7 класс

Задача 7.1. Пока Малыш был в школе, Карлсон нашёл N пирожных и начал их есть. За первый час он съел 35 штук. Затем он понял, что если будет продолжать есть пирожные с той же скоростью, то сможет их все доесть только через час после возвращения Малыша. Тогда он начал есть на 15 пирожных в час больше и успел всё съесть за полчаса до прихода Малыша. Найдите N.

Ответ: 210.

Решение. Если бы Карлсон не поменял скорость, то он бы съел оставшиеся пирожные за $(N-35)\,/\,35$ часов. Но он увеличил скорость на 15 пирожных в час и потратил на их поедание $(N-35)/50$ часов. При этом из условия задачи мы знаем, что разница между одним и другим количеством часов составляет полтора часа. Получается уравнение

$$\frac{N-35}{35}=\frac{N-35}{50}+1{,}5.$$

Умножив обе части уравнения на 350 и преобразовав, получим

$$\begin{gathered}(N-35)\cdot 10=(N-35)\cdot 7+525,\\ 10N-350=7N-245+525,\\ 3N=630,\\ N=210.\end{gathered}$$

□

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

- 7 б. Приведено верное решение, но найдено количество пирожных, которое Карлсон съел после того, как ускорился.
- 4 б. Получено верное уравнение, но при его решении допущены ошибки.
- 2 б. Приведён только верный ответ.

Задача 7.2. На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

Ответ: 0.

Решение. Каждая пара близнецов сидит либо рядом, либо нет. В обоих случаях один из близнецов на вопрос ответил бы «Да», а второй — «Нет». Следовательно, в любом случае мы услышим 10 ответов «Да» и 10 ответов «Нет». □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

3 б. Замечено, что если близнецы сидят рядом, то их ответы различаются.

3 б. Замечено, что если близнецы не сидят рядом, то их ответы различаются.

0 б. Приведён только верный ответ.

Задача 7.3. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669 \cdot 3 = 20\,007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. □

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36 675 или 33 333 336.

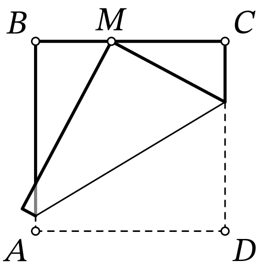
Критерии

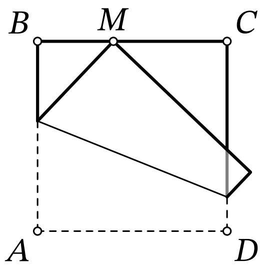
Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 7.4. У Лёши есть бумажный квадрат $ABCD$. Он отметил на стороне BC точку M. Сначала он перегнул квадрат так, что точка D совпала с точкой M (левый рисунок), и разогнул обратно. Затем он перегнул его так, что точка A совпала с точкой M (правый рисунок), и снова разогнул обратно. Пусть O — точка пересечения двух линий перегиба. Докажите, что $BO = OC$.





Решение. Заметим, что при первом перегибании отрезок DO совмещается с MO, а при втором — отрезок AO совмещается с MO. Следовательно, $AO = MO = DO$ (рис. 1).

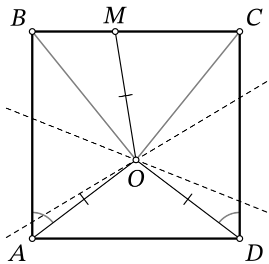


Рис. 1: к решению задачи 7.4

Получаем, что треугольник AOD равнобедренный. Теперь докажем, что треугольники AOB и DOC равны по первому признаку. Действительно,

- $AB = CD$, так как это две стороны квадрата;
- $AO = OD$ из-за того, что AOD равнобедренный;
- $\angle BAO = 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ - \angle ODA = \angle CDO$.

Тогда $BO = OC$, что и требовалось доказать. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии (не суммируются):

2 б. Замечено, что $AO = OM$ или $DO = OM$.

5 б. Доказано, что $AO = OD$.

Задача 7.5. На десяти карточках написаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычтет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

Ответ: 511.

Решение. Заметим, что данные нам числа — это степени двойки 2^0, 2^1, 2^2, $\ldots$, 2^9. Так как $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^8=2^9-1<2^9$, то последнее число, 512, больше суммы всех остальных. Это означает, что в любом разбиении на две непустые группы большая сумма будет у той, что содержит 512. Это группу будем считать первой, а другую — второй.

Сумма всех чисел равна $2^{10}-1=1023$. Если сумма чисел второй группы равна A, то первой равна $1023-A$, а их разность равна $1023-2A$. Ясно, что различным значениям A соответствуют различные разности. Таким образом, нам надо просто найти количество различных возможных сумм чисел второй группы.

Заметим, что вторую группу можно выбрать 2^9-1 способами (каждый элемент, кроме 512, либо включается, либо нет, то есть даёт 2 варианта в произведение; но в итоге вариант, отвечающий пустой группе, нужно отбросить). Докажем, что во всех этих способах получаются разные суммы.

Действительно, пусть мы нашли две различные возможные вторые группы, суммы которых совпадают:

$$2^{x_1}+2^{x_2}+\ldots+2^{x_m}=2^{y_1}+2^{y_2}+\ldots+2^{y_n}.$$

Упорядочим степени и в левой, и в правой части по убыванию. Сократив одинаковые степени двойки, получим равенство вида

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}=2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

все степени двойки в котором различны. (С каждой стороны должно остаться положительное число, иначе изначальные наборы степеней совпадали.) Без ограничения общности, пусть $a_1>b_1$. Тогда

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_r}\geqslant 2^{a_1}>2^{a_1}-1=2^{a_1-1}+2^{a_1-2}+\ldots+2+1\geqslant 2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_s},$$

противоречие.

Следовательно, все $2^9-1=511$ способов дают вторые группы с разными суммами; тогда и соответствующие разности будут различными. $\square$

Замечание. Тождество $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$, использованное в решении, можно доказать, взяв правую часть и последовательно заменяя $2^k=2^{k-1}+2^{k-1}$:

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{n-1}+2^{n-1}-1=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}-1=\ldots=\\&=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+2-1=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1.\end{aligned}$$

Замечание. Утверждение о том, что разные способы выбрать группу не могут давать одинаковые суммы, можно также получить из того, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы различных степеней двойки (т. е. что двоичная запись числа существует и единственна).

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что все разности Влада нечётны.

Утверждение о единственности двоичной записи (о том, что у каждого числа существует единственное представление в виде суммы степеней двойки) считается общеизвестным; за его использование без доказательства баллы не снимаются, за доказательство баллы не начисляются.