6 класс

Задача 6.1. Два обжоры едят конфеты. Сначала первый ест 1 конфету, потом второй ест 2 конфеты, потом первый ест 3, потом второй ест 4, $\ldots$, первый ест N конфет. Оказалось, что первый обжора съел суммарно на 100 конфет больше, чем второй. Найдите N.

Ответ: 199.

Решение. Обозначим через A количество конфет, съеденных первым обжорой, а через B — вторым. Посмотрим, чему равна разность $A - B$ после каждого шага (номер шага i равен количеству конфет, съеденных на этом шаге одним из обжор):

i	1	2	3	4	$\ldots$	$2k-1$	$2k$	$\ldots$	198	199
$A-B$	$+1$	-1	$+2$	-2	$\ldots$	$+k$	$-k$	$\ldots$	-99	$+100$

Ясно, что, во-первых, разность $+100$ появится после шага, на котором первый обжора съест 199 конфет, а во-вторых, разности не повторяются, то есть если ряд продолжить, число $+100$ больше не встретится. Следовательно, единственный возможный ответ — это $N = 199$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

5 б. Задача в целом решена верно, но есть ошибка при подсчёте ответа.

3 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

Задача 6.2. В школьной столовой есть несколько столов, за каждым из которых может сидеть не более 6 человек. На первой перемене в столовую пришли 50 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 3 свободных стола, после чего они ушли на урок. На второй перемене в столовую пришли 8 школьников и расселись за столами так, что осталось ровно 4 свободных стола. Сколько столов в столовой? (Стол называется свободным, если за ним никто не сидит.)

Ответ: 12.

Решение. С одной стороны, 50 школьников не могли занять менее 9 столов (за 8 столами помещаются только 48 школьников). Значит, из первого условия следует, что столов не менее 12. С другой стороны, 8 школьников не могли занять более 8 столов, так что из второго условия извлекаем, что столов не более 12. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются:*

+4 б. Доказано, что столов не менее 12.

+3 б. Доказано, что столов не более 12.

В отсутствие предыдущих продвижений применяется следующий критерий:

1 б. Приведён только верный ответ (и, возможно, пример рассадки за столы).

Задача 6.3. На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

Ответ: 0.

Решение. Каждая пара близнецов сидит либо рядом, либо нет. В обоих случаях один из близнецов на вопрос ответил бы «Да», а второй — «Нет». Следовательно, в любом случае мы услышим 10 ответов «Да» и 10 ответов «Нет». □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

0 б. Приведён только верный ответ.

3 б. Замечено, что если близнецы сидят рядом, то их ответы различаются.

3 б. Замечено, что если близнецы не сидят рядом, то их ответы различаются.

Задача 6.4. Паша загадал несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Ваня задал несколько вопросов, а Паша на них честно ответил:

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 6? — Одно.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 5? — Два.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 4? — Три.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 3? — Четыре.

— Сколько загаданных тобою чисел делятся на 2? — Пять.

Какое наименьшее количество чисел мог загадать Паша?

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим группу из четырёх чисел, делящихся на 3, и из пяти чисел, делящихся на 2. Любое число, общее для этих двух групп, должно делиться на 6. Следовательно, такое число ровно одно. Значит, есть ещё 3 числа из первой группы, не входящих во вторую, и ещё 4 числа из второй группы, не входящих в первую. Всего это уже не менее 8 чисел.

С другой стороны, можно привести пример 8 чисел, которые мог бы загадать Паша:

$$2, 3, 4, 8, 9, 10, 12, 15.$$

□

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+0 б. Приведён верный ответ.

+3 б. Приведён пример 8 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

+4 б. Доказано, что не могло быть загадано менее 8 чисел.

Задача 6.5. У Пети есть 2023 камня, массы любых двух из которых различаются не более чем в 2 раза. Петя называет кучу камней *странной,* если в ней найдутся два камня, масса одного из которых больше массы другого более чем на 10%. Докажите, что Петя может разложить все камни по кучам так, чтобы в каждой куче было ровно 7 камней, причём странных куч оказалось не больше 7.

Решение. Разложим камни в ряд по возрастанию масс слева направо и разобъём их на последовательные семёрки. Эти семёрки сделаем кучами. Докажем, что среди них будет не более 7 странных.

Назовём *показателем* каждой семёрки массу правого камня в ней. Заметим, что у странной семёрки (т. е. образующей странную кучу) показатель более чем на 10% больше, чем у семёрки слева от неё. (Если самая левая семёрка образует странную кучу, то слева от неё поместим виртуальную семёрку без камней, показателем которой сделаем массу самого лёгкого камня ряда. Тогда утверждение будет корректным для всех странных семёрок.)

Предположим, что в ряду оказалось хотя бы 8 странных семёрок. Это означает, что, если идти по ряду слева направо, показатель будет не менее 8 раз увеличиваться более чем на 10% (а в остальных случаях не убывать). Оценим наименьшее возможное значение показателя по сравнению с его изначальной величиной. Каждую операцию увеличения на 10% обозначим стрелкой «$\mapsto$»; так как нам нужно оценить наименьший возможный результат, будем округлять числа до сотых в меньшую сторону:

$$1{,}00 \overset{1}{\mapsto} 1{,}10 \overset{2}{\mapsto} 1{,}21 \overset{3}{\mapsto} 1{,}33 \overset{4}{\mapsto} 1{,}46 \overset{5}{\mapsto} 1{,}60 \overset{6}{\mapsto} 1{,}76 \overset{7}{\mapsto} 1{,}93 \overset{8}{\mapsto} 2{,}12.$$

Так как все показатели — это массы каких-то камней в ряду (в том числе показатель виртуальной семёрки, которую мы могли добавить), то они не могут увеличиться более чем в два раза. Противоречие. Значит, в ряду получилось не более 7 странных семёрок. □

Другое решение. Разложим камни в ряд по возрастанию масс слева направо. Также поставим неподалеку корзину. Рассмотрим семь левых камней в ряду. Если правый из них не более чем на 10% тяжелее левого, то из них можно собрать кучу, которая не будет странной — сделаем это (и уберём эти камни из ряда). В ином случае возьмём *шесть* левых камней ряда и выкинем их в корзину. Будем последовательно совершать такие операции, пока в ряду не останется менее 7 камней.

Если в корзине окажется не более $6 \cdot 7 = 42$ камней, то их можно будет оттуда достать и объединить с оставшимися камнями из ряда. Всего у нас тогда получится не более $42 + 6 = 48$ камней, не распределённых по семёркам; но так как общее число камней делится на 7, то и общее количество не распределённых камней должно делиться на 7, и на самом деле их будет не более 42. Значит, их можно разбить на не более чем шесть куч — возможно, странных.

Докажем, что в корзине окажется не более 42 камней. Для этого заметим, что каждый раз, когда мы выкидываем 6 камней в корзину, масса самого левого камня ряда увеличивается хотя бы на 10%, то есть умножается не менее чем на 1,1. Покажем, что через 8 таких умножений масса увеличится более чем в два раза. Каждую операцию обозначим стрелкой «$\mapsto$»; так как нам нужно оценить наименьший возможный результат, будем округлять числа до сотых в меньшую сторону:

$$1{,}00 \overset{1}{\mapsto} 1{,}10 \overset{2}{\mapsto} 1{,}21 \overset{3}{\mapsto} 1{,}33 \overset{4}{\mapsto} 1{,}46 \overset{5}{\mapsto} 1{,}60 \overset{6}{\mapsto} 1{,}76 \overset{7}{\mapsto} 1{,}93 \overset{8}{\mapsto} 2{,}12.$$

Так как масса левого камня ряда не может увеличится в два раза по сравнению с первоначальной, то 8 таких операций нам сделать не удастся. Следовательно, в корзине окажется не более 42 камней, и странных куч получится не более 6. □

Замечание. Можно привести пример набора масс камней, при распределении которых не может получиться менее 6 странных куч. Пусть у нас будет по 6 камней масс 1,00, 1,105, 1,22, 1,35, 1,49, 1,64 и 1,81, а остальные камни будут массы 2,00. Все эти массы отличаются друг от друга более чем на 10%, поэтому все семёрки, кроме целиком составленных из камней массы 2,00, будут странными. Отсюда ясно, что странных семёрок будет не менее шести.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. В верном (в остальном) решении без обоснования используется, что $1{,}1^8 > 2$.

1 б. Используется разбиение камней на семёрки, как в решении выше, но дальнейших продвижений нет.