8 класс

Задача 8.1. Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?

Ответ: 4.

Решение. Пусть всего островов $N+1$. Тогда всего мостов по плану президента должно быть $N \cdot (N+1) \,/\, 2$. Отсюда

$$49 < \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

С другой стороны, если отбросить остров Дальний, все остальные острова соединяются $(N-1) \cdot N \,/\, 2$ мостами — и все эти мосты уже построены. Получаем

$$49 \geqslant \frac{(N-1) \cdot N}{2}.$$

Выпишем ряд чисел:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{N\cdot(N+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Из $45 \leqslant 49 < 55$ получаем, что островов всего $N = 10$, то есть 45 мостов не имеют отношения к острову Дальний. Значит, оставшиеся 4 построенных моста выходят с острова Дальний. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что островов не менее 11.

+3 б. Доказано, что островов не более 11.

В отсутствие предыдущих продвижений применяются следующие критерии:

1 б. Приведён только пример, в котором из острова Дальний выходит 4 моста.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669 \cdot 3 = 20\,007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. $\square$

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36 675 или 33 333 336.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 8.3. Найдите все тройки положительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Решение. После выделения полных квадратов в правых частях и замены $a+b = z$, $b + c = x$, $c + a = y$ уравнения переписываются в следующем виде:

$$z = x^2, \qquad x = y^2, \qquad y = z^2. \tag{*}$$

Получаем $x = y^2 = z^4 = x^8$. Поскольку числа a, b, c положительны, то и число x положительно. Из равенства $x = x^8$ следует, что $x = 1$. (Действительно, при $0 < x < 1$ мы бы получили $x > x^8$, а при $x > 1$ — наоборот, $x < x^8$.) Из равенств (*) ясно, что все переменные x, y, z принимают значение 1.

Выразим исходные переменные через x, y, z:

$$a = \frac{y + z - x}{2}, \qquad b = \frac{z + x - y}{2}, \qquad c = \frac{x + y - z}{2}.$$

При $x = y = z = 1$ получаем тройку $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. В правых частях выделены полные квадраты.

+4 б. Доказано, что какое-то из чисел $a+b$, $b+c$, $c+a$ равно 1.

+1 б. Доказано, что все числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ равны 1.

+1 б. Приведена только подходящая тройка.

Задача 8.4. На ста карточках написаны числа $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{99}$ (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычтет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

Ответ: $2^{99}-1$.

Решение. Заметим, что $1+2+2^2+\ldots+2^{98}=2^{99}-1<2^{99}$, то есть последнее из данных чисел больше суммы всех остальных. Это означает, что в любом разбиении на две непустые группы большая сумма будет у той, что содержит 2^{99}. Это группу будем считать первой, а другую — второй.

Обозначим сумму всех чисел через S. Если сумма чисел второй группы равна A, то первой равна $S-A$, а их разность равна $S-2A$. Ясно, что различным значениям A соответствуют различные разности. Таким образом, нам надо просто найти количество различных возможных сумм чисел второй группы.

Заметим, что вторую группу можно выбрать $2^{99}-1$ способами (каждый элемент, кроме 2^{99}, либо включается, либо нет, то есть даёт 2 варианта в произведение; но в итоге вариант, отвечающий пустой группе, нужно отбросить). Докажем, что во всех этих способах получаются разные суммы.

Действительно, пусть мы нашли две различные возможные вторые группы, суммы которых совпадают:

$$2^{x_1}+2^{x_2}+\ldots+2^{x_m}=2^{y_1}+2^{y_2}+\ldots+2^{y_n}.$$

Упорядочим степени и в левой, и в правой части по убыванию. Сократив одинаковые степени двойки, получим равенство вида

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}=2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

все степени двойки в котором различны. (С каждой стороны должно остаться положительное число, иначе изначальные наборы степеней совпадали.) Без ограничения общности, пусть $a_1>b_1$. Тогда

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}\geqslant 2^{a_1}>2^{a_1}-1=2^{a_1-1}+2^{a_1-2}+\ldots+2+1\geqslant 2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

противоречие.

Следовательно, все $2^{99} - 1$ способов дают вторые группы с разными суммами; тогда и соответствующие разности будут различными. $\square$

Замечание. Утверждение о том, что разные способы выбрать группу не могут давать одинаковые суммы, можно также получить из того, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных степеней двойки (т. е. что двоичная запись числа существует и единственна).

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что все разности Влада нечётны.

Утверждение о единственности двоичной записи (о том, что у каждого числа существует единственное представление в виде суммы степеней двойки) считается общеизвестным; за его использование без доказательства баллы не снимаются, за доказательство баллы не начисляются.

Задача 8.5. На катетах AB и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle PMQ = 90°$, где точка M — середина гипотенузы BC. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что $BP = 5$ и $CQ = 12$.

Ответ: 13.

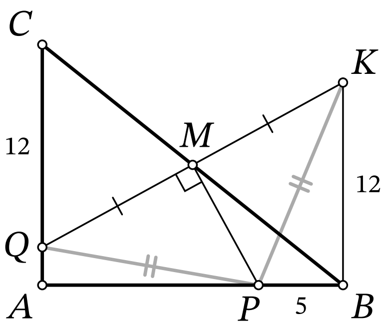

Рис. 2: к решению задачи 8.5

Решение. Рассмотрим на луче QM точку K такую, что $KM = MQ$ (рис. 2). Так как диагонали четырёхугольника $CQBK$ пересекаются в своих серединах, это параллелограмм; отсюда получаем, что $BK = CQ = 12$ и $BK \parallel AC$. Это означает, что треугольник PBK является прямоугольным, поэтому по теореме Пифагора имеем

$$PK = \sqrt{BP^2 + BK^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

С другой стороны, в треугольнике QPK отрезок PM является медианой и высотой, поэтому он является равнобедренным, и $PQ = PK = 13$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

1 б. Рассмотрена точка K из решения (или аналогичная ей точка, симметричная P относительно M), но дальнейших продвижений нет.

0 б. Приведён только ответ.