 б. Получено уравнение вида $\frac{n}{p} = 101p$.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 6.5. Равносторонний треугольник разделен на 36 одинаковых равносторонних треугольничков. При каких k его можно разрезать по линиям сетки на k одинаковых многоугольников?



Ответ: 1, 3, 4, 9, 12, 36.

Решение. В первую очередь отметим, что k должно быть делителем числа 36. На рис. ?? указаны разрезания на 1, 3, 4, 9, 12, 36 одинаковых частей. Осталось доказать, что на 2,

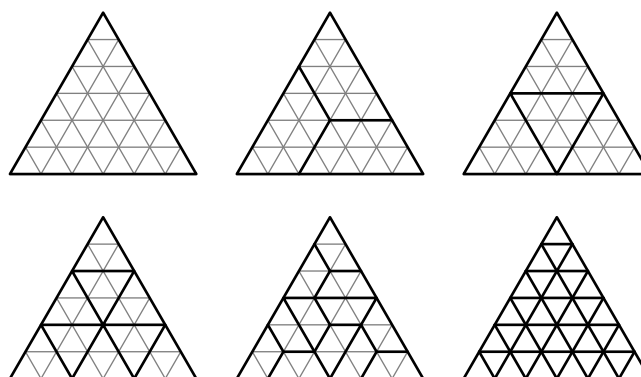


Рис. 3: к решению задачи ??

6 и 18 частей треугольник разрезать нельзя.

Раскрасим треугольник в белый и черный цвет «шахматной» раскраской, т. е. так, чтобы соседние треугольнички были разных цветов и угловые треугольнички оказались черными (рис. ??). Тогда у нас будет 15 белых треугольничков и 21 черный.

Если теперь предположить, что нам удалось разрезать треугольник на две равные части, и в одной из них n белых и m черных треугольничков, то во второй будет либо тоже n белых

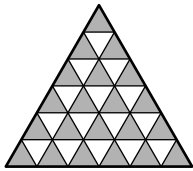


Рис. 4: к решению задачи ??

и m черных, либо наоборот. В первом случае оказывается, что суммарное количество черных во всем треугольнике равно $2m$, но оно нечетно; во втором случае суммарные количества черных и белых оказываются оба равны $n + m$, но они различны. Так или иначе, мы приходим к противоречию.

Разрезание на 18 равных частей невозможно, поскольку каждая такая часть обязана состоять из двух соседних треугольничков, то есть из одного белого и одного черного; при суммировании всех частей это опять-таки вступит в противоречие с тем, что черных и белых не поровну.

Наконец, покажем, что невозможно разрезание на 6 одинаковых фигур. Предположим, что такое разрезание существует, тогда каждая фигура состоит из 6 маленьких треугольничков. Пусть в одной из фигур n черных и m белых треугольничков. Остальные фигуры разрезания состоят либо тоже из n черных и m белых, либо наоборот, из m черных и n белых. При этом n и m имеют одинаковую четность, так как $n + m = 6$. Тогда, если просуммировать количество черных треугольничков по всем шести фигурам, мы получим сумму шести чисел одинаковой четности, то есть четное значение; однако, общее количество черных треугольничков нечетно.

Замечание 1. Доказать, что разрезания на две равных части не существует, можно и другим способом: ровно в одной из частей такого разрезания будут содержаться две вершины исходного треугольника, а значит, в одной из частей будет отрезок, равный по длине стороне треугольника, а в другой — нет.

Замечание 2. Доказать, что разрезание на 18 «ромбиков» из двух треугольничков не существует, также можно другим способом. Рассмотрим шесть треугольничков, прилегающих к одной из сторон. Ромбик, содержащий крайний из них, выделяется однозначно; ромбик, содержащий следующий треугольничек, также строится однозначно, и т. д., а с шестым треугольничком ромбик построить уже оказывается невозможно. \square

Критерии

Если в ответе или в решении не учтен случай разрезания на 1 часть — баллы не снижаются.

То, что k является делителем 36, считается очевидным; за использование этого факта без обоснования баллы не снижаются; за его доказательство баллы не добавляются.

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

2 б. Приведены или описаны верные примеры разрезаний на k частей для всех k из 3, 4, 9, 12, 36.

Если имеются примеры не для всех таких k , но хотя бы для двух различных из 3, 4, 9, 12, 36, то вместо 2 баллов по этому критерию дается 1.

2 б. Доказано, что на 2 части разрезать нельзя.

2 б. Доказано, что на 6 частей разрезать нельзя.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2019
Заключительный этап.

1 б. Доказано, что на 18 частей разрезать нельзя.

Следующий критерий применяется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.

7 класс

Задача 7.1. У Джерри есть девять карточек с цифрами от 1 до 9. Он выкладывает их в ряд, образуя девятизначное число. Том выписывает на доску все 8 двузначных чисел, образованных соседними цифрами (например, для числа 789456123 это числа 78, 89, 94, 45, 56, 61, 12, 23). За каждое двузначное число, делящееся на 9, Том отдает Джерри кусочек сыра. Какое наибольшее количество кусочков сыра может получить Джерри?

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что из двузначных чисел на 9 делятся только 18, 27, 36, 45, и числа, получающиеся из них перестановкой цифр (также есть 90 и 99, но у нас нет в распоряжении цифры 0 и только одна цифра 9). Таким образом, только четыре пары цифр из имеющихся могут образовать число, делящееся на 9. Чтобы получить пример, надо все эти пары собрать в любом порядке:

$$182736459.$$

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказано, что 5 двузначных чисел, делящихся на 9, получить нельзя.

3 б. Приведен пример с 4 двузначными числами, делящимися на 9.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.2. Решите ребус

$$ABCDEF \cdot 3 = BCDEF A.$$

Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: $142857 \cdot 3 = 428571$ и $285714 \cdot 3 = 857142$.

Решение. Обозначим пятизначное число $BCDEF$ через x . Тогда этот ребус можно переписать в виде соотношения $(100000 \cdot A + x) \cdot 3 = 10x + A$, которое равносильно уравнению $29999 \cdot A = 7x$, или $42857 \cdot A = x$.

Заметим, что цифры $A \geq 3$ не подходят, так как число $42857 \cdot A$ будет шестизначным, каким не может являться число x .

При $A = 1$ получаем, что $42857 = BCDEF$, т. е. $B = 4, C = 2, D = 8, E = 5, F = 7$.

При $A = 2$ получаем, что $2 \cdot 42857 = 85714 = BCDEF$, т. е. $B = 8, C = 5, D = 7, E = 1, F = 4$.

Оба этих варианта подходят.

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Составлено уравнение вида $(100000 \cdot A + x) \cdot 3 = 10x + A$ или эквивалентное ему.

5 б. Составлено такое уравнение, и верно найдено одно из решений.

В отсутствие указанных выше продвижений следующие критерии суммируются:

- 1 б. Есть верный ответ.
- 2 б. Доказано, что $A = 1$ или $A = 2$.

Если доказано только, что $A \leq 3$, то ставится 1 балл вместо 2.

Задача 7.3. У скупого рыцаря есть 5 сундуков с золотом: в первом сундуке 1001 золотая монета, во втором — 2002, в третьем — 3003, в четвертом — 4004, в пятом — 5005. Каждый день скупой рыцарь выбирает 4 сундука, забирает из них по 1 монете и перекладывает в оставшийся сундук. Спустя какое-то время в первом сундуке не осталось монет, а еще в одном сундуке было ровно 2019 монет. В каком?

Ответ: в пятом.

Решение. Посмотрим на остатки от деления на 5 количеств монет в сундуках. Каждый день в каждом сундуке количество монет либо уменьшается на 1, либо увеличивается на 4, а значит остаток от деления на 5 всегда уменьшается на 1 (если он был 0, то станет равным 4). Поскольку спустя некоторое время в первом сундуке не осталось монет, количество дней, которое прошло, равно $5k + 1$ для некоторого натурального k , и в каждом сундуке остаток уменьшился на 1. Поскольку 2019 дает остаток 4 при делении на 5, то такое количество монет могло остаться только в пятом сундуке. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Присутствует идея рассмотреть остатки при делении на 5.
- 1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AYB = \angle AXC = 134^\circ$. На луче YB за точку B отметили точку M , а на луче XC за точку C отметили точку N . Оказалось, что $MB = AC$, $AB = CN$. Найдите $\angle MAN$.

Ответ: 46° .

Решение. Заметим, что $\angle ACN = \angle CAX + \angle AXC = \angle BAY + \angle AYB = \angle ABM$. Добавляя

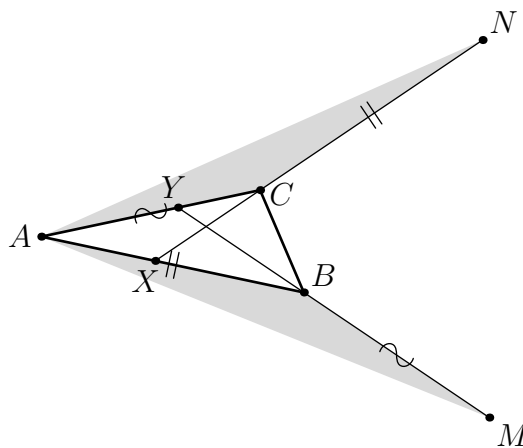


Рис. 1: к решению задачи ??

к полученному равенству углов равенства отрезков $AC = BM$ и $AB = CN$, заключаем, что по первому признаку треугольники ACN и MBA равны (рис. ??), а значит, $\angle NAC = \angle AMB$. Тогда верна цепочка равенств $\angle MAN = \angle NAC + \angle CAB + \angle BAM = \angle AMB + \angle YAB + \angle BAM = \angle YAM + \angle AMY = 180^\circ - \angle AYB = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 5 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.
- 3 б. Доказано, что треугольники ACN и MBA равны.
- 1 б. Есть верный ответ.

Задача 7.5. Хромая ладья совершает ходы то на одну клетку, то на две, обязательно чередуя расстояние; направление хода при этом можно выбирать произвольно (в любую из четырех сторон). Какое максимальное количество клеток доски 6×6 она сможет посетить, если посещать одну и ту же клетку дважды запрещено, но можно самим выбрать клетку старта и первый ход?

Ответ: 34.

Решение. Пример для 34 клеток приведен на рис. ?. Посещенные клетки пронумерованы числами от 1 до 34.

5	2	4	3	13	10
6	1	7	8	14	9
28	31		34	12	11
27	32		33	15	16
29	30	20	19	21	18
26	25	23	24	22	17

Рис. 2: к решению задачи ??

Покажем, что 35 и более клеток посетить не удастся. Для этого разобьем квадрат 6×6 на девять квадратов 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке (рис. ??). Образуется

Рис. 3: к решению задачи ??

ся 20 черных клеточек и 16 белых. Каждый ход длины 2 связывает две клетки разного

цвета, причем для разных «длинных» ходов соответствующие пары клеток не пересекаются. Поскольку белых клеток 16, количество длинных ходов не превосходит 16. В силу чередования это гарантирует, что общее количество ходов не превосходит 33, а значит, количество посещенных клеток не превосходит 34. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Построен пример для обхода 34 клеток.
- 3 б. Доказано, что 35 клеток посетить не удастся.
- 1 б. Построен пример обхода 32 или 33 клеток.
- 1 б. Есть верный ответ.

8 класс

Задача 8.1. Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов.» Какое максимальное число рыцарей могло быть? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.)

Ответ: 8.

Решение. См. решение задачи ??.

□

Задача 8.2. Определите все пары натуральных чисел n и m , для которых числа $n^2 + 4m$ и $m^2 + 5n$ являются квадратами.

Ответ: $(m, n) = (2, 1), (22, 9), (9, 8)$.

Решение. Разберем два случая. Сначала предположим, что $m \leq n$. Тогда $n^2 + 4m \leq n^2 + 4n < (n+2)^2$. Следовательно, $n^2 + 4m = (n+1)^2$, откуда $4m = 2n + 1$, что невозможно из соображений четности.

Теперь предположим, что $n < m$. Тогда $m^2 + 5n < m^2 + 6m < (m+3)^2$, откуда либо $5n = 2m + 1$, либо $5n = 4m + 4$. Изучим каждый из этих подслучаев отдельно.

Если $5n = 2m + 1$, то $4m = 10n - 2$ и число $n^2 + 10n - 2$ является квадратом. Это квадрат числа, большего n и меньшего $n + 5$, той же четности, что и n . Следовательно, либо $n^2 + 10n - 2 = n^2 + 4n + 4$, либо $n^2 + 10n - 2 = n^2 + 8n + 16$. В итоге или $n = 1$ и $m = 2$, или $n = 9$ и $m = 22$.

Если же $5n = 4m + 4$, то $4m = 5n - 4$ и число $n^2 + 5n - 4$ является квадратом. Это квадрат числа, большего n и меньшего $n + 3$. Значит, либо $n^2 + 5n - 4 = n^2 + 2n + 1$, либо $n^2 + 5n - 4 = n^2 + 4n + 4$. Первое уравнение имеет нецелый корень, а второе дает $n = 8$, откуда $m = 9$.

Все полученные ответы подходят.

□

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

2 б. Есть полный верный ответ.

Если верного ответа нет, но найдено хотя бы одно из решений, то по этому критерию ставится 1 балл вместо 2.

3 б. Верно рассмотрен случай $m \leq n$.

3 б. Верно рассмотрен случай $n \leq m$.

2 б. Ни один из указанных выше двух случаев верно не рассмотрен, но присутствует идея оценить выражение точным квадратом (например, $m^2 + 5n < (m+3)^2$ или $n^2 + 4m < (n+2)^2$).

Задача 8.3. Сколько существует прямых, проходящих через точку $(0, 2019)$ и пересекающих параболу $y = x^2$ в двух точках с целыми координатами по оси y ?

Ответ: 9.

Решение. Вертикальная прямая, очевидно, не подходит. Все прямые, отличные от вертикальной и проходящие через точку $(0, 2019)$, задаются уравнением $y = kx + 2019$ с некоторым k . Пусть такая прямая пересекает параболу в точках (a, a^2) и (b, b^2) , причем a^2 и b^2 являются целыми числами. Без ограничения общности будем считать $a < b$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 = ka + 2019 \\ b^2 = kb + 2019. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получаем $a^2 - b^2 = k(a - b)$, и, поскольку $a \neq b$, заключаем, что $k = a + b$. Подстановкой полученного k в любое из уравнений системы приходим к соотношению $-ab = 2019$.

Заметим, что это равенство эквивалентно тому, что точки (a, a^2) и (b, b^2) лежат на одной прямой. В этом можно убедиться, подставив $k = a + b$ и $2019 = -ab$ в приведенную выше систему.

Возведя уравнение в квадрат, получаем $a^2b^2 = 2019^2$, причем a^2 и b^2 — целые неотрицательные числа (но a и b не обязательно целые!). Учитывая разложение $2019^2 = 3^2 \cdot 673^2$ на простые множители, мы имеем 9 вариантов разложения числа 2019^2 в произведение $a^2 \cdot b^2$ (с учетом порядка сомножителей). Так как a и b разных знаков, и $a < b$, то каждый такой вариант соответствует единственному решению $a = -\sqrt{a^2}$, $b = \sqrt{b^2}$ и, соответственно, одной искомой прямой.

Замечание. На схожей идее основана известная геометрическая конструкция — решето Матиясевича–Стечкина. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству $-ab = 2019$ из решения, но дальнейший подсчет числа прямых по какой-то причине произведен неправильно.
- 2 б. Получено уравнение, эквивалентное равенству $k = a + b$ из решения.
- 1 б. Есть верный ответ.

Задача 8.4. Расстояния от точки P , лежащей внутри равностороннего треугольника, до его вершин равны 3, 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C таким образом, что $PA = 3$, $PB = 4$ и $PC = 5$. Построим точку C_1 такую, что ACC_1 — равносторонний треугольник и отметим внутри него точку P_1 такую, что $P_1A = 3$, $P_1C = 4$ и $P_1C_1 = 5$ (рис. 1). Треугольники AP_1C и APB равны по трем сторонам, поэтому $\angle P_1AC = \angle PAB$. Следовательно, $\angle PAP_1 = 60^\circ$, т. е. треугольник APP_1 равносторонний. (То же заключение можно получить, воспользовавшись поворотом вокруг точки A на 60° .) В итоге имеем $PP_1 = 3$, $PC = 5$, $P_1C = 4$. Из этого по теореме Пифагора следует, что треугольник PP_1C прямоугольный с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5, и его площадь равна 6. Площадь равностороннего треугольника PP_1A со стороной 3 равна $9\sqrt{3}/4$. Следовательно, учитывая равенство треугольников APB и AP_1C , выводим

$$S_{APB} + S_{CPA} = S_{AP_1C} + S_{CPA} = S_{CPP_1} + S_{APP_1} = 6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

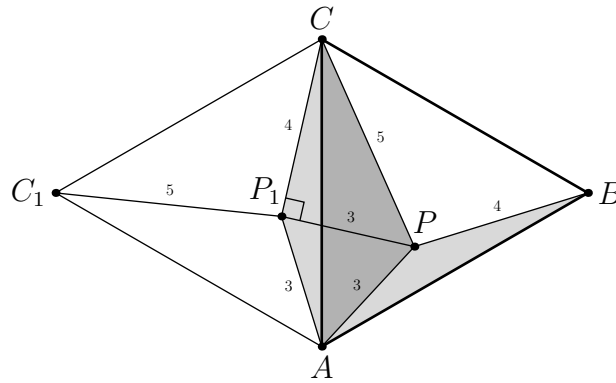


Рис. 1: к решению задачи 8.4

Аналогичными рассуждениями приходим к равенствам

$$S_{CPA} + S_{BPC} = 6 + \frac{25\sqrt{3}}{4}, \quad S_{BPC} + S_{APB} = 6 + \frac{16\sqrt{3}}{4}.$$

Складывая три полученных соотношения и деля пополам, получаем

$$S_{ABC} = 9 + \frac{25\sqrt{3}}{4}. \quad \square$$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 4 б. Верно найдена любая из сумм площадей $S_{APB} + S_{CPA}$, $S_{CPA} + S_{BPC}$ или $S_{BPC} + S_{APB}$.
- 3 б. Верный алгоритм нахождения любой из указанных выше сумм площадей, но допущена арифметическая ошибка.
- 2 б. Приведен верный ответ.

Задача 8.5. На танцевальный вечер пришло n пар *партнеров*, каждая пара — это девушка и юноша. Вечер состоит из не менее чем n танцев, в каждом из которых участвуют все пришедшие. Изначально юноши рассаживаются за круглым столом. На первый танец каждая девушка приглашает одного из юношей (не обязательно своего партнера). После танца девушка проводит юношу, с которым она танцевала, к его месту за столом, и на следующий танец приглашает следующего за ним юношу против часовой стрелки.

Для каких n можно рассадить юношей за столом и указать пары для первого танца так, чтобы в каждом танце хотя бы одна девушка танцевала с партнером, с которым пришла на вечер?

Ответ: Для нечетных n .

Решение. Покажем, как выполнить условие для нечетных $n = 2k + 1$. Пронумеруем юношей за столом и соответствующих им девушек числами $1, 2, \dots, n$. Пусть девушка с номером j на первый танец пригласит юношу с номером $2j$, если $j \leq k$, и с номером $2j - n$, если $k + 1 \leq j \leq n$. Тогда первый танец девушка с номером n будет танцевать со своим партнером. Далее, несложно видеть, что j -ый танец девушка с номером $n - j + 1$ будет танцевать со своим партнером. Действительно, при $j \leq k + 1$ девушка с номером $n - j + 1$ первый танец танцует с юношей с номером $n - 2j + 2$, а j -ый танец с юношей с номером

$n - 2j + 2 + (j - 1) = n - j$, то есть со своим партнером. Если же $j \geq k + 2$, то первый танец девушка с номером $n - j + 1$ танцует с юношей с номером $2n - 2j + 2$, а j -ый с юношей с номером $2n - 2j + 2 + (j - 1) - n = n - j + 1$, то есть опять же со своим партнером. Отметим, что вычитание n в последнем вычислении произошло из-за перехода от n -го юноши к первому.

Покажем, что для четных n выполнить условие задачи не получится. Пронумеруем юношей за столом $1, 2, \dots, n$. Пусть в изначальной расстановке с юношей под номером j танцует девушка с номером a_j . Тогда, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо чтобы величины $a_j - j$ имели разные остатки при делении на n . Просуммируем числа $a_j - j$ по всем j от 1 до n . Заметим, что это сумма, с одной стороны, равна 0, а с другой стороны, при делении на n дает такой же остаток, как и сумма $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Однако при четных n это выражение не делится на n , что приводит к противоречию. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Показано, как выполнить условие для нечетного n .
- 3 б. Доказано, что для четного n нельзя выполнить условие.

9 класс

Задача 9.1. Рыбак Вася поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины, составляющие 35% веса всего улова, он положил в холодильник. Три самые маленькие, составляющие $\frac{5}{13}$ веса всех оставшихся, рыбак отдал коту. Всю остальную пойманную рыбу Вася съел сам. Сколько рыб поймал Вася?

Ответ: 10.

Решение. Из условия следует, что коту досталось $65\% \cdot \frac{5}{13} = 25\%$ веса улова. Следовательно, Вася съел 40% пойманной рыбы. Если обозначить через x количество съеденных Васей рыб, то средний вес съеденных рыб в процентах от веса всего улова составляет $40/x$. По условию, указанная величина не превосходит среднего веса рыб в холодильнике и не меньше среднего веса рыб, съеденных котом. В результате получаем неравенство

$$\frac{35}{3} \leq \frac{40}{x} \leq \frac{25}{3},$$

которому удовлетворяет только $x = 4$. Таким образом, общее количество пойманных рыб равно $4 + 3 + 3 = 10$. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

2 б. Верно посчитан процент съеденных Васей рыб.

2 б. Составлено хотя бы одно из неравенств $\frac{35}{3} \leq \frac{40}{x} \leq \frac{25}{3}$.

Следующий критерий применяется только в отсутствие баллов за другие продвижения:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 9.2. На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается интровертом, если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? Приведите все ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 24.

Решение. Пусть a — количество пар знакомых друг с другом интровертов, а b — количество пар знакомых, в которых один из пары является интровертом. Каждый пришедший на вечеринку входит не менее чем в три пары, поскольку у него не менее трех знакомых-интровертов, при этом пары интроверт-интроверт учитываются дважды. Значит, $2a + b \geq 3 \cdot 24$.

С другой стороны, каждый интроверт может входить не более чем в три пары, то есть $2a + b$ не больше утроенного числа интровертов. В результате заключаем, что утроенное число интровертов не меньше утроенного числа гостей, что возможно лишь если все пришедшие на вечеринку являются интровертами. □

Другое решение. Из условия следует, что каждый интроверт знаком с тремя интровертами и больше ни с кем; то есть знакомства между интровертами и экстравертами (назовем так остальных людей) невозможны. Но тогда экстраверт не может быть знаком с тремя интровертами, как того требует условие. Значит, экстравертов на этой вечеринке просто нет. □

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов.

Решения, необоснованно использующие то, что некоторые случаи являются «оптимальными» («наилучшими», «наихудшими», и т. п.), не засчитываются.

В отсутствие верного решения используется следующий критерий:

1 б. Есть верный ответ.

Задача 9.3. Окружность ω с центром в точке I вписана в выпуклый четырехугольник $ABCD$ и касается стороны AB в точке M , и стороны CD — в точке N , при этом $\angle BAD + \angle ADC < 180^\circ$. На прямой MN выбрана точка $K \neq M$ такая, что $AK = AM$. В каком отношении прямая DI может делить отрезок KN ? Приведите все возможные ответы и докажете, что других нет.

Ответ: 1 : 1.

Решение. Пусть P — точка пересечения прямых AB и CD (такая есть по условию, иначе

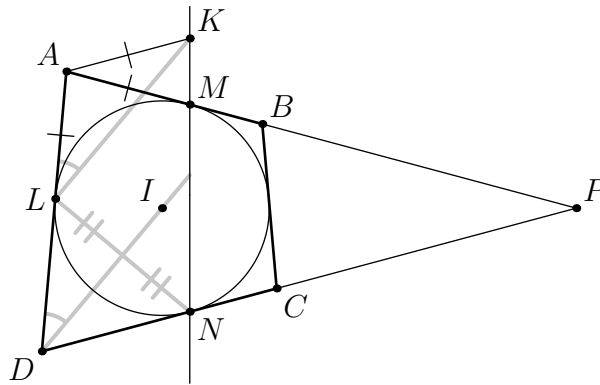


Рис. 1: к решению задачи 9.3

$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$). Тогда треугольник PMN равнобедренный, а значит,

$$\angle BMN = \angle CNM = \frac{180^\circ - \angle MPN}{2} = \frac{\angle BAD + \angle ADC}{2} < 90^\circ.$$

Следовательно, точка K лежит на продолжении отрезка MN за точку M , причем

$$\angle CNM = \angle BMN = \angle KMA = \angle AKM,$$

в частности, треугольники AKM и PNM подобны.

Рассмотрим треугольник KAL . Он равнобедренный ($AK = AM = AL$) и, следовательно,

$$\begin{aligned} \angle ALK &= 90^\circ - \frac{\angle KAL}{2} = 90^\circ - \frac{\angle KAM + \angle MAL}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{\angle PAD + \angle APD}{2} = \frac{\angle ADP}{2} = \angle ADI. \end{aligned}$$

Это означает, что $KL \parallel DI$.

Поскольку DI — биссектриса равнобедренного треугольника LDN , то DI делит пополам отрезок LN . Также из условия параллельности ID и KL следует, что DI — средняя линия треугольника KNL , а значит, прямая DI делит отрезок KN пополам. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

3 б. Доказана параллельность DI и LK .

2 б. Доказана параллельность AK и DC .

1 б. Отмечено равенство $\angle AMN = \angle DNM$ или смежных с ними.

За отсутствие обоснования взаимного расположения точек (например, положения точки M относительно K и N) баллы не снижаются.

Задача 9.4. Известно, что число 400 000 001 является произведением двух простых чисел p и q . Найдите сумму натуральных делителей числа $p + q - 1$.

Ответ: 45864.

Решение. Число $n = 400\,000\,001$ можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}n &= 4 \cdot 10^8 + 1 = 4 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^4 + 1 - 4 \cdot 10^4 = \\ &= (2 \cdot 10^4 + 1)^2 - (2 \cdot 10^2)^2 = (2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1)(2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 + 1).\end{aligned}$$

Поскольку n есть произведение двух простых чисел p и q , то именно это разложение и получено выше. Следовательно,

$$p + q - 1 = 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 1 + 2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 + 1 - 1 = 4 \cdot 10^4 + 1.$$

Для разложения последнего числа на множители применим тот же трюк.

$$\begin{aligned}4 \cdot 10^4 + 1 &= 4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 1 - 4 \cdot 10^2 = (2 \cdot 10^2 + 1)^2 - (2 \cdot 10)^2 = \\ &= (201 - 20)(201 + 20) = 181 \cdot 221 = 13 \cdot 17 \cdot 181.\end{aligned}$$

Сумма натуральных делителей полученного числа может быть найдена, например, по формуле

$$(13 + 1)(17 + 1)(181 + 1) = 45864. \quad \square$$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

5 б. Получено правильное разложение на простые множители числа $p + q - 1$, но в результате ошибки получен неправильный ответ.

4 б. Ответ дан в предположении, что $p + q - 1 = 181 \cdot 221$ — разложение на простые множители.

3 б. Правильно вычислено значение $p + q - 1$.

В любом из случаев выше снижаются баллы за следующий недочет:

–2 б. Приведено верное разложение данного в задаче числа на множители, но не показано ни откуда это разложение взялось, ни что оно действительно в произведении дает нужное число.

Задача 9.5. Положительные числа a , b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2 + ab + b^2 = 1, \quad b^2 + bc + c^2 = 3, \quad c^2 + ca + a^2 = 4.$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Решение. Отложим из одной точки T отрезки TA , TB и TC с длинами a , b и c соответ-

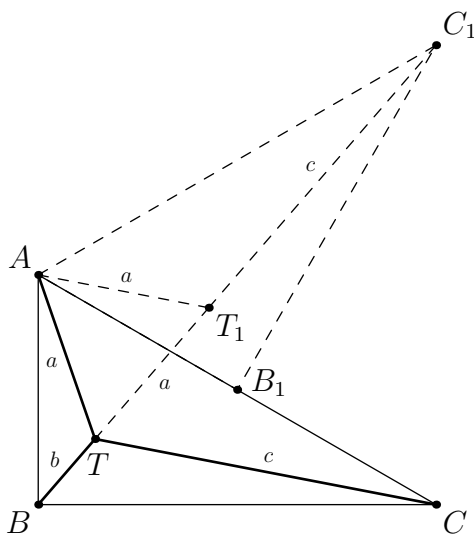


Рис. 2: к решению задачи 9.5

ственно так, чтобы $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Тогда по теореме косинусов, при учете соотношения $\cos 120^\circ = -1/2$, получаем, что $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = 2$. Видим, что по теореме Пифагора треугольник ABC прямоугольный ($\angle B = 90^\circ$), причем его катет AB в два раза короче гипотенузы AC , откуда следуют равенства $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$.

Отметим точку B_1 — середину гипотенузы AC и такую точку C_1 , что $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ и точки C_1 и B по разные стороны от AC (рис. 2). По построению треугольники ABC и AB_1C_1 отличаются поворотом на 60° с центром в точке A . Отметим точку T_1 в треугольнике AB_1C_1 , соответствующую точке T в треугольнике ABC . Тогда $BT = B_1T_1$, $CT = C_1T_1$ и $AT = AT_1 = TT_1$. Последнее равенство обусловлено тем, что треугольник ATT_1 получается равнобедренным, поскольку точки T и T_1 отличаются поворотом на 60° с центром в точке A .

Осталось заметить, что точки B , T , T_1 и C_1 лежат на одной прямой, поскольку $\angle ATB = \angle AT_1C_1 = 120^\circ$ и $\angle ATT_1 = \angle AT_1T = 60^\circ$. В итоге получаем, что

$$a + b + c = AT + BT + CT = BT + TT_1 + T_1C_1 = BC_1,$$

а BC_1 может быть вычислено из теоремы косинусов для треугольника BC_1A :

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 + AB \cdot AC_1 = 1 + 4 + 1 \cdot 2 = 7. \quad \square$$

Другое решение. Получим ответ алгебраическими методами. Вычтем из первого равенства второе. Получим $(a - c)(a + c) + b(a - c) = -2$, т.е.

$$a + b + c = \frac{-2}{a - c}.$$

Аналогично, вычитая из второго равенства третье и из третьего первое, получим

$$a + b + c = \frac{-2}{a - c} = \frac{-1}{b - a} = \frac{3}{c - b}.$$

Если обозначить $s = a + b + c$, то можно переписать предыдущие соотношения как

$$a - c = -2s^{-1}, \quad b - a = -s^{-1}, \quad c - b = 3s^{-1}.$$

Теперь сложим все исходные равенства:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca = 8. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что левую часть можно выразить следующим образом:

$$(a + b + c)^2 + \frac{1}{2}((a - c)^2 + (b - a)^2 + (c - b)^2) = 8,$$

что означает

$$s^2 + \frac{1}{2}(4s^{-2} + s^{-2} + 9s^{-2}) = 8.$$

Домножением на s^2 получаем квадратное уравнение относительно s^2

$$s^4 - 8s^2 + 7 = 0,$$

корнями которого являются $s^2 = 1$ и $s^2 = 7$. Однако первое из значений явно вступает в противоречие с равенством (1):

$$s^2 = (a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ca = 4.$$

Значит, остается $s^2 = 7$, то есть $a + b + c = s = \sqrt{7}$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 6 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.
- 6 б. Получено несколько ответов и не исключены неверные.
- 3 б. Произведен переход к геометрической задаче: рассмотрен треугольник со сторонами 1, $\sqrt{3}$, 2 и точка внутри него на расстояниях a , b , c от вершин.
- 2 б. Разности $a - b$, $b - c$ и $c - a$ выражены через $a + b + c$.
- 1 б. Есть верный ответ.
- 0 б. Алгебраические преобразования, не приведшие к решению.

10 класс

Задача 10.1. Из города A в город B , находящийся на расстоянии 240 км от A , со скоростью 40 км/ч выходит автобус. Одновременно с ним из B в A выезжает автомобиль со скоростью v км/ч. Через полчаса после встречи с автобусом автомобиль, не доезжая до города A , поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B . Определить все значения v , при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

Ответ: $v \in (56; 120)$.

Решение. Пусть t — это время встречи, измеренное в часах. Тогда по условию $t = \frac{240}{v+40}$. Далее в условии сказано, что автомобиль, проехав полчаса, не доехал до пункта A , что приводит к неравенству $v(t + 0,5) < 240$, которое равносильно следующему:

$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v+40} > 0,5.$$

Учитывая положительность знаменателей, получаем равносильное квадратичное неравенство $v^2 + 40v - 19200 < 0$, откуда $v \in (-160, 120)$. Так как v положительно, заключаем, что $v < 120$.

Далее, условие о том, что автомобиль, развернувшись, приедет в B раньше автобуса, можно трактовать так: удвоенное время, затраченное автомобилем от точки старта до разворота, меньше времени $240/40 = 6$ ч, необходимого для автобуса. Получаем

$$2 \left(\frac{240}{v+40} + 0,5 \right) < 6,$$

что эквивалентно неравенству $v > 56$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

2 б. Получена только оценка снизу.

2 б. Получена только оценка сверху.

Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:

–1 б. В ответ ошибочно включены один или оба конца интервала.

Задача 10.2. Окружность ω с центром в точке I вписана в выпуклый четырехугольник $ABCD$ и касается стороны AB в точке M , и стороны CD — в точке N , при этом $\angle BAD + \angle ADC < 180^\circ$. На прямой MN выбрана точка $K \neq M$ такая, что $AK = AM$. В каком отношении прямая DI может делить отрезок KN ? Приведите все возможные ответы и докажете, что других нет.

Ответ: 1 : 1.

Решение. См. решение задачи ?? □

Задача 10.3. Определите все натуральные числа n , имеющие ровно \sqrt{n} натуральных делителей (включая 1 и само число n).

Ответ: 1 и 9.

Решение. Во-первых, заметим что $n = 1$ подходит, и будем считать, что $n \geq 2$. Во-вторых, из условия следует, что $n = k^2$ для некоторого натурального k . Квадраты натуральных чисел имеют нечетное количество делителей, поскольку все делители, кроме основания квадрата, разбиваются на пары вида d и n/d . Таким образом, k — нечетное число, большее 1. Пусть $k = 2m + 1$ для некоторого натурального m . Число n имеет m делителей, меньших k , и m делителей, больших k , причем все делители нечетны. Это означает, что n делится на все нечетные натуральные числа, меньшие k , поскольку их ровно m .

В частности, k^2 делится на $k - 2$. Поскольку $k^2 - 4 = (k - 2)(k + 2)$ тоже делится на $k - 2$, то и разность $4 = k^2 - (k^2 - 4)$ кратна числу $k - 2$. Осталось заметить, что $k - 2$ — нечетный делитель числа 4, то есть $k - 2 = 1$, откуда $k = 3$ и $n = 9$. \square

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- 1 б. Отмечается, что все делители числа n нечетные.
- 1 б. Установлена нечетность числа n .
- 1 б. Отмечено, что число является точным квадратом.

Верный ответ без верного решения не оценивается.

Задача 10.4. Положительные числа a , b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2 + ab + b^2 = 1, \quad b^2 + bc + c^2 = 3, \quad c^2 + ca + a^2 = 4.$$

Найдите $a + b + c$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Решение. См. решение задачи ??.

\square

Задача 10.5. В каждой клетке квадратной таблицы размером 200×200 написали по действительному числу, по модулю не превосходящему 1. Оказалось, что сумма всех чисел равна нулю. Для какого наименьшего S можно утверждать, что в какой-то строке или каком-то столбце сумма чисел заведомо окажется по модулю не превышающей S ?

Ответ: 100.

Решение. Сначала покажем, что $S < 100$ не подойдет. Разделим таблицу на четыре квадрата 100×100 . Правый верхний квадрат заполним числами $+1$, а левый нижний — числами -1 . Остальные клетки заполним нулями. Легко видеть, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна ± 100 .

Теперь покажем, что $S = 100$ подходит. Предположим, что для некоторой таблицы это не так, то есть суммы во всех её строках и столбцах оказались либо больше 100, либо меньше -100 . Заметим, что можно менять местами строки в таблице, не нарушая это свойство и условие задачи.

Поменяем местами строки так, чтобы их суммы убывали сверху вниз. Разделим таблицу на две половины 100×200 , верхнюю и нижнюю. Заметим, что либо в верхней половине все строки имеют положительную сумму, либо в нижней — все отрицательную. Тогда в одной из половин сумма по модулю больше 10 000. Так как общая сумма всех чисел равна нулю, то в другой половине сумма такая же по модулю и противоположная по знаку.

Теперь отсортируем столбцы так, чтобы их суммы убывали слева направо. (Суммы в строках при этом не меняются.) Аналогично, суммы в правой и в левой половине таблицы оказались по модулю больше 10 000.

Разобьем таблицу на четыре квадрата 100×100 , суммы в них обозначим за A, B, C, D :

A	B	$A + B > +10\,000$	$A + C > +10\,000$
C	D	$C + D < -10\,000$	$B + D < -10\,000$

Заметим, что

$$2|A| + 2|D| \geq 2A - 2D = (A + B) + (A + C) - (B + D) - (C + D) > 40\,000.$$

Это означает, что одно из чисел A или D по модулю превосходит 10 000. Но в каждом из соответствующих квадратов всего 10 000 клеток, и числа в них по модулю не превосходят 1. Противоречие. \square

Критерии

Любое верное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- 1 б. Есть верный ответ.
- 1 б. «Пример». Доказано, что $S < 100$ невозможно (т. е. приведен пример или доказано его существование).
- 5 б. «Оценка». Доказано, что $S = 100$ подходит для любой расстановки чисел, удовлетворяющей условию. В отсутствие полного доказательства «оценки» засчитывается следующее частичное продвижение:
 - 1 б. Отмечается, что можно переставлять строки и столбцы, и есть идея упорядочить строки и столбцы по возрастанию или убыванию.

Оценки, необоснованно использующие то, что некоторые расстановки чисел являются «оптимальными» («наилучшими», «наихудшими», и т. п.), не засчитываются.

11 класс

Задача 11.1. Петя и Вася участвовали в выборах на должность президента шахматного клуба. К полудню у Пети было 25% голосов, а у Васи — 45%. После полудня на голосование приходили только друзья Пети (и, соответственно, голосовали только за него). В итоге у Васи осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов набрал Петя?

Ответ: 55%.

Решение. Пусть x — количество проголосовавших до полудня, а y — количество проголосовавших после. Тогда за Васю проголосовало $0,45x$ человек, что составляет 27% от $x + y$. Таким образом, получаем равенство $0,45x = 0,27(x + y)$, откуда $2x = 3y$. Согласно условию, Петя набрал голосов $0,25x + y$, вычислим, какую долю от $x + y$ составляет это количество:

$$\frac{0,25x + y}{x + y} = \frac{0,25 + y/x}{1 + y/x} = \frac{1/4 + 2/3}{1 + 2/3} = \frac{11}{20} = 55\%. \quad \square$$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое верное решение задачи.

6 б. Верное в целом решение, но в ответе указана разница между искомой величиной и начальным процентом голосов у Пети.

5 б. Верное в остальном решение с неправильным ответом, полученным в результате арифметической ошибки.

1 б. Есть верный ответ.

Другие промежуточные продвижения в решении не оцениваются.

Задача 11.2. Найдите все такие пары натуральных чисел m и n , что $m^{2019} + n$ делится на mn .

Ответ: $m = 1, n = 1$ и $m = 2, n = 2^{2019}$.

Решение. Из условия следует, что $m^{2019} + n$ делится на m , следовательно, n делится на m . Обозначая $n = mn_1$, заключаем, что $m^{2018} + n_1$ делится на mn_1 . Далее действуем по аналогии: выводим, что n_1 кратно m , вводим обозначение $mn_2 = n_1$ и приходим к тому, что $m^{2017} + n_2$ кратно mn_2 . Продолжая таким образом, приходим к тому, что n представляется в виде km^{2019} с некоторым натуральным k . При этом условие задачи переписывается так: $(k + 1)m^{2019}$ делится на km^{2020} , что возможно лишь при $k = 1$ и $m = 2$. \square

Критерии

- 7 б. Любое верное решение.
- 6 б. Приведено в целом верное решение, но указана только одна пара чисел.
- 2 б. Указаны оба ответа без решения, либо оно неверное.
- 1 б. Указан только один ответ без решения, либо оно неверное.

Задача 11.3. По кругу лежат 100 пирожков, из них 53 с капустой, а остальные — с рисом. Алексей знает, какие из них с чем, и хочет выбрать 67 подряд лежащих пирожков так, чтобы среди них было ровно k с капустой. При каких k ему это гарантированно удастся сделать независимо от расположения пирожков? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 35 или 36.

Решение. Набор из 67 пирожков, лежащих подряд, назовем отрезком. Два отрезка будем называть соседними, если наборы пирожков в них отличаются лишь парой крайних, то есть отрезки отличаются сдвигом на один пирожок. Тогда в двух соседних отрезках количества пирожков с капустой, очевидно, отличаются не более чем на 1. Следовательно, если в каких-то двух отрезках содержатся a и b пирожков с капустой, то для любого целого c между a и b найдется отрезок, содержащий ровно c пирожков.

Перейдем к решению задачи. Докажем, что найдется отрезок, содержащий хотя бы 36 пирожков с капустой и отрезок, содержащий не более 35. Для этого занумеруем пирожки числами от 1 до 100 так, чтобы 1-й пирожок был с рисом. Рассмотрим отрезки пирожков с номерами от 1-го до 67-го, от 68-го до 34-го (через 100-й), от 35-го до 1-го (через 100-й). В сумме эти три отрезка содержат все пирожки, кроме первого, по два раза, а первый — три раза. Таким образом, они в сумме содержат $2 \cdot 53 = 106$ пирожков с капустой, то есть в каком-то из трех отрезков содержится хотя бы 36 пирожков с капустой, а в каком-то — не более 35.

Учитывая вышесказанное, заключаем, что обязательно есть отрезок ровно с 35 пирожками и есть отрезок ровно с 36 пирожками.

Докажем, что других количеств может и не оказаться. Для этого расположим сначала 50 пирожков с рисом и 50 с капустой через один так, чтобы все пирожки с нечетными номерами были с рисом. В таком расположении каждый отрезок, начинающийся пирожком с рисом, содержит 33 пирожка с капустой, а начинающийся с пирожка с капустой содержит 34 пирожка с капустой. Осталось правильно заменить три пирожка с рисом на пирожки с капустой, чтобы все отрезки содержали 35 или 36 пирожков с капустой. Для этого достаточно заменить пирожки с номерами 1, 33 и 67. Тогда во всех отрезках кроме отрезка от 1-го до 67-го количество пирожков с капустой увеличится ровно на 2, а в отрезке от 1-го до 67-го увеличится на 3, что и даст требуемый результат. \square

Критерии

Следующие критерии суммируются:

- 3 б. «Пример». Показано, что никакие k , кроме 35 и 36, не подходят.
- 4 б. «Оценка». Доказано, что $k = 35$ и $k = 36$ подходят. В отсутствие полного доказательства «оценки» суммируются следующие частичные продвижения:
 - 2 б. Доказано, что если есть отрезки с a и b пирожками, то есть и все промежуточные.
 - 1 б. Доказано, что есть отрезок с не менее чем 35 пирожками.
 - 1 б. Доказано, что есть отрезок с не более чем 36 пирожками.

Задача 11.4. Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

Какие значения может принимать произведение xy ? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что при каждом положительном y функция

$$f_y(x) = \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y}$$

строго монотонно убывает на луче $(0; +\infty)$, поскольку знаменатели всех трех дробей возрастают. Следовательно, функция f_y принимает каждое значение не более одного раза. При этом нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} f_y(1/y) &= \frac{1}{1+1/y+1/y^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+1/y+y} = \\ &= \frac{y^2}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{y}{1+y+y^2} = 1, \end{aligned}$$

откуда и заключаем, что $x = 1/y$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 3 б. Отмечена монотонность левой части по x или по y .
- 3 б. Доказано, что для любого y существует не более одного x , удовлетворяющего уравнению.
- 1 б. Есть правильный ответ.

Задача 11.5. Определите количество возможных значений произведения $a \cdot b$, где a, b — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$2019^2 \leq a \leq b \leq 2020^2.$$

Ответ: $C_{2 \cdot 2019 + 2}^2 + 2 \cdot 2019 + 1 = 2 \cdot 2019^2 + 5 \cdot 2019 + 2 = 8\,162\,819$.

Решение. Предположим, что для каких-то двух различных пар $a \leq b$ и $a_1 \leq b_1$ из промежутка $[2019^2; 2020^2]$ выполнено равенство $ab = a_1b_1$. Не умаляя общности, считаем, что $a_1 < a \leq b < b_1$. При фиксированном произведении сумма чисел тем меньше, чем они ближе друг к другу, поэтому $a + b < a_1 + b_1$. Обозначая $m = a_1 + b_1$ и $n = b_1 - a_1$, заключаем, что верна цепочка неравенств

$$m^2 - n^2 = 4a_1b_1 = 4ab \leq (a + b)^2 \leq (a_1 + b_1 - 1)^2 \leq (m - 1)^2, \quad (1)$$

и, следовательно, $n^2 \geq 2m - 1 = 2n - 1 + 4a_1 \leq 2n - 1 + 4 \cdot 2019^2$. Полученное неравенство показывает, что $n - 1 \geq 2 \cdot 2019$, а это возможно, только если $a_1 = 2019^2$, $b_1 = 2020^2$. Кроме того, в соотношении (1) все неравенства должны обращаться в равенства. В частности, $a = b = 2019 \cdot 2020$.

В итоге заключаем, что равенство $ab = a_1b_1$ возможно только в одном единственном случае. Всего пар различных чисел из промежутка $[2019^2; 2020^2]$ в точности $C_{2 \cdot 2019 + 2}^2$. К ним для получения общего ответа надо прибавить пары совпадающих чисел, которых $2 \cdot 2019 + 2$, и вычесть единицу. Получаем ответ

$$C_{2 \cdot 2019 + 2}^2 + 2 \cdot 2019 + 1 = 2 \cdot 2019^2 + 5 \cdot 2019 + 2 = 8\,162\,819. \quad \square$$

Другое решение. Докажем, что равенство $ab = a_1b_1$ возможно только в одном случае, другим способом. Без ограничения общности считаем $a < a_1 \leq b_1 < b$. Через (x, y) далее обозначаем наибольший общий делитель чисел x и y . Положим $u = (a, a_1)$, и определим $v = a/u$, $w = a_1/u$. Подставив $a = uv$ и $a_1 = uw$ в равенство, получим $uvb = uwb_1$, то есть

$$vb = wb_1.$$

Поскольку v и w взаимно просты, b_1 делится на v .

Теперь заметим, что $(a_1 - a) : u$ и $(b_1 - a) : v$, откуда

$$(a_1 - a) \cdot (b_1 - a) \geq u \cdot v = a,$$

из чего по неравенству о средних получаем

$$\frac{a_1 + b_1 - 2a}{2} \geq \sqrt{(a_1 - a) \cdot (b_1 - a)} \geq \sqrt{a} \geq 2019,$$

то есть

$$\frac{a_1 + b_1}{2} - a \geq 2019. \quad (2)$$

Аналогично обозначив $s = (b, a_1)$, $t = b/s$, $r = a_1/s$, получаем

$$ta = rb_1,$$

откуда точно так же будет следовать, что $(b - b_1) : t$ и $(b - a_1) : s$, и

$$\frac{2b - a_1 - b_1}{2} \geq \sqrt{(b - a_1) \cdot (b - b_1)} \geq \sqrt{b} > 2019,$$

то есть

$$b - \frac{a_1 + b_1}{2} \geq 2020. \quad (3)$$

Складывая соотношения (2) и (3), выводим

$$b - a \geq 2019 + 2020 = 2020^2 - 2019^2.$$

Следовательно, $b = 2020^2$ и $a = 2019^2$, и все нестрогие неравенства выше должны обращаться в равенства. Неравенства о средних обратятся в равенство, только если члены равны, то есть $a_1 = b_1 = \sqrt{ab} = 2019 \cdot 2020$. \square

Критерии

- 7 б. Приведено полностью правильное решение
 - 2 б. Утверждается (без должного обоснования) единственность решения уравнения $ab = a_1b_1$ с различными парами $a \leq b$ и $a_1 \leq b_1$ и получен правильный ответ.
 - 1 б. Найдено только количество пар различных и совпадающих чисел из промежутка $[2019^2; 2020^2]$.
- Снижаются баллы за следующий недочет в решении, которое в остальном верно:
- 1 б. Допущены арифметические ошибки, не влияющие на ход решения.

Задача 11.6. В тетраэдре $ABCD$ выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD .

Решение. Обозначим внешнюю биссекторную плоскость двугранного угла тетраэдра $ABCD$ при ребре AB за S_{AB} ; аналогично для других ребер данного тетраэдра.

Лемма. Пусть в тетраэдре $ABCD$ выполнено равенство $\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD$. Тогда S_{AB} , S_{BD} , S_{AC} , S_{CD} параллельны одной прямой.

Доказательство леммы. Пусть $B'AC'$ — это образ треугольника BDC при параллельном переносе на вектор \overline{DA} , то есть точки B' и C' таковы, что $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DA}$. Тогда угол $B'AC'$ равен углу BDC из равенства соответствующих треугольников. Кроме того, углы CAC' и ACD равны как накрест лежащие при $C'A \parallel CD$ и секущей AD . Аналогично равны $BA B'$ и ABD . Тогда выполнено равенство $\angle BAC + \angle B'AC' = \angle BAB' + \angle CAC'$, которое является признаком того, что четырехгранный угол $ABCC'B'$ с вершиной A (обозначим его Ξ) описан вокруг некоторой сферы с центром I . Это означает, что биссекторные плоскости двугранных углов Ξ пересекаются по прямой AI .

Осталось заметить, что прямая AI искомая, так как биссекторные плоскости двугранных углов Ξ при ребрах AB и AC соответственно совпадают с S_{AB} и S_{AC} ; а биссекторные плоскости двугранных углов Ξ при ребрах AC' и AB' соответственно параллельны S_{CD} и S_{BD} (они связаны параллельным переносом, упомянутым в начале доказательства).

Лемма доказана.

Вернемся к исходной задаче. Лемму можно применить к обоим данным нам равенствам. Из первого равенства получается, что S_{AB} , S_{CD} , S_{AC} , S_{BC} параллельны одной прямой; а из второго — что S_{AB} , S_{CD} , S_{AD} , S_{BC} параллельны одной прямой. Но все шесть внешних биссекторных плоскостей не могут быть параллельны одной и той же прямой — это ясно хотя бы из того, что S_{AB} , S_{BC} и S_{AC} пересекаются в одной точке, центре вневписанной сферы тетраэдра.

Это означает, что прямая, параллельная первой четверке плоскостей, непараллельна прямой для второй четверки; а так как S_{AB} и S_{CD} параллельны обоим этим прямым, то эти плоскости параллельны друг другу.

Осталось показать, как из $S_{AB} \parallel S_{CD}$ следует требуемое. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к прямым AB и CD . Заметим, что он перпендикулярен и плоскостям S_{AB} и S_{CD} , так как они обе содержат или параллельны AB и CD . Повернем тетраэдр на 180° вокруг оси ℓ . Легко видеть, что плоскость S_{AB} перейдет в себя, как и прямая AB , так как они перпендикулярны ℓ . Но тогда в себя перейдет и двугранный угол тетраэдра при ребре AB (плоскости ABC и ABD перейдут друг в друга), ведь двугранный угол однозначно задается своей внешней биссекторной плоскостью, ребром, и своей величиной, которая тоже при повороте сохраняется. Аналогично, при таком повороте в себя перейдет и двугранный угол при ребре CD (плоскости ACD и BCD перейдут друг в друга). Тогда и вершины A и B перейдут друг в друга, и C и D перейдут друг в друга; то есть прямая ℓ оказывается общим серединным перпендикуляром к ребрам AB и CD .

Кроме того, так как тетраэдр совместился с собой при повороте, то и его описанная сфера перешла в себя, откуда следует, что ℓ проходит через её центр. Следовательно, ℓ является искомой прямой. \square

Другое решение. Отметим для начала, что достаточно доказать равенства ребер $BC = AD$ и $AC = BD$. Действительно, они в силу равенства треугольников ABC и BAD гарантируют, что точки C и D равноудалены от плоскости α , являющейся серединным перпендикуляром к AB . В частности, плоскость α делит CD пополам. И наоборот, плоскость, являющаяся серединным перпендикуляром к CD , делит отрезок AB пополам. Следовательно, пересечение этих серединных перпендикуляров — прямая, проходящая через середины ребер и содержащая центр описанной сферы тетраэдра.

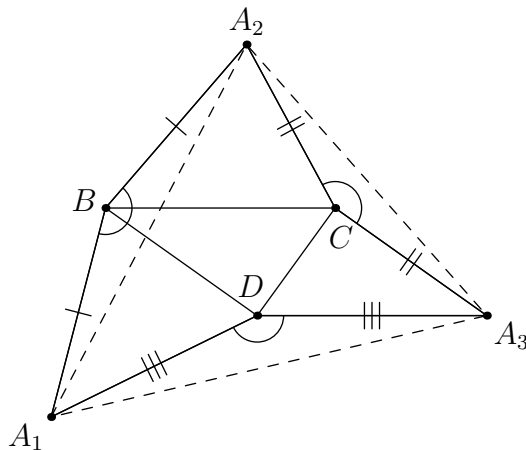


Рис. 1: к решению задачи 11.6

Обоснуем теперь равенство ребер. Для этого изобразим шестиугольную развертку $A_1BA_2CA_3D$ тетраэдра в плоскость BCD (рис. 1). Равенство

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD$$

для плоских углов тетраэдра при учете того, что сумма углов четырехугольника A_2BDC равна 360° , означает, что сумма углов B и C шестиугольника равна 360° . Таким образом, треугольники A_1BA_2 и A_3CA_2 равнобедренные и имеют одинаковый угол при вершине, то есть подобны; они переводятся друг в друга поворотной гомотетией с центром в точке A_2 . Следовательно, $\triangle BA_2C \sim \triangle A_1A_2A_3$.

Аналогично, второе равенство из условия приводит к тому, что сумма углов B и D шестиугольника равна 360° , откуда следует $\triangle A_1BD \sim \triangle A_1A_2A_3$. Принимая во внимание равенство $A_1B = BA_2$, заключаем равенство треугольников A_1BD и BA_2C , откуда вытекает $AD = A_1D = BC$ и $AC = A_1C = BD$. \square

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое верное решение задачи.
- 4 б. Доказано, что утверждение задачи следует из пары равенств $AC = BD$ и $AD = BC$.
- 2 б. Показано, что из одного из равенств, данных в условии, следует описанность некоторого четырехгранного угла (или четырехугольника на сфере).
- 3 б. Обнаружение подобия $\triangle BA_2C \sim \triangle A_1A_2A_3$ на развертке или аналогичного ему.
- 2 б. Задача переформулирована в терминах развертки.
- 1 б. Идея рассмотреть развертку.