10 класс

Задача 10.1. Найдите все пары рациональных чисел a и b таких, что число $a+b\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2+bx+a=0$.

Ответ: $(0;0), (-1;0), (-1/7;2/7)$.

Решение. Подставим число $a+b\sqrt{2}$ вместо x в уравнение. Получим

$$a^2+2ab\sqrt{2}+2b^2+ab+b^2\sqrt{2}+a=0.$$

Так как числа a и b рациональны, то и a^2+2b^2+ab+a рационально. С другой стороны, число $\sqrt{2}(2ab+b^2)$ может быть рационально, только если $2ab+b^2=0$. Значит, либо $b=0$, либо $b=-2a$.

В первом случае получаем уравнение $a^2+a=0$, откуда либо $a=0$, либо $a=-1$. В этом случае решениями являются пары $(0;0)$ и $(-1;0)$.

Во втором случае получаем уравнение $a^2+8a^2-2a^2+a=0$, откуда $a=0$ или $a=-\frac{1}{7}$. В этом случае получаем решения $(0;0)$ и $(-\frac{1}{7};\frac{2}{7})$.

Объединяя все случаи, получаем решения $(0;0), (-1;0), (-1/7;2/7)$. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

5 б. Задача в целом решена верно, но «потеряна» 1 подходящая пара.

2 б. Приведено не более 2 подходящих пар, и дальнейших продвижений нет.

Задача 10.2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим, например, число 6669. Заметим, что сумма его цифр равна 27, а сумма цифр числа $6669\cdot 3=20007$ равна 9, поэтому сумма цифр при умножении на 3 действительно уменьшилась в 3 раза. $\square$

Замечание. Пользуясь признаками делимости на 3 и 9, несложно убедиться, что подходящее число должно делиться на 9, причём его сумма цифр должна быть не меньше 27. Кроме 6669 существуют и другие подходящие числа: например, 36675 или 33333336.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения используются следующие критерии:

6 б. Приведён пример подходящего числа без обоснования.

0 б. Не приведён пример подходящего числа.

Задача 10.3. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = 13$, $CD = 7$, $AD = 17$, $\angle D = 90^\circ$. Из вершины B на сторону AD опустили высоту BH. Найдите длину отрезка HD.

Ответ: 12.

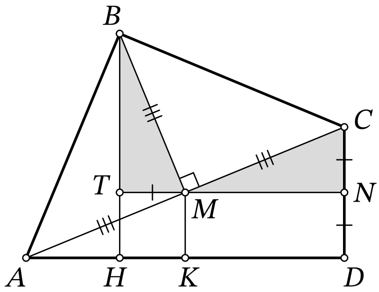

Рис. 4: к решению задачи 10.3

Решение. Вычислим длину отрезка AC как гипотенузы в прямоугольном треугольнике ADC:

$$AC^2 = 7^2 + 17^2 = 338.$$

Можно заметить, что $AC = 13\sqrt{2}$. Это означает, что ABC — прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными 13.

Обозначим середины отрезков AC, AD и CD через M, K и N соответственно (рис. 4). Прямая MN содержит среднюю линию треугольника ACD, то есть параллельна AD и перпендикулярна BH; пересечение MN с BH обозначим через T.

Прямоугольные треугольники BMT и MCN равны ($BM = MC$ как медиана в прямоугольном треугольнике ABC, углы BMT и CMN дополняют друг друга до 90°). Отсюда следует $\frac{7}{2} = CN = MT$. Кроме того, $MK \parallel CD \perp AD$, так что $HK = MT$. Получаем $HD = HK + DK = CN + DK = \frac{7}{2} + \frac{17}{2} = 12$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения применяются следующие критерии:

5 б. Задача в целом решена верно, но приведён лишний ответ.

2 б. Замечено, что ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.4. В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

Ответ: 1025.

Решение. Заметим, что каждый ребёнок не дружит максимум с 8 другими детьми. Действительно, если бы какой-то ребёнок не дружил бы хотя бы с 9 детьми, то можно было бы взять группу из него и 9 детей, с которыми он не дружит. Понятно, что эту группу нельзя разбить на 5 пар друзей. Таким образом, у каждого ребёнка не менее 41 друга, поэтому общее количество пар друзей не менее $41 \cdot 50 \,/\, 2 = 1025$.

Приведём пример, когда пар друзей ровно 1025, т. е. у каждого ребёнка ровно 41 друг. Для этого поставим всех детей по кругу и скажем, что каждый ребёнок дружит со всеми, кроме 4 детей слева и 4 детей справа от него (т. е. не дружит только с людьми, располагающимися на расстоянии не больше 4 от него). Докажем, что такой пример удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть мы выбрали 10 каких-то детей. Пронумеруем их числами от 1 до 10 по часовой стрелке, начиная с какого-то из них. Заметим, что ребёнок с номером 1 дружит с ребёнком с номером 6, так как в исходном круге ребёнок с номером 6 располагается на расстоянии больше 4 от ребёнка под номером 1. Таким образом, пара 1–6 является друзьями. Аналогично, пары 2–7, 3–8, 4–9 и 5–10 также являются друзьями. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что пар друзей не менее 1025.

+4 б. Приведён обоснованный пример с 1025 парами друзей.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.5. Сумма нескольких (не обязательно различных) действительных чисел из отрезка $[0, 1]$ не превышает S. Найдите наибольшее действительное значение S, при котором эти числа гарантированно можно разделить на две группы, сумма чисел в одной из которых не больше 8, а сумма чисел в другой не больше 4.

Ответ: 11,2.

Решение. Из условия очевидно следует, что $S \leqslant 8 + 4 = 12$. Сначала докажем, что при любом $S > 11{,}2$ можно подобрать такой набор чисел, чтобы их нельзя было разделить на две группы указанным образом. Пусть x — такое число, что $S = 11{,}2 + 14x$. Так как $11{,}2 < S \leqslant 12$, то $0 < x < 0{,}1$. Возьмём 14 одинаковых чисел, каждое из которых равно $0{,}8 + x$, все они принадлежат отрезку $[0, 1]$. Тогда в группу с суммой не больше 4 можно взять не более 4 таких чисел, а в группу с суммой не больше 8 можно взять не более 9 таких чисел. Таким образом, хотя бы одно число останется не взятым.

Теперь докажем, что при $S \leqslant 11{,}2$ всегда можно будет разбить числа требуемым образом. Для этого будем «складывать» числа во вторую группу по одному (следя за тем, чтобы сумма там не превосходила 4). Предположим, что мы положили туда несколько чисел так, что их сумма хотя бы 3,2. Тогда оставшаяся сумма не больше 8, а значит, все оставшиеся числа можно отнести к первой группе.

Предположим теперь, что сумма «сложенных» во вторую группу чисел меньше 3,2, причём ни одно из оставшихся чисел туда «положить» нельзя. Это значит, что все оставшиеся числа больше 0,8. При этом их, очевидно, не меньше 4, так как все они не больше 1 и их сумма больше 8. Но тогда можно взять такие 4 числа в качестве второй группы (убрав из второй группы все ранее сложенные туда числа). Их сумма больше 3,2, но не больше 4 (т. к. каждое из них больше 0,8, но меньше 1). Тогда все остальные числа можно взять в качестве первой группы. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

+3 б. Доказано, что при $S > 11{,}2$ существует набор чисел, которые невозможно разделить на две группы указанным образом.

+4 б. Доказано, что при $S \leqslant 11{,}2$ любой набор чисел всегда возможно разделить на две группы указанным образом.