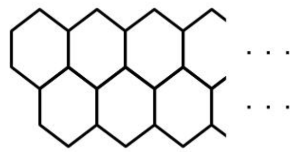
Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу:



Сколько шестиугольников у него получится?

2. Двадцать шесть целых чисел $a, b, c, \ldots, z$ подобраны таким образом, что $(1+ab)(1+abc)\ldots(1+abc\ldots z)=0$. Докажите, что $(a+b)(a+bc)\ldots(a+bc\ldots z)=0$.

3. Посередине между пунктами A и B находится кофейня C. Из пункта A в пункт B сначала выехал велосипедист. Когда он был на половине пути к кофейне, из A выехал автомобилист. Известно, что когда автомобилист доехал до кофейни C, велосипедист еще был в пути между A и C, причем расстояние от него до автомобилиста в этот момент было вдвое меньше, чем в тот момент, когда автомобилист только выехал из A. Какое событие произойдет раньше: велосипедист доедет до C или автомобилист — до B?

4. В треугольнике ABC, в котором все три стороны попарно различны, проведены биссектрисы углов A и B, делящие его на четырехугольник и три треугольника, два из которых равнобедренные. Найдите углы исходного треугольника.

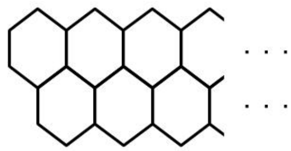
5. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу:



Сколько шестиугольников у него получится?

2. Вычислите сумму $1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \ldots + 2017^2 + 2018^2$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN = MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

4. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

5. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Вычислите сумму $1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2 + 10^2 - \ldots + 2017^2 + 2018^2$.

2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошел с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны.)

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN = MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

4. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

5. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

6. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

Замечание: для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$ и $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошел с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны.)

3. Гриша нарисовал на плоскости выпуклый n-угольник и провел все его диагонали, и о чудо, ни в какой точке, кроме вершин n-угольника, не пересеклось больше двух отрезков. Сколькими способами Гриша может обвести маркером часть имеющихся на рисунке линий, чтобы получить треугольник (не обязательно состоящий из целых диагоналей и, быть может, содержащий внутри себя не обведенные линии)?

4. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

Замечание: для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовем областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF, H — ортоцентр. Окружность с центром в точке O проходит через точки A и H, пересекая стороны AB и AC в точках Q и P соответственно (точка O не лежит на сторонах AB и AC). Описанная окружность треугольника QOP касается стороны BC в точке R. Докажите, что $\frac{CR}{BR} = \frac{ED}{FD}$.

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов. Максимальная оценка за всю работу – 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$, $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

2. Мистер A час простоял в точке с координатами $(0, 0)$. За этот же час, двигаясь равномерно и прямолинейно, мистер B дошел от точки $(22, 0)$ до точки $(2, 20)$. За этот же час мадемуазель C, тоже двигавшаяся равномерно и прямолинейно, прошла от точки $(30, 4)$ до точки $(0, 24)$. Сколько раз за указанный период наблюдения принимала целые значения площадь треугольника ABC? Начальный и конечный момент включаются.

3. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

4. Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовем областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

6. Последовательность чисел $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$ называется перестановкой длины n, если каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается в этой последовательности ровно один раз. Например, $\tau(1) = 3, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1$ – перестановка длины 3. Найдите все n, для которых найдется перестановка $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$, удовлетворяющая четырем условиям:

- Числа $\tau(i) - i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 2i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 3i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 4i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.