

Олимпиада «Курчатов»
2016–17 учебный год
Заключительный этап

7 класс

Задача 1

Условие

Автомобиль, ехавший всё время в одном направлении, двигался первую треть времени с постоянной скоростью 60 км/ч, за вторую треть времени он проехал 35 км, а последний участок пути проехал с постоянной скоростью 80 км/ч. Скорость автомобиля на втором участке пути равнялась средней скорости за весь путь. Найдите

- 1) скорость автомобиля на втором участке;
- 2) полный путь, пройденный автомобилем;
- 3) время, затраченное на дорогу.

Возможное решение

Поскольку первый и третий участки пути были пройдены за одинаковое время, средняя скорость на этих двух участках равна

$$\frac{60 \frac{\text{км}}{\text{ч}} + 80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}{2} = 70 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Поскольку на втором участке скорость равна средней на всём пути, значит, она же равна средней скорости на первом и третьем участке, то есть 70 км/ч.

Время, затраченное на прохождение второй трети пути, равно

$$\frac{35 \text{ км}}{70 \text{ км/ч}} = 0,5 \text{ ч.}$$

Значит, полное время движения равно 1,5 ч. Полный путь найдём, зная среднюю скорость:

$$s = 70 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 1,5 \text{ ч} = 105 \text{ км.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Связь пути, скорости и времени.....	1 балл
Найдена скорость на втором участке	2 балла
Найдён весь путь	1 балл
Найдено всё время движения	1 балл

Задача 2

Условие

Два авианосца движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями. Скорость первого авианосца 15 км/ч, скорость второго — 25 км/ч. В момент, когда расстояние между кораблями равно 100 км, с первого авианосца взлетает вертолёт и движется по прямой ко второму авианосцу со скоростью 175 км/ч. Долетев до второго авианосца, вертолёт совершает посадку, и, спустя некоторое время, возвращается на первый авианосец, вновь двигаясь со скоро-

стью 175 км/ч. От момента, когда вертолёт долетел до второго авианосца, до момента, когда вертолёт покинул этот авианосец, прошло ровно 25 минут. Сколько времени вертолёт отсутствовал на первом авианосце? Найдите путь, пройденный вертолётном.

Возможное решение

В первой части полёта вертолёт и второй авианосец сближаются со скоростью 200 км/ч. Значит, вертолёт долетит до второго авианосца за время

$$t_1 = \frac{100 \text{ км}}{200 \text{ км/ч}} = 30 \text{ мин.}$$

Затем в течение времени $t_2 = 25$ минут вертолёт двигался вместе со вторым авианосцем. За $t_1 + t_2 = 55$ минут авианосцы сблизятся на

$$40 \text{ км/ч} \cdot \frac{55}{60} \text{ ч} = \frac{110}{3} \text{ км,}$$

и расстояние между ними будет равно $\frac{190}{3}$ км. Скорость сближения вертолёта и первого авианосца 190 км/ч, обратный путь вертолёта займёт время

$$t_3 = \frac{\frac{190}{3} \text{ км}}{190 \text{ км/ч}} = \frac{1}{3} \text{ ч} = 20 \text{ мин.}$$

Полное время отсутствия вертолёта на авианосце

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 75 \text{ мин.}$$

Вертолёт время $t_1 + t_3 = 50$ мин двигался со скоростью 175 км/ч, а время $t_2 = 25$ мин двигался со скоростью 25 км/ч, поэтому путь, пройденный вертолётном, равен

$$s = 175 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{5}{6} \text{ ч} + 25 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{5}{12} \text{ ч} = 156,25 \text{ км} \approx 156 \text{ км.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно использовано соотношение между временем, скоростью и расстоянием при равномерном движении 1 балл

Правильно найдены все необходимые скорости сближения 1 балл

Правильно найдено полное время полёта 2 балла

Правильно найден пройденный вертолётном путь 1 балл

Задача 3

Условие

Яблоко средних размеров имеет объём 225 см^3 , а средняя плотность яблок составляет 800 кг/м^3 . Яблоки фасуют по мешкам таким образом, чтобы масса яблок в мешке была равна 30 кг. Сколько в среднем яблок будет в одном мешке? Сколько яблок уместится в кузове автомобиля грузоподъёмностью 3 тонны при полной загрузке?

Возможное решение

Найдём массу одного яблока

$$m = \rho V = 180 \text{ г.}$$

Число яблок в мешке

$$N_1 = \frac{30 \text{ кг}}{0,18 \text{ кг}} \approx 167.$$

Число яблок в грузовом автомобиле

$$N_2 = \frac{3000 \text{ кг}}{0,18 \text{ кг}} \approx 16667.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена масса одного яблока.....	2 балла
Найдено количество яблок в мешке	1 балл
Найдено количество яблок в автомобиле.....	1 балл
Ответ для N_1 и N_2 округлѐн до целого	1 балл

Задача 4

Условие

Левый конец горизонтально расположенной пружины прикреплѐн к бруску, а за правый конец тянут с постоянной силой F , направленной вправо. При этом длина пружины равна 100 мм, и брусок движется с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения равен 0,4, масса бруска 200 г. Если тот же самый брусок подвесить на той же самой пружине, расположенной вертикально, длина пружины составит 115 мм. Найдите

- 1) величину силы F ;
- 2) жѐсткость пружины k ;
- 3) длину l пружины в недеформированном состоянии.

Ускорение свободного падения примите равным 10 Н/кг.

Возможное решение

Сила F равна силе, с которой пружина действует на брусок. Поскольку брусок движется равномерно, модуль действующей на него силы трения должен быть равен модулю силы, приложенной со стороны пружины. Значит,

$$F = \mu mg = 0,8 \text{ Н.}$$

Обозначим длину пружины в первом и втором случае за l_1 и l_2 соответственно:

$$l_1 = l + x_1 = 100 \text{ мм,}$$

$$l_2 = l + x_2 = 115 \text{ мм.}$$

По закону Гука:

$$kx_1 = \mu mg,$$

$$kx_2 = mg.$$

Получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 = \mu x_2, \\ x_2 - x_1 = l_2 - l_1 = 15 \text{ мм;} \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_1 = 10 \text{ мм,} \\ x_2 = 25 \text{ мм.} \end{cases}$$

Значит, $k = F/x_1 = 80 \text{ Н/м}$, $l = l_1 - x_1 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что сила натяжения пружины в первом случае (по модулю) равна силе трения и найдена сила F 1 балл

Указано, что сила натяжения пружины во втором случае равна силе тяжести	1 балл
Правильно использован закон Гука.....	1 балл
Ответ для k	1 балл
Ответ для l	1 балл

Задача 5

Условие

В двух цилиндрических сообщающихся сосудах находится вода. Площадь поперечного сечения широкого сосуда в два раза больше площади поперечного сечения узкого сосуда. После того, как в широкий сосуд долили керосин, уровень жидкости в широком сосуде стал на $x = 3$ см выше, чем в узком, а высота столба керосина составила $h_0 = 15$ см (керосин и вода не смешиваются, керосин находится только в широком сосуде). На сколько изменился уровень жидкости в узком сосуде? Какова плотность керосина? Плотность воды 1000 кг/м^3 .

Возможное решение

Столб керосина высотой h_0 уравновешен столбом воды высотой $h_0 - x$:

$$\rho_0 g h_0 = \rho g (h_0 - x),$$

значит, плотность керосина

$$\rho_0 = \rho \frac{h_0 - x}{h_0} = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Пусть уровень воды в широком сосуде опустился на h , тогда уровень воды в узком сосуде поднялся на $2h$ (объём воды сохраняется). Значит, высота столба воды равна $3h = h_0 - x$, откуда $h = 4$ см. Значит, уровень воды в узком сосуде поднялся на 8 см.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно записано равенство гидростатических давлений.....	1 балл
Найдена плотность керосина.....	1 балл
Использовано сохранения объёма воды при перетекании	1 балл
Указано, что уровень жидкости в узком сосуде поднимется.....	1 балл
Найдено на сколько	1 балл

Олимпиада «Курчатов»
2016–17 учебный год
Заключительный этап

8 класс

Задача 1

Условие

Автомобиль ехал всё время в одном направлении. Первую треть пути автомобиль прошёл с постоянной скоростью 60 км/ч, вторую треть пути он проехал за 20 минут, а последний участок пути проехал с постоянной скоростью 100 км/ч. Скорость автомобиля на втором участке пути равнялась средней скорости за всё время движения. Найдите

- 1) скорость автомобиля на втором участке;
- 2) полный путь, пройденный автомобилем;
- 3) время, затраченное на дорогу.

Возможное решение

Средняя скорость на всём пути равна скорости на втором участке, следовательно, равна и средней скорости на первом и третьем участках. Пусть s — треть пути. Время, затраченное на прохождение первого участка, равно $t_1 = s/v_1$. Время, затраченное на прохождение третьего участка, равно $t_3 = s/v_3$. Средняя скорость на первом и третьем участках:

$$v_2 = \frac{2s}{t_1 + t_3} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 100}{100 + 60} \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 75 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Найдём длину второго участка пути

$$s = 75 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 20 \text{ мин} = 25 \text{ км}.$$

Полная длина пути

$$3s = 75 \text{ км}.$$

Общее время движения

$$t = \frac{75 \text{ км}}{75 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 1 \text{ ч}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Связь пути, скорости и времени.....	1 балл
Найдена скорость на втором участке	2 балла
Найдён весь путь	1 балл
Найдено всё время движения	1 балл

Задача 2

Условие

В пищевой промышленности используется величина, называемая насыпной плотностью продукта, которая показывает, какую массу будет иметь продукт, для хранения которого понадобится 1 кубический метр объёма. Например, насыпная плотность овса 432 кг/м^3 , значит, для хранения 432 кг овса понадобится контейнер объёмом 1 м^3 .

Насыпная плотность груш составляет 480 кг/м^3 , а обычная плотность — 900 кг/м^3 . Какая часть объёма, используемого для хранения груш, приходится на воздух?

Средняя масса одной груши — 120 г . Сколько груш может храниться в прямоугольном ящике, если его размеры $60 \text{ см} \times 40 \text{ см} \times 50 \text{ см}$?

Возможное решение

Из 1 кубического метра объёма, используемого для хранения груш, на сами плоды приходится объём

$$\frac{480 \text{ кг}}{900 \text{ кг/м}^3} \approx 0,53 \text{ м}^3,$$

значит, $0,47 \text{ м}^3$ приходится на воздух, то есть на воздух приходится 47% объёма.

Объём ящика $0,12 \text{ м}^3$, масса груш, которые могут там храниться

$$0,12 \text{ м}^3 \cdot 480 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 57,6 \text{ кг},$$

что соответствует 480 грушам.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно найдена часть объёма, приходящегося на воздух.....2 балл

Найден объём ящика 1 балл

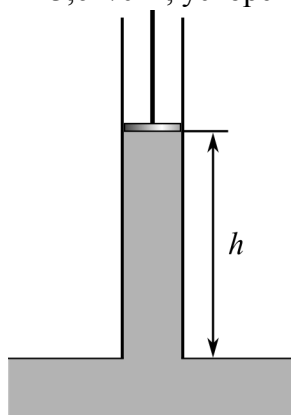
Правильно найдено число груш в ящике 1 балл

Число груш в ящике округлено до целого 1 балл

Задача 3

Условие

С какой силой нужно тянуть вверх поршень насоса для того, чтобы поднять ртуть на высоту $h = 50 \text{ см}$? Площадь поперечного сечения трубки насоса 4 см^2 , атмосферное давление 760 мм ртутного столба, плотность ртути $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$, ускорение свободного падения 10 Н/кг .



Возможное решение

Давление ртути под поршнем будет на ρgh меньше атмосферного, значит, сила атмосферного давления, действующая на поршень и направленная вниз, больше силы давления ртути на поршень на

$$\Delta F = \rho ghS = 13,6 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 50 \text{ см} \cdot 4 \text{ см}^2 \approx 27 \text{ Н}.$$

Именно с такой силой нужно тянуть поршень насоса.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записано выражение для гидростатической разницы давлений.....	1 балл
Указано, что сила есть давление, умноженное на площадь.....	1 балл
Указано, что сила, с которой нужно тянуть поршень, равняется разности силы атмосферного давления и силы давления ртути на поршень.....	1 балл
Получен правильный ответ	2 балла

Задача 4

Условие

С помощью электромотора груз массой 50 кг поднимают вверх. При этом груз движется с постоянной скоростью 3,5 см/с. На мотор подаётся постоянное напряжение 70 В, через мотор течёт ток силой 500 мА. Найдите КПД электромотора. Ускорение свободного падения 10 Н/кг.

Возможное решение

Полезная работа мотора — это увеличение потенциальной энергии груза. За 1 секунду потенциальная энергия груза увеличивается на

$$\Delta E = 50 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 3,5 \text{ см} = 17,5 \text{ Дж/с}.$$

Значит, полезная мощность

$$P_{\text{п}} = 17,5 \text{ Вт}.$$

Затрачиваемую мощность найдём из выражения для мощности электрического тока:

$$P_{\text{з}} = 70 \text{ В} \cdot 500 \text{ мА} = 35 \text{ Вт}.$$

КПД электромотора:

$$\eta = \frac{17,5 \text{ Вт}}{35 \text{ Вт}} = 50\%.$$

Критерии оценивания

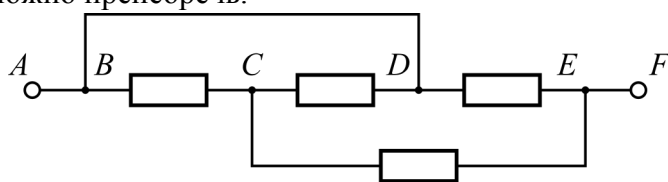
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

В работе указано, что полезная работа мотора идёт на увеличение потенциальной энергии груза.....	1 балл
Найдена полезная мощность мотора	1 балл
Использован закон Джоуля-Ленца.....	1 балл
Найдена полезная мощность мотора	1 балл
Найдён КПД мотора	1 балл

Задача 5

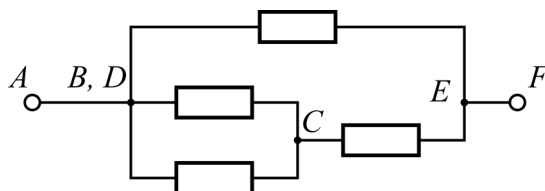
Условие

Найдите сопротивление между точками A и F участка цепи, схема которого показана на рисунке. Все резисторы имеют одинаковое сопротивление $R = 120$ кОм, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



Возможное решение

Точки B и D соединены проводом с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, поэтому эти точки можно объединить в одну. Получим эквивалентную схему, показанную на рисунке.



Между точками B и C два резистора соединены параллельно, их можно заменить одним с сопротивлением $R/2$. На участке BCE теперь имеется два резистора, соединённых последовательно, их можно заменить на один с сопротивлением

$$\frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R.$$

В итоге получилась схема из двух параллельных резисторов, сопротивление которой

$$R_{AF} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{2}{3R}} = \frac{3}{5}R = 72 \text{ кОм}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что точки B и D можно соединить в одну	1 балл
Изображена правильная эквивалентная схема	1 балл
Применены формулы для последовательного и параллельного соединения	1 балл
Получен верный ответ.....	2 балла

Олимпиада «Курчатов»
2016–17 учебный год
Заключительный этап

9 класс

Задача 1

Условие

Два авианосца движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями. Скорость первого авианосца 20 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. В момент, когда расстояние между кораблями равно 60 км, с первого авианосца взлетает вертолёт и движется по прямой ко второму авианосцу со скоростью 150 км/ч. Долетев до второго авианосца, вертолёт зависает на 18 минут над этим кораблём, и затем возвращается на первый авианосец, вновь двигаясь со скоростью 150 км/ч. Сколько времени вертолёт отсутствовал на первом авианосце? Найдите путь, пройденный вертолётном.

Возможное решение

В первой части полёта вертолёт и второй авианосец сближаются со скоростью 180 км/ч. Значит, вертолёт долетит до второго авианосца за время

$$t_1 = \frac{60 \text{ км}}{180 \text{ км/ч}} = 20 \text{ мин.}$$

Затем в течение времени $t_2 = 18$ минут вертолёт двигался вместе со вторым авианосцем. За $t_1 + t_2 = 38$ минут авианосцы сблизятся на

$$50 \text{ км/ч} \cdot \frac{38}{60} \text{ ч} = \frac{95}{3} \text{ км,}$$

и расстояние между ними будет равно $\frac{85}{3}$ км. Скорость сближения вертолёта и первого авианосца 170 км/ч, обратный путь займёт время

$$t_3 = \frac{\frac{85}{3} \text{ км}}{170 \text{ км/ч}} = \frac{1}{6} \text{ ч} = 10 \text{ мин.}$$

Полное время полёта

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 48 \text{ мин.}$$

Вертолёт время $t_1 + t_3 = 30$ мин двигался со скоростью 150 км/ч, а время $t_2 = 18$ мин двигался со скоростью 30 км/ч, поэтому путь, пройденный вертолётном, равен

$$s = 150 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{2} \text{ ч} + 30 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{3}{10} \text{ ч} = 84 \text{ км.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно использовано соотношение между временем, скоростью и расстоянием при равномерном движении	1 балл
Правильно найдены все необходимые скорости сближения	1 балл
Правильно найдено полное время полёта	2 балла
Правильно найден пройденный вертолётном путь	1 балл

Задача 2

Условие

Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вниз по наклонной плоскости, составляющей угол 60° с горизонтом. Найдите модуль скорости верхней точки диска.

Возможное решение

Проскальзывание отсутствует, следовательно, все точки на краю диска вращаются относительно центра со скоростью v_0 . Полная скорость точки складывается из скорости вращательного движения и скорости поступательного движения центра. Скорость вращательного движения равна по модулю v_0 и направлена горизонтально (поскольку это самая верхняя точка диска), а скорость центра по модулю также равна v_0 и направлена под углом 60° к горизонту. Значит, вертикальная составляющая скорости центра равна $v_0 \sin 60^\circ = (\sqrt{3}/2)v_0$, а горизонтальная равна $v_0 \cos 60^\circ = v_0/2$. Вертикальная составляющая полной скорости равна $(\sqrt{3}/2)v_0$, а горизонтальная составляющая полной скорости равна $v_0 + v_0/2 = (3/2)v_0$. Модуль полной скорости найдём по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}v_0^2 + \frac{9}{4}v_0^2} = \sqrt{3}v_0.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Использовано разложение на вращательное и поступательное движение	1 балл
Показано, что скорость вращательного движения равна v_0	1 балл
Найдено направление скорости вращательного движения	1 балл
Использована теорема Пифагора для нахождения модуля скорости.....	1 балл
Получен ответ	1 балл

Задача 3

Условие

Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный неподвижный блок. К концам нити подвешены небольшие грузы: к правому — груз массой m_1 , к левому — груз массой m_2 , $m_1 > m_2$. Изначально грузы удерживают неподвижно на одном уровне, затем их отпускают. Найдите скорости (модуль и направление) грузов в момент, когда расстояние между ними по вертикали составит h . Ускорение свободного падения g , трение пренебрежимо мало.

Возможное решение

Поскольку нить нерастяжимая, скорости грузов в любой момент будут равны по модулю и противоположны по направлению. Правый груз тяжелее, следовательно, его скорость будет направлена вертикально вниз, а скорость левого будет направлена вертикально вверх. Чтобы найти модуль скорости, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_1 - m_2)g \frac{h}{2}.$$

Здесь учтено, что правый груз опустился на $h/2$, а левый поднялся на $h/2$.

Получаем ответ для модуля скорости

$$v = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} gh}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Показано, что скорости грузов равны по модулю и противоположны по направлению ...	1 балл
Указаны направления скоростей	1 балл
Записан закон сохранения энергии	1 балл
Найдены модули скоростей	2 балла

Задача 4

Условие

На электрической плите стоит цилиндрическая кастрюля с кипящей водой. За $t = 10$ мин уровень воды в кастрюле уменьшился на $h = 2$ мм. Найдите КПД электроплиты, если она работает от источника постоянного тока напряжением $U = 220$ В, сопротивление нагревательной спирали $R = 50$ Ом, площадь поперечного сечения кастрюли $S = 350$ см². Полезной работой плиты считайте теплоту, переданную воде в кастрюле. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3$ МДж/кг, плотность воды $\rho = 1,0$ г/см³.

Возможное решение

Потребляемая плитой мощность равна $P_0 = U^2/R = 968$ Вт. Полезная мощность идёт на испарение воды:

$$P_1 = \frac{L\Delta m}{\Delta t} = \frac{L\rho Sh}{t} \approx 268 \text{ Вт.}$$

КПД электроплиты

$$\eta = \frac{P_1}{P_0} \approx 28\%.$$

Критерии оценивания

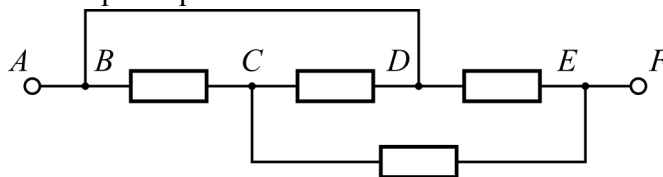
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена потребляемая мощность по закону Джоуля-Ленца	1 балл
Получено выражение для полезной мощности	2 балла
Правильно рассчитан КПД	2 балла

Задача 5

Условие

Найдите сопротивление между точками A и F участка цепи, схема которого показана на рисунке. Все резисторы имеют одинаковое сопротивление $R = 120$ кОм, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



Возможное решение

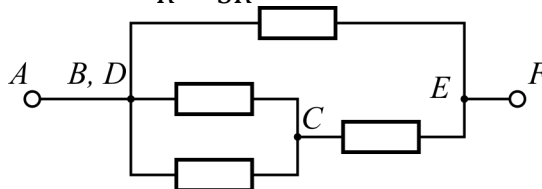
Точки B и D соединены проводом с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, поэтому эти точки можно объединить в одну. Получим эквивалентную схему, показанную на рисунке.

Между точками B и C два резистора соединены параллельно, их можно заменить одним с сопротивлением $R/2$. На участке BCE теперь имеется два резистора, соединённых последовательно, их можно заменить на один с сопротивлением

$$\frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R.$$

В итоге получилась схема из двух параллельных резисторов, сопротивление которой

$$R_{AF} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{2}{3R}} = \frac{3}{5}R = 72 \text{ кОм}.$$



Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что точки B и D можно соединить в одну	1 балл
Изображена правильная эквивалентная схема	1 балл
Применены формулы для последовательного и параллельного соединения	1 балл
Получен верный ответ	2 балла

Олимпиада «Курчатов»
2016–17 учебный год
Заключительный этап

10 класс

Задача 1

Условие

Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найдите модуль скорости нижней точки диска.

Возможное решение

Проскальзывание отсутствует, следовательно, все точки на краю диска вращаются относительно центра со скоростью v_0 . Полная скорость точки складывается из скорости вращательного движения и скорости поступательного движения центра. Скорость вращательного движения равна по модулю v_0 и направлена горизонтально (поскольку это самая нижняя точка диска), а скорость центра по модулю также равна v_0 и направлена под углом 30° к горизонту. Значит, вертикальная составляющая скорости центра равна $v_0 \sin 30^\circ = v_0/2$, а горизонтальная равна $v_0 \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2)v_0$. Вертикальная составляющая полной скорости равна $v_0/2$, а горизонтальная составляющая полной скорости равна $v_0 - (\sqrt{3}/2)v_0$. Модуль полной скорости найдём по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}v_0^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}v_0.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Использовано разложение на вращательное и поступательное движение	1 балл
Показано, что скорость вращательного движения равна v_0	1 балл
Найдено направление скорости вращательного движения	1 балл
Использована теорема Пифагора для нахождения модуля скорости	1 балл
Получен ответ	1 балл

Задача 2

Условие

Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный неподвижный блок. К концам нити подвешены небольшие грузы: к правому — груз массой m_1 , к левому — груз массой m_2 , $m_1 > m_2$. Изначально грузы удерживают неподвижно на одном уровне, затем их отпускают. Через какое время t после начала движения грузов расстояние между ними по вертикали составит h ? Ускорение свободного падения g , трение пренебрежимо мало.

Возможное решение

Поскольку нить нерастяжимая, ускорения грузов будут равны по модулю и противоположны по направлению. Правый груз тяжелее, следовательно, его ускорение будет направлено вниз,

а ускорение левого груза — вверх. Силы натяжения нити, действующие на грузы, будут равны по модулю, поскольку нить невесомая, блок неподвижный и идеальный, и трения нет. Обозначим модуль ускорений грузов a , модуль сил натяжения нити T . Направим ось y вертикально вверх и запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y для правого и левого груза соответственно:

$$\begin{cases} T - m_1 g = -m_1 a, \\ T - m_2 g = m_2 a; \end{cases} \text{откуда } a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Относительно друг друга грузы будут удаляться с постоянным ускорением $2a$, расстояние по вертикали между грузами через время t будет равно

$$h = 2a \frac{t^2}{2}, \text{откуда } t = \sqrt{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)h}{(m_1 - m_2)g}}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что ускорения грузов равны по модулю и противоположно направлены	1 балл
Указано, что силы натяжения нити, действующие на грузы, равны по модулю	1 балл
Записаны вторые законы Ньютона для грузов	1 балл
Найден модуль ускорений грузов	1 балл
Найдено время t	1 балл

Задача 3

Условие

Два маленьких бруска движутся по горизонтальной поверхности стола навстречу друг другу. Масса первого бруска $m_1 = m$, масса второго $m_2 = 2m$. Бруски сталкиваются. На какое расстояние L разъедутся бруски после удара? Непосредственно перед ударом модуль скорости первого бруска равен $v_1 = 2v$, второго бруска — $v_2 = v$. Удар абсолютно упругий и лобовой, движение брусков поступательное. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ , ускорение свободного падения g .

Возможное решение

Для нахождения скоростей после удара можно воспользоваться законами сохранения энергии и импульса, однако, решение можно указать и сразу, если заметить, что суммарный импульс брусков равен нулю. Значит, после столкновения бруски поменяют направления скоростей на противоположные, а по модулю скорости останутся теми же.

На первый брусок действует сила трения μmg . Для нахождения расстояния s_1 , на которое отъедет первый брусок от места удара, приравняем его начальную кинетическую энергию к модулю работы силы трения:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu mgs_1, \text{откуда } s_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{2v^2}{\mu g}.$$

Рассуждая аналогичным образом, найдём расстояние, пройденное вторым бруском:

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Расстояние, на которое разъедутся бруски, равно

$$L = s_1 + s_2 = \frac{5v^2}{2\mu g}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена скорость первого бруска после удара	1 балл
Найдена скорость второго бруска после удара.....	1 балл
Найдена смещение первого бруска после удара	1 балл
Найдена смещение второго бруска после удара.....	1 балл
Найдено расстояние L	1 балл

Задача 4

Условие

Воздушные шарики надувают гелием из баллона, в котором гелий находится в газообразном состоянии. Давление в баллоне до того, как надували шарики, было равно $p_1 = 150p_0$, где p_0 — атмосферное давление, а после надувания стало равным $p_2 = 90p_0$. Сколько шариков надули? Давление внутри надутого шарика $p = 1,2p_0$. Процесс происходит при постоянной температуре 25°C , объём надутого шарика в $k = 10$ раз меньше объёма баллона.

Возможное решение

Найдём изменение количества $\Delta\nu$ гелия в баллоне объёмом V , воспользовавшись уравнением состояния идеального газа:

$$(p_1 - p_2)V = \Delta\nu RT, \text{ откуда } \Delta\nu = \frac{60p_0V}{RT}.$$

Количество гелия в одном шаре

$$\nu = \frac{pV}{kRT} = \frac{1,2p_0V}{kRT}.$$

Число надутых шариков

$$N = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{60 \cdot k}{1,2} = 500.$$

Критерии оценивания

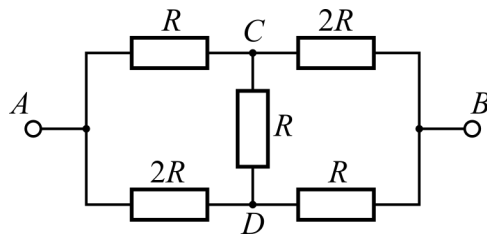
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записано уравнение состояния для гелия в баллоне.....	1 балл
Найдено изменение количества гелия в баллоне	1 балл
Записано уравнение состояния для гелия в шарике.....	1 балл
Найдено количество гелия в одном шарике	1 балл
Найдено количество надутых шариков	1 балл

Задача 5

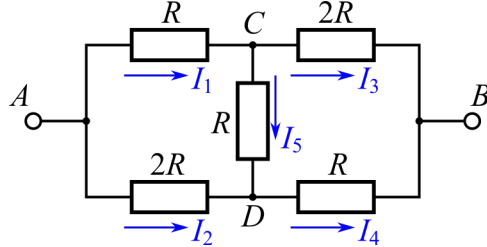
Условие

Найдите сопротивление между точками A и B участка цепи, схема которого показана на рисунке. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Найдите общее сопротивление участка AB цепи и силу тока на участке CD , если напряжение между точками A и B равно U .



Возможное решение

Введём обозначения для сил токов, как показано на рисунке.



Запишем первое правило Кирхгофа для узлов C и D:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_5, \\ I_2 + I_5 = I_4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_5 = I_1 - I_3, \\ I_4 = I_1 + I_2 - I_3. \end{cases}$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура ACBDA:

$$I_1 R + 2I_3 R - I_4 R - 2I_2 R = 0.$$

Подставив в это уравнение выражение для I_4 , получим

$$3I_3 R - 3I_2 R = 0 \Leftrightarrow I_2 = I_3 \Rightarrow I_5 = I_1 - I_2.$$

Запишем второе правило Кирхгофа для контура ACDA:

$$I_1 R + (I_1 - I_2)R - 2I_2 R = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3} I_1.$$

Напряжение между точками A и B

$$U = I_1 R + 2I_3 R = I_1 R + 2I_2 R = \frac{7}{3} I_1 R.$$

В точку A втекает ток силой

$$I = I_1 + I_2 = \frac{5}{3} I_1.$$

Значит, общее сопротивление цепи

$$R_0 = \frac{U}{I} = \frac{7}{5} R.$$

Сила тока

$$I_5 = I_1 - I_2 = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \frac{U}{\frac{7}{3} R} = \frac{U}{7R}.$$

Примечание: равенства $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$ могут быть получены из соображений симметрии.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Использовано первое правило Кирхгофа.....	1 балл
Использовано второе правило Кирхгофа.....	1 балл
Найдено общее сопротивление цепи	2 балла
Найдена сила тока на участке CD.....	1 балл

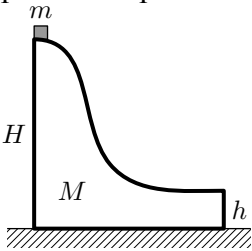
Олимпиада «Курчатов»
2016–17 учебный год
Заключительный этап

11 класс

Задача 1 (5 баллов)

Условие

Небольшая шайба массой m скатывается с вершины гладкой горки массой M и высотой H . Горка находится на гладкой поверхности. На какой высоте h над поверхностью должен находиться нижний горизонтальный участок горки для того, чтобы шайба упала на поверхность на максимальном расстоянии от точки поверхности, над которой произошел отрыв? Чему равно это расстояние, если $m : M = 19 : 81$, а высота горки $H = 1$ м?



Возможное решение

Поскольку все поверхности гладкие, то выполняется закон сохранения энергии.

$$mgH = mgh + m \frac{v^2}{2} + M \frac{u^2}{2},$$

где v – скорость шайбы в момент отрыва, а u – скорость горки.

Из закона сохранения импульса:

$$mv = Mu$$

Рассмотрим полет шайбы после покидания поверхности горки. Поскольку она вылетает горизонтально, то время полета $t_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, а дальность полета $L = vt_{\text{п}} = v \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Выражая из законов сохранения u и v находим L :

$$u = \frac{m}{M}v$$
$$mgH = mgh + m \frac{v^2}{2} + M \frac{(\frac{m}{M}v)^2}{2} = mgh + m \frac{v^2}{2} (1 + \frac{m}{M})$$
$$v^2 = 2g(H - h) / (1 + \frac{m}{M})$$

$$v = \sqrt{\frac{2Mg(H - h)}{M + m}}$$

$$L = 2 \sqrt{h(H - h) \frac{M}{M + m}}$$

Как видно, выражение для L принимает максимальное значение при $h = H/2$.

$$L_{max} = H \sqrt{\frac{M}{M + m}} = 0,9H = 0,9 \text{ м.}$$

Критерии оценивания

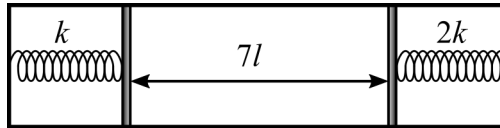
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

- Верно записан закон сохранения энергии..... 1 балл
- Верно записан закон сохранения импульса 1 балл
- Найдена дальность полета 1 балл
- Найдена высота нижнего участка горки 1 балл
- Найдена максимальная дальность полета 1 балл

Задача 2 (5 баллов)

Условие

К боковым стенкам горизонтально расположенного цилиндра с помощью пружин прикреплены два лёгких подвижных поршня, как показано на рисунке. Жёсткость левой пружины равна k , правой – $2k$, пружины подчиняются закону Гука и находятся в вакууме. Между поршнями находится идеальный газ при температуре $T_1 = 350$ К, расстояние между поршнями $7l$, длина каждой из пружин $3l$. После того, как газ нагрели до температуры $T_2 = 600$ К, длина правой пружины уменьшилась до $2l$. Найдите длины пружин в недеформированном состоянии.



Возможное решение

Поскольку жёсткость правой пружины в 2 раза больше, чем левой, а изменения сил давления на оба поршня при нагревании газа одинаковы, сжатие левой пружины должно быть в два раза больше, то есть составит $2l$. Поэтому после нагревания расстояние между поршнями будет равно $10l$. Пусть p_1, V_1 — начальные давление и объём газа, а p_2, V_2 — конечные. Как следует из уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ откуда } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} = \frac{600}{350} \cdot \frac{7l}{10l} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Значит, давление в результате нагревания увеличилось на 20%, из чего следует, что и деформация пружин увеличилась на 20%. Получается, что начальная деформация левой пружины равна $10l$, а правой — $5l$. Длина левой пружины в недеформированном состоянии $13l$, а правой — $8l$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что уменьшение длины левой пружины равно $2l$	1 балл
Найдено расстояние между поршнями после нагревания	1 балл
Правильно использовано уравнение состояния идеального газа	1 балл
Получен ответ	2 балла

Задача 3 (5 баллов)

Условие

Электронагреватель с сопротивлением 90 Ом помещён в баллон, в котором находится одноатомный идеальный газ под давлением $3 \cdot 10^5$ Па. Электронагреватель на 5 минут подключают к источнику постоянного напряжения с ЭДС 100 В и внутренним сопротивлением 10 Ом, после чего давление в баллоне становится равным $6 \cdot 10^5$ Па. Определите объём баллона. Газ не обменивается теплотой с окружающей средой.

Возможное решение

Сила тока, текущего через нагреватель, равна

$$\frac{100 \text{ В}}{90 \text{ Ом} + 10 \text{ Ом}} = 1 \text{ А.}$$

Количество теплоты, выделившейся в нагревателе:

$$Q = (1 \text{ А})^2 \cdot 90 \text{ Ом} \cdot 300 \text{ с} = 27 \text{ кДж.}$$

Поскольку газ не обменивается теплотой с окружающей средой и его объём постоянен (и равен объёму баллона), вся выделившаяся в нагревателе теплота пошла на увеличение внутренней энергии газа. Пусть V – объём баллона, а $\Delta p = 3 \cdot 10^5$ Па – изменение давления газа в баллоне, тогда

$$27 \text{ кДж} = \frac{3}{2} \Delta p V \Rightarrow V = \frac{18000 \text{ Дж}}{3 \cdot 10^5 \text{ Па}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 = 60 \text{ л.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена сила тока, текущего через нагреватель, или напряжение на нём	1 балл
Применен закон Джоуля-Ленца	1 балл
Применено выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа.....	1 балл
Получен ответ	2 балла

Задача 4 (5 баллов)

Условие

Три одинаковых маленьких шарика, каждый из которых имеет массу m и несёт заряд q , удерживают в вершинах правильного треугольника с длиной стороны a . В некоторый момент все шарики отпускают, сообщая каждому скорость v , направленную к центру треугольника. Какой путь пройдёт каждый из шариков к тому моменту, когда его скорость станет равной нулю?

Возможное решение

Поскольку все шарики находятся в одинаковых условиях, они и двигаться будут одинаково: вдоль прямых, соединяющих их начальные положения с центром треугольника, причём в любой момент времени между всеми шариками будут одинаковые расстояния. Значит, и скорости шариков обратятся в ноль одновременно. Пусть в этот момент расстояния между шариками равны b . Запишем закон сохранения энергии:

$$3\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{mv^2}{2}\right) = 3\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 b} \Rightarrow a - b = \frac{2\pi\epsilon_0 mv^2 a^2}{q^2 + 2\pi\epsilon_0 mv^2 a}.$$

Расстояние от вершины до центра в правильном треугольнике со стороной a равно $a/\sqrt{3}$, значит, искомый путь каждого из шариков равен:

$$s = \frac{2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 mv^2 a^2}{3(q^2 + 2\pi\epsilon_0 mv^2 a)}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что заряды движутся одинаковым образом 1 балл

Правильно применен закон сохранения энергии 2 балла

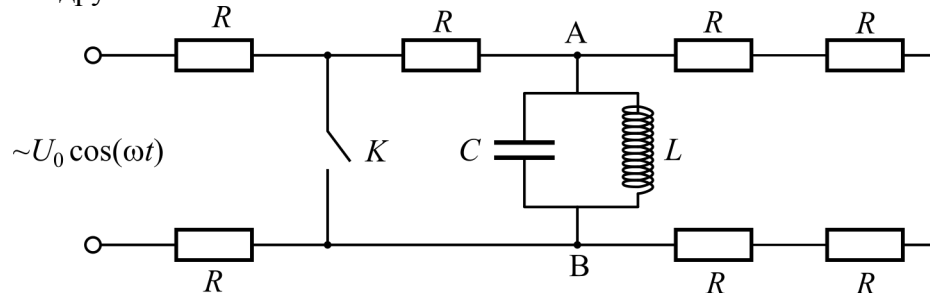
Получен правильный ответ 2 балла

Задача 5 (10 баллов)

Условие

В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все резисторы одинаковые, и сопротивление каждого из них равно R . Цепь очень давно подключена к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Ёмкость C конденсатора и индуктивность L катушки подобраны таким образом, что выполняется соотношение: $\omega L = 1/(\omega C)$.

- 1) Найдите максимальное напряжение на конденсаторе.
- 2) Найдите максимальную силу тока, протекающего через катушку.
- 3) Ключ K замыкают в момент, когда ток через катушку не течёт. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов, расположенных на рисунке справа от ключа K , после его замыкания.
- 4) Как изменятся ответы для количеств теплоты, выделившихся в тех же резисторах, если ключ размыкают в момент, когда ток через катушку максимален?
- 5) Как изменятся ответы на вопросы 1), 2), 3) и 4), если катушка и конденсатор будут подключены к тем же точкам А и В не параллельно друг другу, а последовательно друг за другом?



Возможное решение

Поскольку в условии сказано, что цепь была подключена к источнику переменного напряжения давно, то это означает, что все переходные процессы в такой цепи давно прекратились. Для переменного тока параллельно соединенные конденсатор и катушка с выбранными значениями параметров C и L представляют собой бесконечно большое сопротивление (в любой момент времени сумма сил токов, текущих через конденсатор и катушку равна нулю, поскольку импедансы этих элементов цепи одинаковы, а токи через них текут в противофазе). Поэтому до замыкания ключа ток во всех семи резисторах одинаковый и равен $I(t) = U_0 \cos(\omega t)/(7R)$. Напряжение на конденсаторе и на катушке в любой момент времени также одинаковое, оно равно $4U_0 \cos(\omega t)/7$. Амплитуда этого переменного напряжения и есть максимальное напряжение на конденсаторе, то есть $U_{C\max} = 4U_0/7$.

Амплитуда тока, текущего через катушку, равна

$$I_{L\max} = 4U_0/(7\omega L) = 4\omega C U_0/7, \text{ или } I_{L\max} = \frac{4U_0}{7} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Как уже говорилось, равные по модулю токи текут через конденсатор и через катушку в противофазе, в результате чего ток, протекающий по проводникам, соединяющим L - C контур с узлами А и В, равен нулю. В колебательном контуре запасена электрическая энергия, равная $C \times U_{C\max}^2/2$, или $L \times I_{L\max}^2/2$, или $8C(U_0)^2/49$, которая после замыкания ключа превратится в теплоту, выделившуюся в резисторах, расположенных справа от ключа.

Она распределится между пятью резисторами, которые находятся правее ключа. Из этой энергии $4/5$ доли выделится в резисторе, расположенном между ключом и конденсато-

ром, то есть $W_1 = 32CU_0^2/245$. В каждом из четырех оставшихся резисторов выделится четвертая часть от $1/5$ доли энергии конденсатора, то есть $1/20$ часть от упомянутой энергии: $W_2 = 2CU_0^2/245$.

От момента замыкания ключа теплота, выделившаяся в каждом из пяти резисторов, никак не зависит.

Если конденсатор и катушка будут подключены не параллельно, а последовательно друг за другом, то в этом случае для переменного тока такой колебательный контур представляет собой «короткое замыкание», то есть сопротивление на участке А – В равно нулю. В этом случае максимальный ток через катушку (и через конденсатор тоже) равен $U_0/(3R)$. Максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_{C\max} = U_0/(3R\omega C) = \omega LU_0/(3R), \text{ или } U_{C\max} = \frac{U_0}{3R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В колебательном контуре до замыкания ключа была запасена энергия: $LU_0^2/(18R^2)$.

Эта энергия после замыкания ключа превратится в теплоту, которая выделится в тех же пяти резисторах, расположенных на рисунке справа от ключа, в такой же пропорции, как и для параллельного соединения конденсатора и катушки. То есть в резисторе, расположенном на рисунке между ключом и колебательным контуром, выделится $4/5$ от запасенной в контуре энергии, то есть: $2LU_0^2/(45R^2)$, а в каждом из оставшихся четырех резисторов выделится по $1/20$ от запаса энергии в контуре, то есть по $LU_0^2/(360R^2)$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 10 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено максимальное значение напряжения на конденсаторе в первом случае.....	1 балл
Найдена максимальная сила тока через катушку в первом случае	1 балл
Даны правильные ответы на пункт 3 задачи	2 балла
Даны правильные ответы на пункт 4 задачи, либо указано, что они такие же, как и в третьем пункте	1 балл
Найдено максимальное значение напряжения на конденсаторе во втором случае.....	1 балл
Найдена максимальная сила тока через катушку во втором случае	1 балл
Найдены количества теплоты, выделившиеся в резисторах после замыкания ключа в случае последовательного соединения конденсатора и катушки	2 балла
Указано, что количества теплоты не зависят от момента замыкания ключа, либо подсчитаны для двух случаев и получены одинаковые значения	1 балл

Задача 6 (5 баллов)

Условие

С помощью тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 см получили на экране увеличенное в 4 раза чёткое изображение предмета. Затем, не меняя положения линзы, экран придвинули на 40 см к линзе и переместили предмет так, чтобы на экране вновь получилось чёткое изображение предмета. Найдите новое расстояние от предмета до линзы. Какое увеличение получилось во втором случае?

Возможное решение

Пусть b — начальное расстояние от экрана до линзы, тогда начальное расстояние от предмета до линзы равно $b/4$ (использована формула для увеличения, даваемого линзой). По формуле тонкой линзы:

$$\frac{4}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = 5F = 100 \text{ см.}$$

Значит, новое расстояние от линзы до экрана $100 \text{ см} - 40 \text{ см} = 60 \text{ см}$. Запишем формулу тонкой линзы во втором случае, обозначив расстояние от предмета до линзы за x :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{60 \text{ см}} = \frac{1}{20 \text{ см}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{60 \text{ см}} \Rightarrow x = 30 \text{ см.}$$

Теперь линза даёт изображение, увеличенное в $(60 \text{ см})/(30 \text{ см}) = 2$ раза.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записана формула для увеличения	1 балл
Записана формула тонкой линзы	1 балл
Правильно найдено новое расстояние от предмета до линзы.....	2 балла
Правильно найдено новое увеличение	1 балл