

11 класс

Задача 11.1. На доске написаны 100 различных натуральных чисел. Петя записал в тетрадку красным цветом все их попарные суммы, а синим цветом — все их попарные произведения. Может ли оказаться так, что для каждого красного числа найдётся делящееся на него синее? (Допускается, что одно и то же синее число может делиться на разные красные числа.)

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим числа $200! \cdot 1, 200! \cdot 2, 200! \cdot 3, \dots, 200! \cdot 100$. Сумма любой пары таких чисел имеет вид $200! \cdot t$, где $3 \leq t \leq 199$, в то время как их произведение имеет вид $(200!)^2 \cdot s$, где s — какое-то натуральное число. Так как $200!$ делится на все возможные значения t , то в выбранной паре произведение чисел делится на их же сумму. \square

Другое решение. Рассмотрим произвольный набор из 100 различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел вычислим их сумму, и все такие суммы перемножим. Результат обозначим через P . Тогда если умножить каждое из исходных чисел на P , то полученный набор будет подходящим. Действительно, рассмотрим произвольные два числа Pa и Pb из полученного набора, где a и b — соответствующие числа исходного набора. Сумма этих чисел равна $P(a + b)$, а произведение равно P^2ab . Так как P делится на $a + b$ (как и на все другие попарные суммы чисел исходного набора), мы получаем, что произведение любых двух чисел делится на их сумму. \square

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

- 6 б. Представлен верный пример, но во в целом верном обосновании присутствуют неточности.
- 5 б. Представлен верный пример, но в его обосновании присутствуют существенные ошибки.
- 4 б. Приведён верный пример без обоснования.
- 2 б. В решении присутствует идея умножения набора чисел на один и тот же множитель при неверном примере или его отсутствии.
- 0 б. Приведено только утверждение о том, что искомый набор чисел существует.

Задача 11.2. На прямой выбрано несколько отрезков так, что все их концы различны. Докажите, что на этой прямой можно отметить несколько точек так, чтобы на каждом отрезке было отмечено нечётное количество отмеченных точек.

Решение. Пусть отрезков всего N . Пронумеруем их числами от 1 до N слева направо, по порядку их правых концов (так, например, у 1-го отрезка самый левый правый конец, а у N -го — самый правый правый конец).

Рассмотрим 1-й отрезок и отметим его правый конец. Затем перейдём ко 2-му отрезку: отметим его правый конец, если он не содержит ранее отмеченную точку, и не будем отмечать, если содержит ранее отмеченную точку.

Будем и дальше рассматривать отрезки по порядку. Когда мы переходим к k -му отрезку, на каждом из предыдущих отрезков уже отмечено нечётное количество точек. Если на k -м отрезке уже отмечено нечётное количество точек, то дополнительно на нём ничего не будем отмечать, а если чётное — отметим его правый конец. Заметим, что все отрезки с 1-го по $(k - 1)$ -й не содержат правый конец k -го отрезка, поэтому после нашего действия все отрезки с 1-го по k -й будут содержать нечётное количество отмеченных точек.

Рассмотрев последовательно все N отрезков, получим, что все отрезки с 1-го по N -й будут содержать нечётное количество точек.

Замечание. Также решение можно было оформить с помощью математической индукции по количеству отрезков. \square

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

+1 б. Приведена обоснованная нумерация отрезков.

+2 б. Приведен алгоритм проставления точек.

В случае использования метода математической индукции применяются следующие критерии:

6 б. Во в целом верном решении отсутствует база индукции.

4 б. Во в целом верном решении неверно доказан переход индукции.

Комментарий:

2 б. Приведено доказательство для частного случая расположения отрезков.

Задача 11.3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами имеют степень 10. Известно, что для любого действительного x верно

$$P(x) \cdot Q(x) \geq |P(x)|.$$

Какое наибольшее количество различных корней может быть у многочлена $P(x) \cdot Q(x)$?

Ответ: 5.

Решение. Заметим, что следствием из данного неравенства является

$$|P(x)| \cdot |Q(x)| \geq |P(x)|,$$

что при всех x , таких что $P(x) \neq 0$, означает $|Q(x)| \geq 1$. В частности, у многочлена $Q(x)$ нет корней, отличных от корней многочлена $P(x)$. Следовательно, множество корней многочлена $P(x) \cdot Q(x)$ совпадает с множеством корней многочлена $P(x)$.

Из неравенства $|Q(x)| \geq 1$, справедливого при всех x за исключением конечного множества, и из непрерывности функции $Q(x)$ следует, что либо для всех действительных x верно $Q(x) \geq 1$, либо для всех действительных x верно $Q(x) \leq -1$.

Чтобы это строго доказать, предположим, что $Q(x)$ принимает значения и из $[1; +\infty)$, и из $(-\infty; -1]$. Тогда, так как непрерывная функция принимает все промежуточные значения, $Q(x)$ должен принимать и бесконечное количество разных значений в промежутке $(-1; 1)$. Но такие значения он может принимать только в таких точках x , что $P(x) = 0$; а корней у многочлена $P(x)$ конечное количество. Аналогично доказывается, что $Q(x)$ не может принимать никакие значения из $(-1; 1)$.

Будем считать, что $Q(x) \geq 1$ (случай $Q(x) \leq -1$ можно свести к рассматриваемому, умножив оба многочлена на -1). Тогда $P(x) \cdot Q(x) \geq |P(x)| \geq 0$, откуда получаем $P(x) \geq 0$ при всех действительных x . Это означает, что у $P(x)$ не может быть корней кратности 1, ведь иначе в окрестности любого из таких корней многочлен принимал бы значения разных знаков. Значит, каждый корень многочлена $P(x)$ имеет кратность не менее 2; а так как сумма кратностей корней не превосходит степень многочлена, корней у $P(x)$ не более 5.

В качестве примера подойдёт любой многочлен $P(x)$ с 5 корнями кратности 2, принимающий неотрицательные значения, и любой многочлен $Q(x)$, принимающий значения из $[1; +\infty)$, например,

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3)^2(x - 4)^2(x - 5)^2, \quad Q(x) = x^{10} + 1. \quad \square$$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- +1 б. Доказано, что $|Q(x)| \geq 1$ из перехода к произведению модулей многочленов в неравенстве или полного верного раскрытия модулей в неравенстве.
- +1 б. Доказано, что множество корней $Q(x)$ содержится в множестве корней $P(x)$.
- +2 б. Из непрерывности функции $Q(x)$ доказано, что либо для всех действительных x верно $Q(x) \geq 1$, либо для всех действительных x верно $Q(x) \leq -1$.
- +2 б. Доказано, что у $P(x)$ нет корней кратности 1.

+1 б. Приведён верный пример пары многочленов (в том числе без обоснования).

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.4. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60^\circ$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

Ответ: 75° .

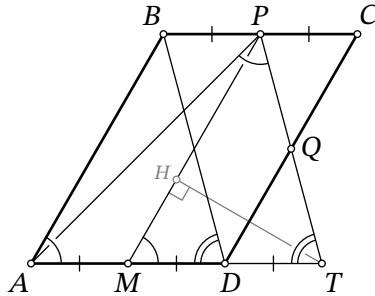


Рис. 5: к решению задачи 11.4

Решение. Пусть M — середина стороны AD . Продлим луч PQ до точки T такой, что $PQ = QT$ (рис. 5). Так как диагонали четырёхугольника $PCTD$ пересекаются в своих серединах, это параллелограмм; отсюда получаем, что точка T лежит на прямой AD и $DT = CP = DM = AM$. Отметим, что $DBPT$ — параллелограмм (DT равен и параллелен PB), поэтому искомым $\angle ADB = \angle ATP$.

С другой стороны, из вписанности $APQD$ имеем $\angle APQ = 180^\circ - \angle ADQ = 60^\circ$. Кроме того, PM — средняя линия $ABCD$, и параллельна сторонам AB и CD , откуда получаем $\angle PMT = 60^\circ$.

Значит, треугольники ATP и PTM подобны по двум углам. Тогда $AT : PT = PT : MT$, то есть $PT^2 = AT \cdot MT$. Введём масштаб длин на чертеже так, чтобы отрезок AM имел длину 1; тогда $AT = 3$ и $MT = 2$, а $PT = \sqrt{6}$.

Мы знаем один из углов треугольника MPT и две его стороны; теперь можно воспользоваться любым из известных методов, чтобы вычислить остальные его элементы (включая искомым угол ATP). Например, опустим высоту TH на прямую MP . Так как $TP > TM$, отрезки TP и TM окажутся по разные стороны от прямой TH . В прямоугольном треугольнике MTH гипотенуза равна 2, а угол напротив катета TH равен 60° , то есть сам катет равен $\sqrt{3}$. Теперь ясно, что прямоугольный треугольник THP равнобедренный, так как отношение гипотенузы к катету в нём равно $\sqrt{2}$. Получаем $\angle ATP = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Замечание. Также задачу можно было решить, не отмечая точку M , а используя равенство произведений отрезков секущих $TD \cdot TA = TQ \cdot TP$. Из этого равенства легко вывести, что $BD : AD = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Затем в треугольнике ABD (который равен треугольнику MPT из прошлого решения) можно либо воспользоваться теоремой синусов, либо опустить высоту из точки D и понять, что она отсекает равнобедренный прямоугольный треугольник. \square

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

+1 б. Верно найден $\angle APT$.

+2 б. Доказано, что треугольники APT и PMT подобны.

+2 б. Верно получено уравнение: $PT^2 = AT \cdot MT$, либо доказано, что $BD = \sqrt{6} \cdot AM$ или $BD : AD = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

+2 б. Получен верный обоснованный ответ.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.5. У Пети есть n карточек с n последовательными натуральными числами (на каждой карточке написано ровно одно число). Он выложил эти карточки в ряд в некотором порядке.

У каждых двух чисел на соседних карточках Петя нашёл наибольший общий делитель. При каком наибольшем n все эти наибольшие общие делители могут оказаться различными числами?

Ответ: 5.

Решение. Покажем, как построить ряд с пятью числами. Для этого возьмём числа от 36 до 40:

$$39, 36, 40, 38, 37.$$

В этой цепочке НОД первых двух чисел равен 3, второго и третьего — 4, третьего и четвертого — 2, четвертого и пятого — 1.

Докажем, что более длинной цепочки мы получить не сможем. Обозначим наименьшее из этих чисел через x , тогда остальные будут равны $x + 1, x + 2, \dots, x + n - 1$. Заметим, что НОД двух чисел не превосходит их разности, а разности чисел принимают значения от 1 до $n - 1$. Между соседними числами в цепочке как раз $n - 1$ попарная разность. Так как они все должны оказаться различными, то у нас должны встретиться все разности от 1 до $n - 1$ по одному разу. При этом НОДы в соответствующих парах должны совпадать с разностями, а это

значит, что в каждой паре оба числа должны делиться на разность между ними. В частности, это означает, что чётные разности могут быть только между чётными числами.

Докажем, что все чётные числа в этой цепочке должны стоять подряд. Разберём случаи чётного и нечётного n .

1. Пусть n чётно, т. е. $n = 2k$. Тогда среди всех возможных разностей (т. е. чисел от 1 до $2k - 1$) есть $k - 1$ чётное число. А среди наших $2k$ чисел есть ровно k чётных. Ясно, что k чётных чисел образуют не более $k - 1$ соседних пар, причём ровно $k - 1$ соседних пар может быть только в том случае, когда все чётные числа стоят подряд.

2. Пусть n нечётно, т. е. $n = 2k + 1$. Тогда среди разностей есть k чётных чисел. А среди самих чисел чётных либо k , либо $k + 1$. Ясно, что чётных чисел в этом случае должно быть $k + 1$, причём они должны идти подряд, чтобы между ними было ровно k соседних пар.

Теперь заметим, что нечётные разности могут быть только между чётным и нечётным числом. Но в нашей цепочке есть только два возможных для этого места: до и после блока из всех чётных чисел. Значит, нечётных разностей не больше 2. Если $n > 5$, то $n - 1 \geq 5$, и нечётных разностей должно встретиться хотя бы 3, противоречие. Значит, $n \leq 5$. \square

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии суммируются:

- +1 б. Показано, что наибольший общий делитель двух чисел не превосходит их разности.
- +1 б. Показано, что наибольший общий делитель в парах чисел должен совпадать с разностями чисел.
- +2 б. Доказано, что не может идти два подряд нечетных числа.
- +2 б. Доказано, что все четные числа в последовательности сгруппированы.
- +1 б. Приведён верный пример.

Следующие продвижения не оцениваются:

- 0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.6. Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?

Ответ: 5201.

Решение. Приведём пример, в котором использован 5201 цвет. Для этого рассмотрим все возможные вертикальные полосы. В первой из них покрасим все клетки в различные цвета. Во второй — в один и тот же новый цвет. В третьей — снова все клетки в новые различные цвета, потом снова в один новый цвет и так далее. При этом клеток в полосках с нечётным номером всего $51 \cdot 101 = 5151$, а полосок с чётным номером ровно 50, поэтому различных цветов ровно 5201. Также понятно, что в любом квадрате 2×2 встретятся две клетки из вертикальной полосы с чётным номером. Значит, они будут одинакового цвета, т. е. цветов в каждом квадрате 2×2 будет не больше 3 (на самом деле, ровно 3).

Теперь докажем, что больше 5201 цвета использовано быть не может. Сначала заметим, что в квадрате 101×101 клеток всего $101^2 = 10201$. Кроме того, существует ровно $100^2 = 10\,000$ квадратов 2×2 , которые накладывают условие на цвета. Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть k_i — количество клеток некоторого цвета i . Тогда существует не более $2(k_i - 1)$ квадратов 2×2 , в которых клеток этого цвета хотя бы 2.

Доказательство. Заметим, что каждая клетка этого цвета входит ровно в 4 квадрата 2×2 (какие-то из которых, возможно, выходят за границы доски). Посмотрим на самый нижний горизонтальный ряд клеток этого цвета. Выберем из них самую левую. Понятно, что квадрат, в котором эта клетка является правой верхней, не может больше содержать клеток этого цвета. Аналогично для самой правой клетки нижнего ряда (которая, вообще говоря, может совпадать с самой левой клеткой этого ряда) квадрат, в котором она является левой верхней, не может больше содержать клеток этого цвета. Такие же рассуждения можно провести с самым верхним горизонтальным рядом (который, опять же, может совпадать с самым нижним). Таким образом, есть хотя бы 4 квадрата 2×2 , в которых присутствует только одна клетка цвета i .

Рассмотрим теперь все квадраты 2×2 , содержащие клетки цвета i : квадраты с хотя бы 2 клетками этого цвета, а также хотя бы 4 квадрата с 1 клеткой этого цвета (некоторые из квадратов, возможно, выходят за границы таблицы). Суммарно в них $4k_i$ клеток цвета i (ведь каждая из этих клеток содержится ровно в 4 квадратах). Следовательно, квадратов, содержащих хотя бы 2 клетки этого цвета, не более $\frac{4k_i - 4}{2} = 2(k_i - 1)$. Лемма доказана.

Теперь сделаем оценку на количество цветов. Пусть их количество равно C . Так как в итоге для каждого квадрата 2×2 должен найтись цвет, клеток которого в нём хотя бы 2, то

$$\sum_{i=1}^C 2(k_i - 1) \geq 100^2.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=i}^C k_i = 101^2.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{i=1}^C 2(k_i - 1) = 2 \cdot 101^2 - 2C \geq 100^2,$$

откуда

$$C \leq 101^2 - \frac{100^2}{2} = 5201.$$

□

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются*:

+5 б. Доказано, что цветов не более 5201.

+2 б. Приведён верный пример на 5201 цветов.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Комментарий:

1 б. В решении приведен верный пример раскраски без расчета численного ответа.