Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

2. На плоскости есть набор из 2018 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Рассмотрим все замкнутые ломанные, проходящие через все точки набора. Сколько точек самопересечения может иметь ломанная минимальной длины?

3. Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

4. Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

5. В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

6. Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

3. Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

4. Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

5. В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

6. Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Время выполнения задания: 240 минут.

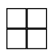
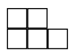
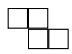
Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

3. Имеется три типа фигурок. Тип А: квадраты 2×2. Тип В: прямоугольники 3×2, из которых вырезана одна угловая клетка. Тип С: прямоугольники 3×2, из которых вырезаны две противоположные угловые клетки. Из этих фигурок составлен прямоугольник 20×17. Какое наименьшее число фигурок типа В может быть при этом использовано?

Тип A Тип B Тип C

 ,  ,  .

Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.

4. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

5. Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

6. Из натурального числа n разрешается получить либо число $2n + 1$, либо число $3n + 2$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа от 1 до 2017, совместимые с числом 2018.

Время выполнения задания: 240 минут.

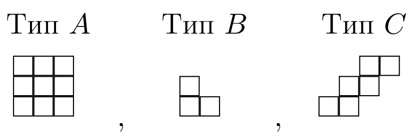
Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

2. Фонари располагаются на плоскости, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leq a$ и $y \leq b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

3. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

4. Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:



(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

5. Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

6. На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

2. Фонари располагаются на плоскости, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leq a$ и $y \leq b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

3. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

4. В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

5. Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

6. В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка *лежит внутри выпуклой оболочки* других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)