

## 9 класс

**Задача 9.1.** Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

*Ответ:* 4.

*Решение.* Пусть всего островов  $N + 1$ . Тогда всего мостов по плану президента должно быть  $N \cdot (N + 1) / 2$ . Отсюда

$$49 < \frac{N \cdot (N + 1)}{2}.$$

С другой стороны, если отбросить остров Дальний, все остальные острова соединяются  $(N - 1) \cdot N / 2$  мостами — и все эти мосты уже построены. Получаем

$$49 \geq \frac{(N - 1) \cdot N}{2}.$$

Выпишем ряд чисел:

|                           |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $N$                       | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $\frac{N \cdot (N+1)}{2}$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 |

Из  $45 \leq 49 < 55$  получаем, что островов всего  $N = 10$ , то есть 45 мостов не имеют отношения к острову Дальний. Значит, оставшиеся 4 построенных моста выходят с острова Дальний.  $\square$

### Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии суммируются:

+3 б. Доказано, что островов не менее 11.

+3 б. Доказано, что островов не более 11.

В отсутствие предыдущих продвижений применяются следующие критерии:

1 б. Приведён только пример, в котором из острова Дальний выходит 4 моста.

0 б. Приведён только ответ.

**Задача 9.2.** Найдите все тройки действительных чисел  $(a, b, c)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(0, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

*Решение.* После выделения полных квадратов в правых частях и замены  $a + b = z$ ,  $b + c = x$ ,  $c + a = y$  уравнения переписываются в следующем виде:

$$z = x^2, \quad x = y^2, \quad y = z^2. \quad (*)$$

Получаем  $x = y^2 = z^4 = x^8$ . Отсюда, во-первых,  $x \geq 0$ , а во вторых,  $x = 0$  или  $x = 1$ . (Действительно, при  $0 < x < 1$  мы бы получили  $x > x^8$ , а при  $x > 1$  — наоборот,  $x < x^8$ .) Аналогичные выводы можно сделать про переменные  $y$  и  $z$ . Более того, из равенств  $(*)$  ясно, что либо все переменные  $x, y, z$  одновременно принимают значение 0, либо одновременно 1.

Выразим исходные переменные через  $x, y, z$ :

$$a = \frac{y + z - x}{2}, \quad b = \frac{z + x - y}{2}, \quad c = \frac{x + y - z}{2}.$$

Получаем при  $x = y = z = 0$  тройку  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ , а при  $x = y = z = 1$  тройку  $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .  $\square$

### Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- +1 б. В правых частях выделены полные квадраты.
- +4 б. Доказано, что какое-то из чисел  $a + b, b + c, c + a$  равно 0 или 1.
- +1 б. Доказано, что числа  $a + b, b + c, c + a$  либо все равны 0, либо все равны 1.
- +1 б. В ответе приведены только подходящие тройки.

**Задача 9.3.** Пусть  $a, b, c$  и  $d$  — наименьшие различные натуральные делители натурального числа  $n$ . Оказалось, что  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 100 = n$ . Какие значения может принимать  $n$ ?

*Ответ:* 230.

*Решение.* Будем считать  $a \leq b \leq c \leq d$ . Очевидно, что  $a = 1$ .

Во-первых, заметим, что  $n$  не может быть нечётным числом, так как в этом случае все его делители были бы тоже нечётными, и сумма в левой части равенства оказалась бы чётной. Следовательно,  $n$  чётно, откуда  $b = 2$ .

Среди чисел  $c$  и  $d$  ровно одно должно быть нечётным, так как иначе чётность равенства снова нарушится. С другой стороны, можно понять, что  $n$  не делится на 4. Действительно, в левой части равенства два нечётных квадрата, которые всегда дают остатки 1 от деления на 4, и чётные слагаемые, все кратные 4; значит,  $n$  должно давать остаток 2 от деления на 4.

Получаем, что одно из чисел  $c$  и  $d$  — это следующий нечётный делитель (после 1) числа  $n$ , то есть некоторое нечётное простое  $p$ ; а другое — это следующий чётный делитель (после 2), причём не равный 4, то есть это  $2p$ . Имеем:

$$1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 + 100 = n \quad \Rightarrow \quad 105 + 5p^2 = n.$$

С одной стороны, так как  $n$  делится на  $p$ , то и 105 делится на  $p$ , а из разложения  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$  получаем  $p \in \{3, 5, 7\}$ . С другой, левая часть делится на 5, то есть и  $n$  делится на 5, что даёт  $p \leq 5$  (это наименьший нечётный простой делитель  $n$ ).

Случай  $p = 3$  не подойдёт, так как  $2p = 6 > 5$  уже не будет четвёртым по величине делителем. Осталось подставить  $p = 5$ . Имеем  $105 + 5 \cdot 5^2 = 230$ , что, как нетрудно проверить, подходит.  $\square$

### Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- +1 б. Доказано, что  $n$  чётно.
- +3 б. Доказано, что  $n$  не может делиться на 4.
- +3 б. Верно рассмотрен случай, когда данные четыре делителя равны 1, 2,  $p$ ,  $2p$  (для некоторого нечётного простого  $p$ ).

Если этот случай не рассмотрен или рассмотрен неверно, вместо него применяется следующий критерий:

- +1 б. Приведён верный ответ.

**Задача 9.4.** Точка  $M$  — середина стороны  $CD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ . Оказалось, что  $\angle BAM = \angle MAD$ ,  $\angle ABC = \angle BCM + \angle MDA$ . Найдите угол  $CBD$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

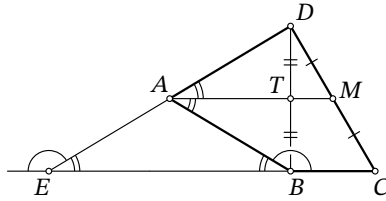


Рис. 3: к решению задачи 9.4

*Решение.* Продлим лучи  $CB$  и  $DA$  до пересечения в точке  $E$  (так как  $\angle BCM + \angle MDA < 180^\circ$ , то эти лучи пересекутся). Тогда внешний угол при вершине  $E$  треугольника  $CDE$  равен  $\angle BCM + \angle MDA = \angle ABC$ , откуда следует, что треугольник  $BAE$  равнобедренный (рис. 3).

Так как луч  $AM$  делит внешний угол  $A$  этого треугольника пополам, то он параллелен его основанию  $BE$  (т. к.  $\angle BAM = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle BEA + \angle ABE) = \angle ABE$ ).

Проведём отрезок  $BD$  и обозначим его пересечение с  $AM$  через  $T$ . По теореме Фалеса имеем  $1 : 1 = DM : MC = DT : TB$ , то есть  $T$  — середина отрезка  $BD$ . Следовательно, в треугольнике  $DAB$  медиана является биссектрисой, а значит и высотой. Имеем  $AT \perp BD$ , откуда из параллельности получаем  $BC \perp BD$ .  $\square$

### Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяется следующий критерий:

0 б. Приведён только ответ.

**Задача 9.5.** В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

*Ответ:* 1025.

*Решение.* Заметим, что каждый ребёнок не дружит максимум с 8 другими детьми. Действительно, если бы какой-то ребёнок не дружил бы хотя бы с 9 детьми, то можно было бы взять группу из него и 9 детей, с которыми он не дружит. Понятно, что эту группу нельзя разбить на 5 пар друзей. Таким образом, у каждого ребёнка не менее 41 друга, поэтому общее количество пар друзей не менее  $41 \cdot 50 / 2 = 1025$ .

Приведём пример, когда пар друзей ровно 1025, т.е. у каждого ребёнка ровно 41 друг. Для этого поставим всех детей по кругу и скажем, что каждый ребёнок дружит со всеми, кроме 4 детей слева и 4 детей справа от него (т.е. не дружит только с людьми, располагающимися на расстоянии не больше 4 от него). Докажем, что такой пример удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть мы выбрали 10 каких-то детей. Пронумеруем их числами от 1 до 10 по часовой стрелке, начиная с какого-то из них. Заметим, что ребёнок с номером 1 дружит с ребёнком с номером 6, так как в исходном круге ребёнок с номером 6 располагается на расстоянии больше 4 от ребёнка под номером 1. Таким образом, пара 1–6 является друзьями. Аналогично, пары 2–7, 3–8, 4–9 и 5–10 также являются друзьями.  $\square$

### *Критерии*

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

+3 б. Доказано, что пар друзей не менее 1025.

+4 б. Приведён обоснованный пример с 1025 парами друзей.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.