Высшая проба 7 класс

Задача 1. (Фольклор)

В трёх коробках лежат шарики. В первой – красные, во второй – белые, в третьей лежат шарики и красного, и белого цвета. На каждой коробке сделан надпись «красные», «белые», «смешанные», но известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Семиклассник Сергей хочет узнать, где какие шарики. Для этого он может распечатать ровно одну коробку и вынуть оттуда ровно один шарик. Сможет ли он добиться своей цели?

Ответ: Да. **Решение:**

Взять из коробки "смешанные":
Красный ⇒ в коробке со смешанными шариками красные ⇒ в коробке с белыми шириками не белые и не красные (тогда смешанные) ⇒ в коробке с красными белые

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$

Неочевидное и непонятное следствие вида «в смешанных красный ⇒ в красных белые»: 11 баллов $(\pm)$

Задача 2

(Штерн А.) На доске написано положительное число, с которым разрешается делать следующие операции:

1) умножать на два;

2) прибавлять один.

Каждый из трёх школьников один раз применил к имеющемуся числу первую операцию и два раза вторую операцию в некотором порядке. При этом все три числа оказались различными, и число, полученное первым школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 60%. Докажите, что число, полученное третьим школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 30%.

Решение: Из x можно сделать $2x+2, 2x+3, 2x+4$

При $x>0$: $2x+4$ не может быть на 60% больше чем $2x+3$ (так как 1 больше чем 60% от $2x+3$)

$(2x+2)*160\% < 2x+4 \Rightarrow 1{,}2x < 0{,}8 \Rightarrow x < \dfrac{2}{3}$

Тогда $(2x+3)*130\% < 2x+4$

Критерии: Правильное решение: 15 баллов $(+)$

Не разобран случай с другим соответствием чисел и школьников: 11 баллов $(\pm)$

Получена оценка $x<\frac{2}{3}$: не меньше 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только сопоставлены числа и школьники: 6 баллов $(\mp)$

Задача 3

(Штерн А.) В прямоугольном треугольнике KLM проведены биссектрисы KE и LF, пересекающиеся в точке O. Прямая, делящая на две равные части угол EOL, отсекает от исходного треугольника равнобедренный. Найдите острые углы треугольника KLM.

Ответ: $(45°, 45°), (18°, 72°), \left(\frac{270°}{7}, \frac{360°}{7}\right)$

Решение:

Случай 1: проведены биссектрисы двух острых углов.

Пусть биссектриса угла EOL пересекает катет KM в точке T, катет LM в точке S и $\angle EKM = \alpha$.

Тогда $\angle KOF = 45° \Rightarrow \angle STM = \alpha + 22.5°, \angle TSM = 67.5° - \alpha$.

Отсекается треугольник STM, в котором есть прямой угол $\Rightarrow$ если он равнобедренный,

$$\angle STM = \angle TSM \Rightarrow \alpha + 22.5° = 67.5° - \alpha \Rightarrow \alpha = 22.5° \Rightarrow \text{искомые углы } (45°, 45°)$$

Случай 2: проведена биссектриса острого угла L и прямого угла K.

Пусть биссектриса угла EOL пересекает катет KM в точке S, катет LM в точке T и $\angle KLO = \alpha$.

Тогда $\angle EOL = 45° + \alpha, \angle ETO = 22.5° + \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \angle TSM = 67.5° + \frac{\alpha}{2}$

Итак, углы отсечённого треугольника STM составляют $22.5° + \frac{3\alpha}{2}, 67.5° + \frac{\alpha}{2}$ и $90° - 2\alpha$.

Среди них есть два одинаковых.

Углы $22.5° + \frac{3\alpha}{2}$ и $67.5° + \frac{\alpha}{2}$ не могут быть равны.

Два других равенства приводят к $\alpha = 9°$ и $\alpha = \frac{135°}{7}$, то есть к ответам $(18°, 72°), \left(\frac{270°}{7}, \frac{360°}{7}\right)$.

Критерии:

Для решения задачи надо разобрать 4 подслучая (один в первом случае и 3 во втором).

Если правильно разобран

- один: 6 баллов $(\mp)$
- два : 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$
- три: 11 баллов $(\pm)$
- все четыре: : 15 баллов $(+)$

Задача 4

(По материалам американских математических соревнований) Собственным делителем числа называется любой делитель, отличный от 1 и самого числа. Найдите число способов, которыми можно раскрасить в три цвета числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так чтобы цвет каждого числа отличался от цвета любого его собственного делителя. Не забудьте объяснить предложенный Вами способ подсчёта.

Ответ: 432 **Решение:**

Красим 5 и 7 (9 вариантов)

Красим 2, 4, 8 ($3 * 2 * 1 = 6$ вариантов)

Осталось покрасить 3, 6 и 9

Красим 3. Если 3 и 2 одного цвета — по 2 способа на 6 и 9

Если разных — однозначно 6 и 2 способа на 9

Итого $2 * 2 + 2 = 8$ способов на 3,6,9 и $9 * 6 * 8$ способов всего

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)
Правильно посчитано количество способов покрасить 2, 3, 6 : 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Неправильно посчитано только количество способов 2,3,6 (например, всегда красим 2 и 3 разными цветами) : не больше, чем 6 баллов ($\mp$)

Задача 5. (Куянов Ф.)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены

равенства $\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$

Ответ: (2, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 5), (2, 1, 3, 5), (1, 2, 5, 3), (2, 1,5, 3), (3, 5,1,2), (5, 3,1,2), (3, 5,2,1), (5, 3,2,1)

Решение:

$$\begin{cases} 0 = cd - a - b \\ 0 = ab - c - d \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$$

Каждое из $(a-1)(b-1)$ и $(c-1)(d-1)$ — неотр. целое. Если это:

1 и 1 $\Rightarrow (a, b, c, d) = (2,2,2,2)$

0 и 2 $\Rightarrow (c-1)(d-1) = 2 \Rightarrow \{c, d\} = \{2,3\}, \{a, b\} = \{1, x\}, a + b = cd = 6 \Rightarrow b = 5$

2 и 0 даст перестановку. Осталось проверить, что все полученные наборы подходят под уравнения системы.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Не снижаем за потерю части случаев с перестановками 1,2,3,5

Считаем очевидными утверждения вида $a + b < ab$ при $a, b > 3$

Нет проверки ответа (и односторонние следствия в решении): 13 баллов (+.)

Сведено к обозримому количеству случаев (например, доказано, что все числа меньше 6): 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Получено равенство $(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$ или аналогичное: 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 6

(Сингапур-2015) Некоторые клетки квадрата 9 на 9 покрашены в чёрный цвет так, что в каждом прямоугольнике из шести клеток ровно две чёрные. Сколько всего клеток в квадрате покрашено? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Ответ: 27

Комментарий: достаточно рассматривать прямоугольники 2×3

Решение:

Назовем нижний левый квадрат $(1, 1)$. Пример на 27 черных клеток: покрашенs в черный цвет все клетки (a, b), такие что $(a - b)$ делится на 3.

Рассмотрим квадрат 9×9 без клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$. Получившуюся фигуру можно замостить тринадцатью прямоугольниками 2×3 в которых будет 26 черных клеток. Ясно, что выброшенные клетки $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ не могут быть все черные, так как они содержатся в прямоугольнике 2×3

Предположим, что среди клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ нет черных клеток. Квадрат без клеток $\{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ тоже можно замостить 13 прямоугольниками 2×3, поэтому среди $\{(1,1), (2,1), (3,1)\}$ нет черных клеток. Аналогичное рассуждение показывает, что среди $\{(3,1), (3,2), (3,3)\}$ нет черных клеток. Но тогда в прямоугольнике 2×3 из клеток $(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)$ мы нашли 5 белых клеток. Противоречие.

Теперь предположим, что среди клеток $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$ две черные. Тогда всего в квадрате 9×9 всего 28 черных клеток. Следуя раннее приведенному аргументу, получим, что в полосках $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}, \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}, \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ также по две черные клетки.

Среди клеток $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ все белые, так как эта полоска вместе с полоской $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ составляет прямоугольник 2×3, в котором всего 2 черные клетки. Используя этот аргумент получаем, что клетки покрашены, как на рисунке, в которой опять же можно найти прямоугольник 2×3 с пятью белыми клетками, что приводит к противоречию.

б	б	б
ч	б	ч
б	б	б
ч	б	ч

Значит среди клеток $\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ всего одна черная клетка, что соответствует примеру на 27 черных клеток.

Критерии: Правильное решение: 25 баллов (+)

Доказано, что если раскраска, удовлетворяющая условию, существует, то в ней 27 черных клеток, но не доказано существование (не приведен пример): 17 баллов ($\pm$)

Правильно доказано, что не может быть двух чёрных клеток рядом: 13 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только правильный ответ и пример: 8 баллов ($\mp$)

Задача 1. (Штерн А.)

Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее, как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более, чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

Ответ: Нет. **Решение:**

$$\begin{cases}\dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{3}{2}\dfrac{a}{b}\\ \dfrac{a-n}{b-n} > \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2ab+2nb > 3ab+3an\\ 2ab-2nb > ab-an\end{cases} \Rightarrow 4ab > 4ab+2an, \text{что невозможно}$$

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Домножено на возможно отрицательное число — не более 6 баллов ($\mp$)

Неравенства из условия ($b-n>0$, $b>a>0$) при преобразовании системы можно использовать неявно

Задача 2. (Фольклор)

В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Ответ: Любому натуральному числу больше 1. **Решение:**

Пусть синих m, красных n $(m>n)$.

Вероятность вынуть два шарика одного цвета $\left(\dfrac{n}{n+m}\right)\left(\dfrac{n-1}{n+m-1}\right)+\left(\dfrac{m}{n+m}\right)\left(\dfrac{m-1}{n+m-1}\right)$

Вероятность вынуть два шарика разных цветов $\left(\dfrac{n}{n+m}\right)\left(\dfrac{m}{n+m-1}\right)+\left(\dfrac{m}{n+m}\right)\left(\dfrac{n}{n+m-1}\right)$

То есть $n(n-1)+m(m-1)=nm+mn \Rightarrow (m-n)^2=m+n$

Тогда, обозначив $m-n=a$, $\quad a^2=n+n+a \Rightarrow a^2-2n-a=0 \Rightarrow n=\dfrac{a^2-a}{2}, m=\dfrac{a^2+a}{2}$

$a=1$ не подходит (по условию $n>0$) При $a>1$ m и n натуральные(т. к. у a и a^2 одинаковая чётность)

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Формулы для вероятностей не нуждаются в пояснении, но если существенно неправильные (например, если два шарика одного цвета берем неупорядоченно, а разных — упорядоченно) −0 баллов (−)

Без пояснений сразу написано $n(n-1)+m(m-1)=nm+mn$ и т. п. : не больше 11 баллов ($\pm$)

Если в решении найдено выражение $n=\dfrac{a^2-a}{2}$, надо понять, когда $n(a)$ натуральное.

Для этого надо сказать, что $n(a)$ целое, и что $n(a)>0 \Leftrightarrow a>1$

Если проверено только одно из этого: 13 баллов (+.), ничего: 11 баллов ($\pm$)

Через разность выразили $m+n$ (или $\sqrt{m+n}$) — не меньше 8 баллов ($^{+}/_{2}$), m или n — не меньше 11 ($\pm$)

Через m выразили разность, и записали в ответ формулу $k(m)$ — если $k(m)$ всегда целое, 11 баллов ($\pm$)

Задача 3. (Штерн А.)

В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

Решение:

Вместо "а делится на b" достаточно $a \geq b$, то есть $a_n \geq a_{n+5}, a_n \leq a_{n+8}$

В самом деле, $a_1 \geq a_{1+5*5=26} \geq a_{26-3*8=2}$, $\quad a_2 \geq a_{17} \geq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$

То есть для любой части последовательности из 26 элементов $a_1 = a_2 = a_{26} \Rightarrow$ все числа равны

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Доказывается, что например $a_6 = a_1$, используется a_{26}, говорится что аналогично $a_n = a_{n+5}$ для всех n

(Но не работает для $a_{n>2020-26}$) – не больше 11 баллов (±)

Решена задача с другими числами в условии – не больше 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 4. (Куянов Ф.)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены

равенства $\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$

Ответ: (2, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 5), (2, 1, 3, 5), (1, 2, 5, 3), (2, 1,5, 3), (3, 5,1,2), (5, 3,1,2), (3, 5,2,1), (5, 3,2,1)

Решение:

$$\begin{cases} 0 = cd - a - b \\ 0 = ab - c - d \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$$

Каждое из $(a-1)(b-1)$ и $(c-1)(d-1)$ – неотр. целое. Если это:

1 и 1 $\Rightarrow (a, b, c, d) = (2,2,2,2)$

0 и 2 $\Rightarrow (c-1)(d-1) = 2 \Rightarrow \{c, d\} = \{2,3\}, \{a, b\} = \{1, x\}, a + b = cd = 6 \Rightarrow b = 5$

2 и 0 даст перестановку. Осталось проверить, что все полученные наборы подходят под уравнения системы.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Не снижаем за потерю части случаев с перестановками 1,2,3,5

Считаем очевидными утверждения вида $a + b < ab$ при $a, b > 3$

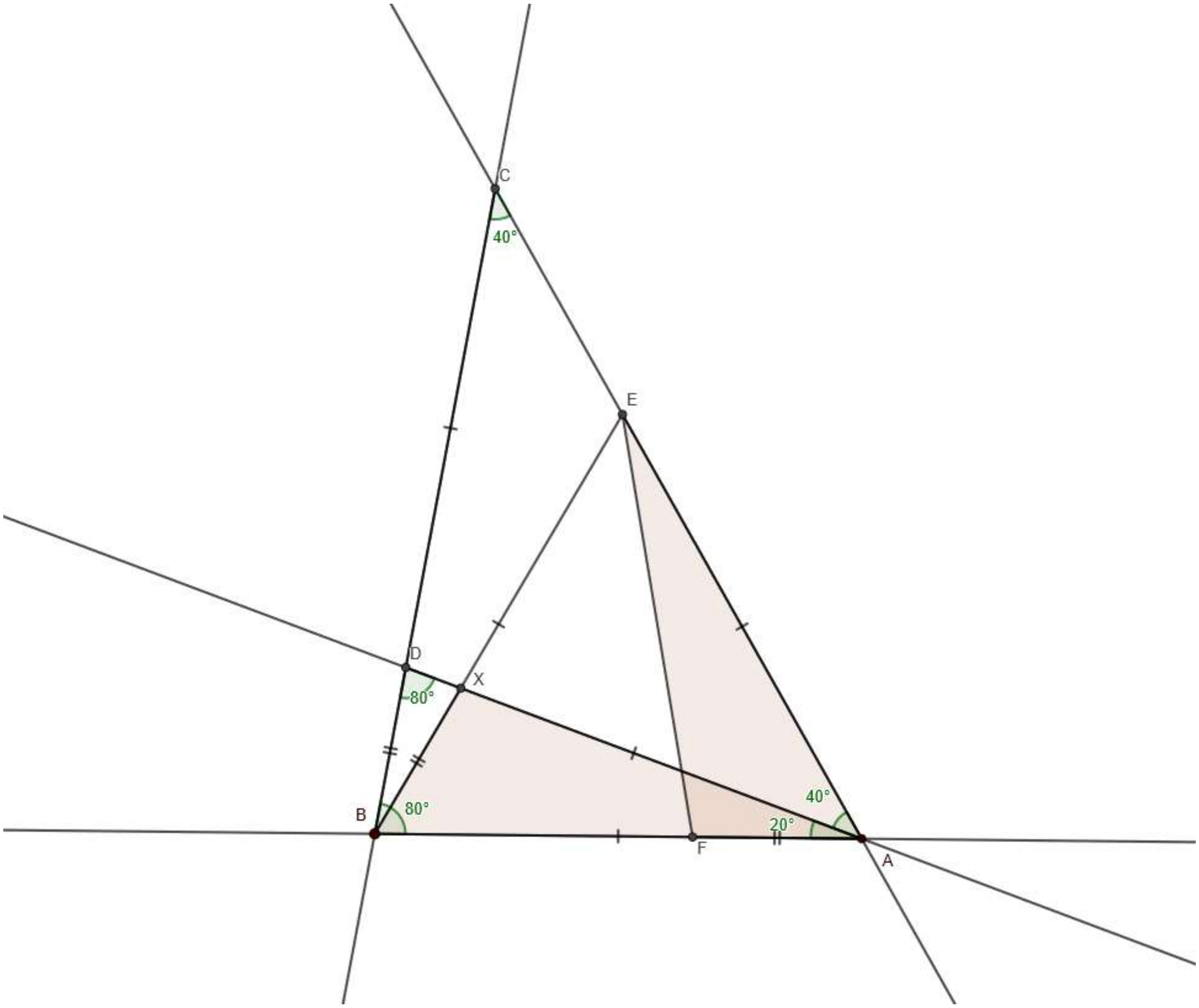
Нет проверки ответа (и односторонние следствия в решении): 13 баллов (+.)

Сведено к обозримому количеству случаев (например, доказано, что все числа меньше 6): 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Получено равенство $(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$ или аналогичное: 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 5. (по материалам Уральских турниров)

В треугольнике ABC угол B равен $80°$. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$
На стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF.



Ответ: $20°$. **Решение:**

Поскольку $AB = AD$ имеем $\angle ADB = \angle ABD = 80°$, а поскольку $AD = DC$, имеем $\angle DAC = \angle DCA = 40°$.
Поэтому $\angle BAE = 60°$, следовательно, треугольник ABE — правильный.
Тогда обозначив через X точку пересечения AD и BE имеем $\angle BXD = \angle BAX + \angle ABX = 80° = \angle BDX$, то есть $BX = BD$.
Из этого следует, что треугольники ABX и EAF равны по двум сторонам и углу между ними.
Таким образом, $\angle AEF = \angle BAX = 20°$.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Нашел и доказал равносторонний треугольник : не меньше 6 баллов ($\mp$)

Задача 6.

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если: а) $n = 404$? б) $n = 406$

Ответ: 202 цвета в обоих пунктах. **Решение:**

Пример для пункта а) на 202 цвета:

Назовем 198-блоком 198 подряд идущих домов, у которых любую пару домов на расстоянии 99 мы покрасили в уникальный цвет (то есть среди всех 404 домов нет других домов такого цвета)

Назовём 2-блоком пару домов, которую мы покрасили в уникальный цвет

Теперь покрасим 404 дома так: 2-блок, 198-блок, 2-блок, 2-блок, 198-блок, 2-блок

406 домов тоже можно покрасить в 202 цвета, добавив в конец два дома, цвет которых совпадает с последним 2-блоком.

Оценка в пункте а):

Для каждого цвета должно быть хотя бы 2 дома $\Rightarrow$ домов максимум 404

Оценка в пункте б):

Пусть мы смогли покрасить 406 домов в 203 цвета, то есть каждый цвет использован 2 раза.

Пронумеруем цвета в порядке появления при обходе домов, то есть для i цвета в него были покрашены дома с номерами a_i и b_i, причём $a_i < b_i$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{203}$

Заметим, что тогда и $b_1 < b_2 < \cdots < b_{203}$, так как если $i < j, b_i > b_j$, то $a_i < a_j < b_j < b_i$, но тогда любой отрезок, содержащий оба дома $i -$ го цвета содержит и оба дома $j -$ го цвета.

Теперь вместо раскраски домов рассмотрим последовательность букв a и b,
где a вместо домов, номер которых имеет вид a_i (а b — где b_i)

Из первых 100 букв ровно одна b, ведь для 1ого цвета отрезок может быть только с первого по сотый дом

(То есть первый цвет нём встречается два раза, а любой другой- максимум 1)

Значит среди первых 100 букв 99 aшек. Значит среди букв от 100 до 199 как минимум 98 bшек

(Так как есть 98 чисел $a_{i\geq 2}$, для которых $b_i \geq 100$, но $b_i \leq 199$, так как $b_i - a_i \leq 99$)

Тогда среди первых 199 домов максимум 100 aшек, то есть $a_{101} \geq 200$

Аналогично, среди последних 199 домов максимум 100 bшек, $b_{103} \leq 206$, то есть

$$200 \leq a_{101} < a_{102} < a_{103} < b_{103} \leq 206, \qquad 200 \leq a_{101} < b_{101} < b_{102} < b_{103} \leq 206$$

Теперь рассмотрим сотню для a_{102} и b_{102}.
Либо она содержит 206, тогда она содержит a_{103} и b_{103}, либо она содержит 200, а тогда и a_{101}, b_{101}

Тогда эта сотня содержит и 2 дома другого цвета, противоречие

Критерии: Правильное решение: 25 баллов (+)

Проверять правильный пример не требуется, пример в пункте б) отдельно не оценивается

Пункт а) (пример плюс простая оценка): 13 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только пример: 8 баллов ($\mp$)

Высшая Проба — 21-9/10, решения, критерии

№1 (14 баллов)

Через $\langle x\rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n+\frac{1}{2}\rangle = n$ при целом n). Положим $b_k = k+\langle\sqrt{k}\rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности b_1, b_2, b_3, … в порядке возрастания; получим последовательность a_1, a_2, a_3, …. Найдите явную формулу для числа a_n.

Решение

Ответ: $a_k = k^2$

$(k+1/2)^2 = k^2+k+1/4$. Значит, $n \le k^2+k$ равносильно тому, что $\langle\sqrt{n}\rangle \le k$, а $n \ge k^2+k+1$ равносильно тому, что $\langle\sqrt{n}\rangle \ge k+1$. Значит, $\langle\sqrt{n+1}\rangle - \langle\sqrt{n}\rangle = 1$ равносильно тому, что n представляется в виде k^2+k.

Решение 1

Следовательно, $b_{n+1}-b_n = n+1+\langle\sqrt{n+1}\rangle - n - \langle\sqrt{n}\rangle = 2$ равносильно тому, что n представляется в виде k^2+k, в иных случаях $b_{n+1}-b_n = n+1+\langle\sqrt{n+1}\rangle - n - \langle\sqrt{n}\rangle = 1$.

Значит, верно, что если число a не встречается в последовательности, то существует такое i, что $b_i = a-1$, а $b_{i+1} = a+1$. Но мы знаем, что в этом случае $b_i = k^2+k+k = (k+1)^2-1$, а $b_{i+1} = k^2+k+1+k+1 = (k+1)^2+1$. Следовательно, каждое такое a_i представляется в виде $(k+1)^2$.

Решение 2

Докажем, что любое число вида k^2 не встречается в последовательности b_i. Для единицы это очевидно, так как $b_1 = 2$.

Теперь пусть число представляется в виде $(k+1)^2$. Тогда если $i \le k^2+k$, то $b_k \le k^2+k+k < (k+1)^2$, а если $i \ge k^2+k+1$, то $b_k \ge k^2+k+1+k+1 > (k+1)^2$.

Теперь докажем, что все остальные числа встречаются в последовательности b_i. Пусть число x лежит в интервале $(k^2,(k+1)^2)$. Тогда $b_{x-k} = x-k+\langle x-k\rangle = x-k+k = x$.

Критерии.

A0 Верный ответ без основания: —. (2 балла).

A2 Незначительные ошибки, не влияющие на ход решения: +. (14 баллов).

A3 Доказано, что квадраты получить невозможно, но не доказано, что все остальные числа получить можно: +/2 (7 баллов).

Автор: Т.Зайцев

№2 (17 баллов)

Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке $[0,2]$ (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$, пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n, такая, что

$$x_{n+1} = 3|x_n-1|-1, \quad n \geqslant 1.$$

Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0,2]$?

Решение

Ответ: $(\frac{2}{3})^{2020}$. Будем доказывать индукцией по n следующие два утверждения.

(1) Вероятность того, что $x_n \in [0,2]$, равна $(\frac{2}{3})^{n-1}$.

(2) Вероятность того, что x_n попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$, пропорциональна его длине.

База индукции следует из условия задачи. Пусть (1) и (2) выполнены для $n=k$. По условию $x_{k+1} = f(x_k)$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определяется по формуле $f(x) = 3|x-1|-1$. Заметим, что прообраз отрезка $[0,2]$ при отображении f есть объединение отрезков $[0,\frac{2}{3}]$ и $[1\frac{1}{3},2]$. Таким образом, вероятность того, что $x_{k+1}\in[0,2]$, равна вероятности того, что $x_k \in [0,\frac{2}{3}]\cup[1\frac{1}{3},2]$. Суммарная длина отрезков $[0,\frac{2}{3}]$ и $[1\frac{1}{3},2]$ составляет $\frac{2}{3}$ от длины отрезка $[0,2]$. Поэтому из утверждений (1) и (2) для $n=k$ следует, что искомая вероятность равна $\frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{k-1} = (\frac{2}{3})^k$. Утверждение (1) для $n=k+1$ доказано. Теперь заметим, что функции $f|_{[0,\frac{2}{3}]}$ и $f|_{[1\frac{1}{3},2]}$ являются линейными, и их образы совпадают с отрезком $[0,2]$. Таким образом, утверждение (2) для $n=k+1$ следует из аналогичного утверждения для $n=k$. Переход индукции доказан.

Критерии.

A0 Утверждение (2) сформулировано, но не доказано: +/— (15 баллов).

A1 Утверждение (2) используется, но явно не формулируется (и не доказывается): +/2 (11 баллов).

A2 Незначительные ошибки, не влияющие на ход решения: $+$. (17 баллов).

A3 Доказательство того, что если точка попала в промежуток $(2/3;\ 4/3)$, то дальше точки в нужный отрезок не попадают: —. (2 балла).

A4 Без основания утверждается, что x_{2021-i} должно лежать в i-ой итерации множества Кантора: —/+ (6 баллов).

Автор: В.Тиморин

№3 (8 + 20 баллов)

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) $n = 404$;
б) $n = 406$?

Решение

Пункт а). Цветов не может быть больше 202, иначе есть цвет, в который покрашен только один дом, тогда домов этого этого цвета ни в каком отрезке не может быть строго больше, чем любого другого. Покажем, как построить пример на 202 цвета, то есть чтобы для каждого цвета в него было покрашено ровно два дома, притом существовал бы отрезок, в который эта пара одноцветных попадает, а любая другая — нет.

Назовем *198-блоком* следующую конструкцию: подряд стоят 198 домов, пары домов на расстоянии 99 (т. е. такие, между которыми ровно 98 других домов) покрасим в один цвет, и больше в цвет этой пары не будем красить другие дома (не только в этом блоке, но и вообще из участвующих домов); *2-блоком* назовем стоящие подряд два дома, покрашенные в уникальный цвет. Тогда 404 дома можно раскрасить так: 2-блок, 198-блок, 2-блок, 2-блок, 198-блок, 2-блок.

Осталось показать, что этот пример верный. В самом деле, у любого 2-блока есть соседний 198-блок, а значит, можно взять 100 домов подряд, у которых 2-блок является крайним, а все остальные цвета встречаются по одному разу. Для цветов 198-блока можно взять 100 домов, содержащих оба дома цвета i. Тогда домов этого цвета будет два, а все остальные цвета будут встречаться на этом отрезке по одному разу.

Пункт б). Этот же пример позволяет реализовать 202 цвета на 406 домах: в конец добавим еще два дома, цвет которых совпадает с последним 2-блоком.

Оценка. Понятно, что в каждый цвет должно быть покрашено хотя бы два дома, значит, ответ для $n = 406$ не больше 203. Если для $n = 406$ ответ 203, то в каждый цвет покрашено ровно два дома. Занумеруем цвета в порядке их появления слева направо, и пусть дома i-го цвета имеют номера a_i и b_i, причем $a_i < b_i$. По определению $1 = a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{203}$. Докажем, что $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_{203} = 406$. Предположим противное, т.е. пусть для каких-то $i < j$ оказалось $b_j < b_i$. Вспомнив, что $a_j < b_j$ и $a_i < a_j$, получаем, что $a_i < a_j < b_j < b_i$, то есть любой отрезок, содержащий a_i, b_i, также содержит a_j, b_j, то есть нет отрезка, на котором домов i-го цвета больше всего. Противоречие.

Заметим, что должны выполняться еще два неравенства: $b_i - a_i \le 99$ (иначе нет отрезка из 100 домов, в который попали оба дома из пары a_i, b_i) и $b_{i+1} - a_{i-1} \ge 101$ (иначе каждый отрезок, содержащий a_i, b_i, также содержит a_{i-1}, b_{i-1} или a_{i+1}, b_{i+1}).

Все готово для решения. Среди первых 100 номеров домов есть ровно один номер из множества $\{b_i\}$, это b_1: иначе, если там есть и b_2, среди домов от 1 до 100 есть два дома второго цвета, тогда для первого цвета нет отрезка, в котором его больше чем любого другого (поскольку только отрезок $[1, 100]$ содержит два дома первого цвета, но он содержит и два дома второго). Значит, среди первых 100 домов ровно 99 имеют номера из множества $\{a_i\}$. Тогда среди 99 номеров от 101 до 199 должны присутствовать 98 чисел из множества $\{b_i\}$, следовательно, из множества $\{a_i\}$ там может быть максимум один номер — a_{100}. Мы доказали, что $a_{101} \ge 200$. Повторив то же самое рассуждение с другого конца, получим, что $b_{103} \le 207$. Но это противоречит неравенству $b_{103} - a_{101} \ge 101$: мы не сможем найти отрезок из 100 домов для $i = 102$.

Критерии 3а

A0 Оценка без примера: —. (1 балл).

A1 Пример с обоснованием без оценки: $+$. (7 баллов).

A2 Верное решение без обоснования примера: $+$/— (7 баллов).

A3 Придуманы 198-блоки, дальше неверно: —/+ (2 балла).

Критерии 3b

A0 Не объяснено или плохо доказано противоречие для 8 домов и 3 цветов: $+/-$ (15 баллов).

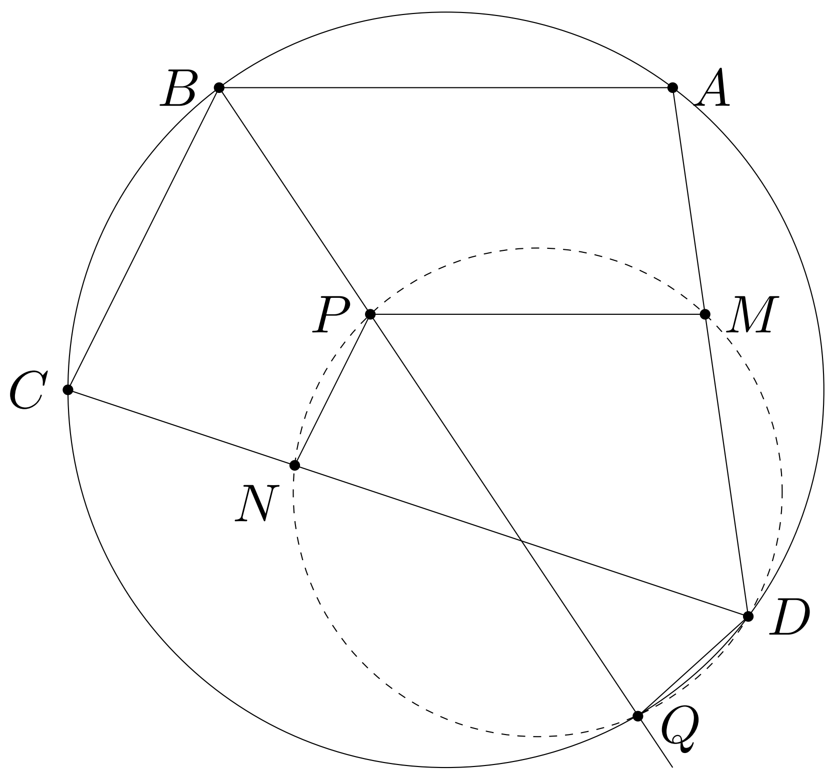
A1 Пример (даже без обоснования) без оценки: —. (0 баллов).

A2 Серьёзные ошибки или плохие доказательства в рассуждениях до центральных домов (включая центральные количества, отличные от 8), есть замечание или попытка вывести противоречие из трёх пар в центральной группе: $+/2$ (10 баллов).

Авторы: А.Акбари, Г.Челноков

№4 (23 балла)

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки M и N лежат на сторонах AD и CD соответственно. Прямые, проходящие через M и N и параллельные соответственно AB и BC, пересекаются в точке P, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q, лежащей на дуге CD. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.



Решение 1.

Четырехугольник $BADQ$ вписан, поэтому $\angle BAD + \angle PQD = 180°$. Из параллельности AB и MP следует, что $\angle BAD = \angle PMD$. Таким образом, $\angle PMD + \angle PQD = 180°$. Следовательно, четырехугольник $PMDQ$ является вписанным.

Четырехугольник $BCQD$ тоже вписан, поэтому $\angle BCD = \angle PQD$. Из параллельности BC и PN следует, что $\angle BCD = \angle PND$. Таким образом, $\angle PND = \angle PQD$. Следовательно, четырехугольник $PNQD$ тоже является вписанным.

Из вписанности четырехугольников $PMDQ$ и $PNQD$ следует, что точки P, M, N, Q, D лежат на одной окружности.

Решение 2.

Четырёхугольник $BCDQ$ вписанный, поэтому прямые QD и BC антипараллельны относительно пары прямых BQ и CD. По условию $BC||NP$, следовательно, прямая QD антипараллельна NP относительной той же пары прямых. Таким образом, четырёхугольник $PNDQ$ является вписанным.

Аналогично доказывается, что $PMDQ$ вписанный. Таким образом, точки P, M, N, Q, D лежат на одной окружности.

Критерии.

А1 Доказательство того, что $MPND$ вписанный: — (0 баллов).

Автор: А.Заславский

№5 (30 баллов)

Сережа задумал натуральное число n, не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1. Затем на i-ом шаге ($i = 2, 3, \ldots$) он делит с остатком число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i. Докажите, что $\overline{0, q_1q_2q_3\ldots} = \frac{n}{2019}$.

Решение

Сначала проверим по индукции, что $q_k \leq 9$ для всех k. Неравенство $q_1 \leq 9$ следует из того, что $n \leq 2019$. Пусть $q_i \leq 9$ для некоторого i. Так как $r_i \leq 201$, то $\overline{r_iq_i} \leq 2019$. Из этого следует, что $q_{i+1} \leq 9$. Переход индукции доказан.

Таким образом, условие можно переписать в виде

$$n = 202q_1 + r_1, \tag{1}$$

$$10r_i + q_i = 202q_{i+1} + r_{i+1} \text{ для всех } i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Искомое равенство

$$\overline{0, q_1q_2q_3\ldots} = \frac{n}{2019}$$

равносильно тому, что для любого k выполнены неравенства

$$0 \leq \frac{n}{2019} - \overline{0, q_1q_2\ldots q_k} \leq 10^{-k}. \tag{3}$$

Умножив систему неравенств (3) на $2019 \cdot 10^k$, получим

$$0 \leq 10^k n - 2019 \cdot \overline{q_1q_2\ldots q_k} \leq 2019. \tag{4}$$

Преобразуем среднюю часть системы (4) следующим образом:

$$10^k n - 2019 \cdot \overline{q_1q_2\ldots q_k} = 10^k n - 2020 \cdot \overline{q_1q_2\ldots q_k} + \overline{q_1q_2\ldots q_k} =$$

$$= 10^k n - 202 \cdot 10^k q_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\ldots q_k} + \overline{q_1q_2\ldots q_k} =$$

$$= 10^k(n - 202q_1) - 2020 \cdot \overline{q_2\ldots q_k} + \overline{q_1q_2\ldots q_k} = 10^k r_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\ldots q_k} + \overline{q_1q_2\ldots q_k}, \tag{5}$$

где последнее равенство следует из (1).

Лемма 1. *Для любого $s = 1, 2, \ldots, k-1$ выполняется равенство*

$$10^{k-s+1}r_s - 2020 \cdot \overline{q_{s+1}\ldots q_k} + \overline{q_s\ldots q_k} = 10^{k-s}r_{s+1} - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\ldots q_k} + \overline{q_{s+1}\ldots q_k}.$$

Доказательство.

$$10^{k-s+1}r_s - 2020 \cdot \overline{q_{s+1}\ldots q_k} + \overline{q_s\ldots q_k} = 10^{k-s}(\overline{r_sq_s} - 202q_{s+1}) - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\ldots q_k} + \overline{q_{s+1}\ldots q_k} =$$

$$= 10^{k-s}r_{s+1} - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\ldots q_k} + \overline{q_{s+1}\ldots q_k},$$

где последнее равенство следует из (2), если положить $i = s$. $\square$

Применим Лемму 1 последовательно $k-1$ раз (для $s = 1, 2, \ldots, k-1$) к правой части равенства (5). Получим цепочку равенств

$$10^k r_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\ldots q_k} + \overline{q_1q_2\ldots q_k} = \cdots = 100r_{k-1} - 2020 \cdot q_k + \overline{q_{k-1}q_k} = 10r_k + q_k.$$

Таким образом, (4) равносильно неравенствам

$$0 \leq 10r_k + q_k \leq 2019,$$

которые следуют из того, что $r_k \le 201$ и $q_k \le 9$.

Критерии.

A0 Не доказано, что $q_i < 10$: $+$. (28 баллов).

A1 Ошибки в строгости неравенств: $+$. (28 баллов).

A0+A1: $+$. (28 баллов).

A2 Решение через деление в столбик, и при этом ничего не написано про случай, когда в некоторый момент в частном получается 2019 (или разобран только случай, при котором $n = 2019$, и не доказано, что иначе 2019 не может появиться ни на каком шаге): $+/-$ (25 баллов).

A3 Решение через деление в столбик. Доказано, что если n не равно 2019, то остаток не может быть равен 2019 ни на каком шаге. При этом случай $n = 2019$ не разобран: $+$. (28 баллов).

A4 Разность $(n/2019 - 0, q_1q_2q_3 \dots q_k)$ выражена через q_{k+1} и r_{k+1}, далее из этого без доказательства делается вывод об искомом равенстве (оценка вышеуказанной разности отсутствует): $+/-$ (25 баллов).

A0+A2: $+/-$ (25 баллов).

A0+A3: $+$. (28 баллов).

A0+A4: $+/-$ (25 баллов).

Автор: С.Губанов

№6 (32 балла)

В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n — натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Роботу можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника, робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

Решение

Ответ: При n=1

При $n = 1$ подойдет следующая последовательность команд: сдвинуться дважды вдоль $\overline{AB}$, потом дважды вдоль $\overline{BC}$, потом дважды вдоль $\overline{AB}$.

Пусть $n > 1$. Разделим треугольник на 9 маленьких треугольников прямыми, каждая из которых параллельна одной из сторон треугольника и делит две другие в отношении $2 : 1$. Назовем точки на этих прямых *опасными*.

Разобьем все команды на серии одинаковых. Если в серии 1 команда, то робот может ее проигнорировать, так что можно считать, что таких серий не было.

Решение 1:

Утверждение: Выполняя текущую серию, робот может сделать так, чтобы не попасть на опасную прямую, сонаправленную следующей серии. Докажем это по индукции.

База индукции очевидна.

Переход: по предположению индукции робот сейчас стоит не на опасной прямой, сонаправленной текущей серии команд. Поскольку серия состоит из как минимум двух команд, некоторые из которых робот может проигнорировать, в общем случае у него есть как минимум две возможные позиции, в которые он может попасть после выполнения текущей серии. Расстояние между соседними возможными позициями робота равно одному его шагу, то есть 1 метру. Значит, хотя бы одна из этих позиций не лежит на опасной прямой, сонаправленной следующей серии, так как расстояние между ними равно n.

Возможен случай, что у робота есть только одна возможная позиция, в которую он может попасть при выполнении текущей серии команд: если после первого же шага в нужном направлении он окажется на границе треугольника. Но эта позиция, очевидно, является безопасной, так как по предположению индукции робот сейчас сдвигается не вдоль опасной прямой. Следовательно, переход доказан.

Поскольку робот может сделать так, чтобы ни в какой момент времени не сдвигаться вдоль опасной прямой, мы не сможем заставить его наехать на мину.

Решение 2:

Позволим роботу размножаться: из каждого существовавшего на каком-то ходе робота будут получаться роботы во всех позициях, в которых робот может быть сейчас. Будем рассматривать множества позиций, занятых роботами после серии команд двигаться в одном направлении, далее будем называть их просто Множествами Позиций. Назовем точку мертвой, если в ней пересекаются две проведенные прямые, полуживой, если она принадлежит ровно одной проведенной прямой, и живой в остальных случаях.

Докажем индукцией по числу серий команд, что множество позиций всегда содержит или одну живую точку, или две полуживые, принадлежащие прямым разных направлений. Это очевидно. И это означает, что робота нельзя гарантированно загнать на мину.

Критерии.

A0 Разобран случай n=1: —. (3 балла).

A1 Считается, что робот видимый: — (0 баллов).

A2 Идея избегания 6 прямых: —/+ (12 баллов).

A3 Идея раздвоения/идея избегать только прямых, сонаправленных следующему ходу: —/+ (12 баллов).

Авторы: П.Рябов, Г.Челноков

№7 (12 + 26 баллов)

Пусть ABC — равносторонний треугольник на плоскости, а S — круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус. Пусть радиус круга S равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* — значит отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.

б) Пусть d — расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в круг S после ровно 1000 операций. Найдите максимум и точную нижнюю грань возможных значений d.

Решение. Пусть O — центр круга S (и описанной окружности треугольника ABC). Прямые OA, OB, и OC разделят плоскость на 6 частей, которые назовем областями. Пусть эти прямые пересекают окружность S в точках A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2 соответственно (A_1 и A на одном луче от O, A_2 – на другом, для других точек аналогично). Тогда стороны угла B_2OC_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC и AB, а значит, для всех точек угла B_2OC_2 (равного $120°$) и только для них точка A является ближайшей из A, B, C. При этом для точек, которые лежат внутри угла C_2OA_1, но вне круга S, после операции вершина C станет ближайшей, а для точек, лежащих внутри угла A_1OB_2, но вне круга S, ближайшей станет вершина B. Для вершин B и C аналогично.

Рассмотрим, что происходит при применении нескольких операций к точке X_0. Пусть X_k — образ точки X_0 после применения к ней k операций. Сформулируем несколько утверждений.

Утверждение 0. Если X_k лежит в S, то все X_n при $n > k$ тоже.

Доказательство очевидно.

Теперь мы можем без ограничения общности считать, что X_0 лежит в угле A_1OB_2 и вне круга S.

Утверждение 1. Вектор X_0X_2 равен удвоенному вектору AB.

В самом деле, для X_0 ближайшая вершина — A, для X_1 — B, композиция симметрий относительно A потом B дает параллельный перенос на вектор $2AB$.

Соответственно, если все точки X_0, X_2, X_4, $\ldots$, X_{2k} лежат в A_1OB_2, но не в S, то все векторы X_0X_2, X_2X_4, X_4X_6, $\ldots$, $X_{2k}X_{2k+2}$ равны $2AB$.

Утверждение 2. Пусть X_{2k+2} — первая из четных точек, не лежащая одновременно в угле A_1OB_2 и вне круга S. Тогда X_{2k+2} лежит в одной из трех областей: S, A_1OC_2 (вне круга S) и B_2OC_1 (вне круга S).

Доказательство очевидно.

Итак, без ограничения общности можно считать, что X_{2k+2} попала в A_1OC_2 (вне круга S).

Утверждение 3. Если X_{2k+2} – первая из четных точек, попавшая в A_1OC_2, то X_{2k+4} попадет в S или A_1OB_2, X_{2k+6} попадет в S или A_1OC_2 и так далее (за каждые два хода точка перескакивает через границу между теми же двумя соседними углами, или запрыгивает в S).

Доказательство очевидно.

Итак, если точка на каком-то шаге за две операции перескочит из угла в соседний, то дальше за каждую пару операций точка перепрыгивает между ровно этими двумя соседними углами, пока не попадет в круг S. Докажем, что это рано или поздно произойдет. В самом деле, пусть точка за двойную операцию переходит между A_1OC_2 и A_1OB_2. Тогда она за каждую двойную операцию смещается на вектор $2AB$ или $2AC$. Оба вектора имеют проекцию $-\frac{3}{4}$ на луч OA, значит, рано или поздно проекция точки на OA будет иметь отрицательную координату, то есть точка покинет углы A_1OC_2 и A_1OB_2. По Утверждению 3 сделать это четная точка может, только попав в S, что завершает доказательство пункта A.

Критерии.

А0 Доказательство того, что расстояние до центра уменьшается с каждой операцией: —. (0 баллов).

А1 Плоскость разделена на 6 зон прямыми, проходящими через точку О. Показано, что композиция двух шагов является параллельным переносом на удвоенную сторону треугольника, причем выбор стороны зависит от зоны, где находилась точка: —/+ (5 баллов).

б)

Ответ: $\sqrt{561751} < d \leq 1 + 500\sqrt{3}$

Решение аналогично 11.6

Критерии:

А0 Найдено самое дальнее расстояние: —. (5 баллов).

Автор: В.Тиморин

Таблица перевода оценок в баллы:

Знаки -> Баллы	1	2	3а	3б	4	5	6	7а	7б
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—.	2	2	1	0	3	3	3	0	5
—/+	4	6	2	6	8	8	12	5	10
+/2	7	11	4	10	13	15	16	6	15
+/—	11	15	7	15	18	25	24	9	20
+.	14	17	7	18	23	28	30	12	26
+	14	17	8	20	23	30	32	12	26

Решения и критерии, 11 класс.

Во всех критериях пропущено в виду самоочевидности, что полное решение стоит полный балл.

№1

Для действительного числа $\alpha \in (0,1)$ рассмотрим возрастающую последовательность всех натуральных чисел m_i, для которых $\{m_i\alpha\} < \alpha$. Может ли для какого-то α соответствующая последовательность начинаться с

а) $2021, 4041, 6062$?

б) $2021, 4042, 6062, 8082$?

Автор: В.Тиморин

Решение. Немного рассуждений, избыточных для решения этой задачи Покажем индукцией по i, что m_i – это наименьшее натуральное число n_i, для которого $n_i\alpha \geq i$. База: для удобства будем считать 0 натуральным числом, и все последовательности тоже начинать с нулевого члена. Тогда, во-первых, $m_0 = 0$ поскольку $\{0\alpha\} = 0 < \alpha$, и 0 – первое натуральное число с таким свойством, поскольку оно просто первое. С другой стороны, $n_0 = 0$ поскольку $n_0\alpha \geq 0$ и опять же, 0 – первое натуральное число с этим свойством. Итак, $m_0 = n_0$.

Переход. Пусть $m_i = n_i$. Тогда для всех натуральных чисел k из отрезка $[n_i + 1, n_{i+1} - 1]$ имеем $[k\alpha] = i$ из определения n_{i+1}. Но тогда $\{k\alpha\} = \{n_i\alpha\} + (k - n_i)\alpha \geq \alpha$. С другой стороны, $n_{i+1}\alpha = (n_{i+1} - 1)\alpha + \alpha < i + 1 + \alpha$ то есть $\{n_{i+1}\alpha < \alpha\}$. Итак, $m_{i+1} = n_{i+1}$.

Пункт а). Из приведенных выше рассуждений следует система неравенств (самая левая)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2020} > \alpha \geq \dfrac{1}{2021} \\ \dfrac{2}{4040} > \alpha \geq \dfrac{2}{4041} \\ \dfrac{3}{6061} > \alpha \geq \dfrac{3}{6062} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2020 < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2021 \\ 2020 < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2020\dfrac{1}{2} \\ 2020\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2020\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2020\frac{1}{3} < \frac{1}{\alpha} \leq 2020\frac{1}{2}.$$

Преобразуем как написано выше, благо все числа положительны. Имеем, что условие выполняется для любого α, такого что $\frac{1}{\alpha}$ лежит в полуинтервале $(2020\frac{1}{3}, 2020\frac{1}{2}]$.

Отметим, что для решения задачи не обязательно описывать множество всех таких α (как сделано выше), достаточно указать одно, например, $\frac{2}{4041}$, и доказать, что оно подходит.

Пункт б) Действуя аналогично, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2020} > \alpha \geq \dfrac{1}{2021} \\ \dfrac{2}{4041} > \alpha \geq \dfrac{2}{4042} \\ \dfrac{3}{6061} > \alpha \geq \dfrac{3}{6062} \\ \dfrac{4}{8081} > \alpha \geq \dfrac{4}{8082} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2020 < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2021 \\ 2020\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2021 \\ 2020\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2020\dfrac{2}{3} \\ 2020\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\alpha} \leq 2020\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2020\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} \leq 2020\frac{1}{2}.$$

Приходим к противоречию, что $2020\frac{1}{2} < 2020\frac{1}{2}$, что доказывает что такого α не существует.

Критерии.

А0 Ответы без доказательства – 0.

А1 В а) верно указан промежуток, которому должно принадлежать α: 2 балла.

А2 Без доказательства выписаны начальные системы неравенств из вышеприведенного решения: 3 балла в а), 4 балла в б). (баллы за А2 включает А1 а не складываются с ними)

А9 Множественная путаница знаков (в другую сторону или строгие/нестрогие), не приведшие к неверному ответу: -1 балл к номиналу.

В1 Сформулировано но не доказано утверждение, что m_i – минимальное число, для которого $m_i\alpha \geq i$ – 2 и 3 балла соответственно.

В2 Сформулировано и доказано утверждение из В1, (но непостижимым образом задача после этого не решена): 4 и 6 баллов соответственно.

С Из-за путаницы со строгими знаками "доказано", что есть единственное значение α в пункте б), при верной общей логике решения: 5 баллов.

Баллы разных буквенных серий не складываются друг с другом.

№2

В последовательности чисел $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ некоторые члены умножили на -1, причем известно, что осталось бесконечно много положительных членов. Докажите что любое натуральное число представимо в виде суммы нескольких различных членов полученной последовательности.

Автор: Д.Вотякова

Решения. Будем называть последовательность, удовлетворяющую условию задачи ПУУЗ.

Первое решение. Заметим, что следующая операция из ПУУЗ делает ПУУЗ: из последовательности выкидываем первый член, а все остальные делим на 2. В самом деле, все члены остались плюс или минус степенями двойки, и положительных все еще бесконечно. Назовем эту операцию *сокращением.*

Докажем по индукции утверждение: любое натуральное n для любой ПУУЗ представляется в виде суммы некоторые ее различных членов.

База. Докажем что в таком виде представляется 1. В самом деле, у любой ПУУЗ есть положительные члены, пусть первый из них 2^k. Тогда заметим что $(-2^0)+(-2^1)+\cdots+(-2^{k-1})+2^k = 1$.

Переход. Пусть утверждение доказано для всех натуральных чисел, меньших n. Рассмотрим $n \geq 2$ и ПУУЗ A. Если n четное – представим $\frac{n}{2}$ в виде суммы нескольких различных членов сокращения A, этому представлению соответствует представление n в виде суммы различных членов A. Если n нечетное – вычтем из него первый член A, (который равен 1 или -1) и результат поделим пополам. Мы получили одно из чисел $\frac{n\pm1}{2}$, оно натуральное и строго меньше n, значит для него уже доказано, что оно представляется в виде суммы различных членов произвольной ПУУЗ, в частности – сокращения A. Снова строим соответствующее представление n в виде суммы различных членов A.

Второе решение. Зафиксируем произвольную ПУУЗ $a_0, a_1, a_2 \ldots$. Докажем более сильное утверждение:

Лемма 1. Для произвольного натурального или нулевого k множество целых чисел, представимых в виде суммы некоторых различных членов последовательности выбранных из первых k, есть отрезок длинны 2^k.

Замечание. Как всегда, когда речь идет о подмножествах множества целых чисел, длинной отрезка мы называем число целых чисел на нем, а не его геометрическую длину. Так, отрезок $\{9, 10, 11, 12\}$ имеет длину 4 а не 3. Так же как всегда будем считать, что сумма пустого множества слагаемых равна нулю.

Докажем сформулированное утверждение по индукции. База: для $k = 0$ утверждение верно, поскольку представим только 0, одно целое число это отрезок длины $1 = 2^0$. Переход. Пусть утверждение доказано для некоторого k, то есть числа, представимые в виду суммы различных членов последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ образуют отрезок $[n, n + 2^k - 1]$. Рассмотрим все числа, представимые как суммы различных членов, выбранных из $a_0, \ldots, a_k$. Заметим, что любое представление или не включает a_k, и тогда представляет какое-то число из $[n, n+2^k-1]$, или включает, и тогда представляет какое-то число из $[a_k + n, a_k + n + 2^k - 1]$. Вспомним что $a_k = \pm 2^k$ и посмотрим, чему равно объединение двух вышеозначенных отрезков в обоих случаях. Заметим, что оно – всегда отрезок (два отрезка легли в точности в стык), и его длина всегда 2^{k+1}. Переход доказан.

Выведем из доказанного утверждения задачу. По условию, положительных членов бесконечно много. Тогда мы можем выбрать k так, чтобы сумма положительных членов была больше любого наперед заданного числа N. Но для этого k в виде суммы различных членов последовательности (из первых k) представляется и 0 (как сумма пустого множества), и сумма всех положительных членов среди первых k, а по Лемме 1 – и все числа между 0 и всеми положительными, в частности - все число от 0 до N. В силу произвольности N мы доказали, что все натуральные числа представляются.

Критерии.

A0 Любой процесс, конечность которого не очевидна (например, алгоритм идет по разрядам в бесконечную сторону), при том что в работе конечность не доказывается: 0 баллов.

A1 Процесс, конечность которого очевидна (например, сразу выделяется конечное число кусков, в которых будут лежать все ненулевый знаки представления, далее куски только объединяются или сокращаются, но никогда не напарщиваются в бесконечную сторону), однако в описании процесса пропущен случай, разбирающийся аналогично разобранным: 10 баллов.

B1 Приведено верное явное описание представления, но не доказано, что таким образом представлено именнно требуемое число: 10 баллов.

Комментарий: В большинстве решений, где представление строилось в результате процесса, достаточно очевидно, что если процесс завершается то результат представляет именно требуемое число, в решениях через явный вид это как правило не очевидно, и примерно эквивалентно по сложности доказательству того, что процесс завершается за конечное число шагов.

№3

3. В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 20 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) $n = 84$?
б) $n = 86$?
Авторы: А.Акбари, Г.Челноков

Решение. Пункт а). Цветов не может быть больше 42, иначе есть цвет, в который покрашен только один дом, тогда домов этого этого цвета ни в каком отрезке не может быть строго больше, чем любого другого. Покажем пример на 42 цвета, то есть такую раскраску, что для каждого цвета в него было покрашено ровно два дома, притом существует отрезок из 20 домов, в который эта пара одноцветных попадает целиком, а любая другая – нет.

Назовем *38-блоком* следующую конструкцию: подряд стоят 38 домов, пары домов на расстоянии 19 (т.е. такие, между которыми ровно 18 других домов)покрашены в один цвет, и больше этого цвета домов нет (не только в блоке но вообще из участвующих домов); *2-блоком* назовем стоящие подряд два дома, покрашенные в уникальный цвет. 84 дома надо раскрасить так: 2-блок, 38-блок, два 2-блока, 38-блок, 2-блок. Осталось доказать, что эта раскраска подходит, мы оставляем это читателю в качестве несложного упражнения (но каждый участник, который оставил это жюри в качестве несложного упражнения, недосчитался одного балла).

Пункт б). Этот же пример позволяет реализовать 42 цвета на 86 домах – в конец добавим еще два дома, цвет которых совпадает с последним 2-блоком.

Оценка. Понятно что каждого цвета должно быть хотя бы два дома, значит ответ для $n = 86$ не больше 43. Если для $n = 86$ ответ 43, то каждого цвета ровно два дома. Занумеруем цвета в порядке их появления слева направо, и пусть дома i-го цвета имеют номера a_i и b_i, причем $a_i < b_i$. По определению $1 = a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_{43}$. Докажем что $b_1 < b_2 < b_3 \dots < b_{43} = 86$. Предположим противное, т.е. для каких-то $i < j$ оказалось $b_j < b_i$. Вспомнив что $a_j < b_j$ и $a_i < a_j$ видим, что $a_i < a_j < b_j < b_i$, то есть любой отрезок, содержащий a_i, b_i также содержит a_j, b_j, то есть нет отрезка, на котором домов i-го цвета больше всего – привели предположение к противоречию.

Докажем еще два полезных неравенства: $b_i - a_i \leq 19$ – иначе нет отрезка из 20 домов, в который попали оба из a_i, b_i; и $b_{i+1} - a_{i-1} \geq 21$ – иначе каждый отрезок, содержащий a_i, b_i, также содержит или a_{i-1}, b_{i-1} или a_{i+1}, b_{i+1}.

Все готово для решения. Среди первых 20 номеров ровно одна b-шка, это b_1: иначе, если там есть и b_2, среди домов от 1 до 20 есть два дома второго цвета, тогда для первого цвета нет отрезка, в котором его больше чем любого другого (поскольку только отрезок $[1, 20]$ содержит два дома первого цвета, но он содержит и два дома второго). Значит среди первых 20 домов ровно 19 a-шек. Значит из соответствующих им b-шек 18 лежат среди 19 номеров от 21 до 39, то есть там максимум одна a-шка, это может быть только a_{20}. Мы доказали, что $a_{21} \geq 40$. Повторив то же самое рассуждение с другого конца, получим, что $b_{23} \leq 46$. Но это противоречит неравенству $b_{23} - a_{21} \geq 21$ (частный случай доказанного выше для $i = 22$).

Критерии.

Решение пункта а состоит из:

B1 Доказательства оценки: не приносит баллов но снимает 1 балл если не написано.

B2 Указание верного примера: стоит 5 баллов (таким образом, если есть B1+B2+B3: оценка 7)

B3 Доказательство того, что пример из B2 работает. Не может встречаться без B2, приносит 1 балл.

C Если пример, работающий для пункта а), написан в пункте б) – оценивается пункт а) как будто пример написан там, (если это больше баллов, чем родной текст пункта а).

19 баллов пункта б) – только за оценку

D0 Оценка $k \leq 43$: 0 баллов.

E0 Любые попытки описания явного вида "единственно возможной" раскраски в 43 цвета, содержащие пропущенный случай: 0 баллов.

F1 Доказано, что если бы была покраска в 43 цвета, то центральный отрезок из 8 домов содержал бы для трех цветов оба дома этого цвета: 13 баллов.

№4

В угол AOC вписаны окружности Ω_1 и Ω_2 (радиус Ω_1 больше). Ω_1 касается сторон угла в точках A и B, а Ω_2 – в точках D и C соответственно. Точка M – середина отрезка BC. Прямые MA и MD вторично пересекают Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках X и Y. Прямые BX и CY пересекаются в точке Z. Докажите что прямая MZ проходит через середину отрезка AD.

Автор: А.Браженко

Первое решение. Докажем, что четырехугольник $ADXY$ вписанный. Для этого нам достаточно показать равенство $MA \cdot MX = MY \cdot MD$. Для этого заметим, что эти произведения равны MB^2 и MC^2 соответственно (степень точки M относительно окружностей Ω_1 и Ω_2).

Теперь докажем вписанность $BXYC$. Из первого утверждения получаем равенство углом DAX и XYM. Кроме того, равны углы MBX и MAB по свойству касательной и MYC и MCD из подобия соответствующих треугольников. Поскольку также равны углы BAD и DCO, то получаем, что сумма углов XBC и XYC равна 180°, что и требовалось.

Из этого получаем, что $ZX \cdot ZB = ZY \cdot ZC$, что соответствует тому, что точка Z лежит на радикальной оси окружностей Ω_1 и Ω_2. Очевидно, что на ней же лежат точки M и середина стороны AD.

Второе решение (набросок). Инверсия с центром M и радиусом MB переводит вписанную трапецию $ABCD$ во вписанный 4-угольник $XBCY$. Тогда радикальные оси BX и CY пересекаются на радикальной оси окружностей Ω_1 и Ω_2, которая проходит через середины AD и BC.

Критерии.

A1 Вписанность $ADXY$ – 6 баллов.

A2 Вписанность $BXYC$ – 15 баллов, не складываются с A1, A1+A2=A2=15.

B1 Точки O, X, Y на одной прямой, вкупе с идеей сделать инверсию – ?? баллов.

№5

Дана пара взаимно-простых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степеней 2021 и 2000 соответственно (*взаимно-простые* означает, что не существует многочлена $R(x)$, не равного константе, на который делятся $P(x)$ и $Q(x)$). Гриша выбирает конечное множество действительных чисел $c_1, \dots c_n$ (помните, в *множестве* элементы не повторяются,размер множества Гриша тоже выбирает сам), находит число различных кратных действительных корней у многочлена $P(x) + c_iQ(x)$ (при i от 1 до n) и складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму Гриша может получить в результате этого процесса?

Автор: Г.Челноков

Решение. Лемма. В гришиной сумме могут быть учтены те и только те числа α, в которых производная функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ обращается в ноль, причем каждое такое α может быть посчитано максимум для одно c_i.

Доказательство. Как известно, число α является кратным корнем многочлена $T(x)$ если и только если α является корнем многочлена $T(x)$ и его производной $T'(x)$. Пусть α – кратный корень $P(x)+cQ(x)$, имеем левую из систем:

$$\begin{cases} P(\alpha)+cQ(\alpha)=0 \ \ (*) \\ P'(\alpha)+cQ'(\alpha)=0 \ \ (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(\alpha)\neq 0 \\ P'(\alpha)-\dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}Q'(\alpha)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(\alpha)\neq 0 \\ \dfrac{P'(\alpha)Q(\alpha)-P(\alpha)Q'(\alpha)}{Q^2(\alpha)}=0 \end{cases}$$

Первая равносильность заслуживает пояснений: из уравнения (*) если $Q(\alpha)=0$ что и $P(\alpha)=0$, то невозможно поскольку многочлены взаимно-просты. Если же $Q(\alpha)\neq 0$ то деление на него является равносильным переходом, а c однозначно находится из (*). Второй переход – просто поделили на $Q(x)$.

Осталось заметить, что $\frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$ это в точности производная $\frac{P(x)}{Q(x)}$. □

Итак, мы получили что все числа, посчитанные в гришиной сумме, это корни многочлена $T(x)=P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)$, который имеет не более чем 4020 степень (при взятии производной степень многочлена уменьшается на единицу, при перемножении многочленов – складывается, при вычитании не увеличивается), покажем что $T(x)$ не может быть тождественно нулем (на самом деле покажем, что степень ровно 4020). Пусть p_{2021} и q_{2000} – старшие (а значит – ненулевые) коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Тогда коэффициент $T(x)$ при x^{4020} есть $2021p_{2021}q_{2000}-2000p_{2021}q_{2000}=21p_{2021}q_{2000}\neq 0$. Таким образом, мы доказали оценку сверху: сумма не может быть больше 4020.

Осталось построить пример, когда сумма равна 4020. Возьмем $P(x)$ и $Q(x)$ такими, что все их корни вещественны, различны и все корни $P(x)$ лежат левее всех корней $Q(x)$. Тогда есть 2020 отрезков между соседними корнями $P(x)$, на каждом из этих отрезков функция $f(x)$ непрерывна (все корни знаменателя правее), равна нулю в концах отрезка и не равна нулю в остальных точках, значит в какой-то точке производная принимает нулевое значение по теореме Ролля – нашли 2020 нулей производной. Теперь посмотрим на интервалы между соседними корнями $Q(x)$, и также на открытый луч от самого правого из них до плюс бесконечности. На каждом интервале функция непрерывна, не меняет знак (поскольку не принимает нулевого значения – все корни числителя лежат левее), в концах интервалов $f(x)$ стремиться к бесконечности (поскольку это корни числителя), при $x\to+\infty$ аналогично $f(x)$ стремится к бесконечности, поскольку степень числителя больше степени знаменателя. Значит на каждом из промежутков модуль достигает минимума во внутренней точке, там производная обращается в ноль (альтернативно можно воспользоваться теоремой Ролля для функции $\frac{1}{f(x)}$) – нашли еще 2000 нулей производной.

Критерии.

А Чистое доказательство оценки – 14 баллов.

А0 Оценка без доказательства 0 баллов.

А7 При доказательстве не упомянуто, что один и тот же корень производной P/Q не может быть посчитан при разных значениях c_i: -2 балла к итоговой сумме. Если это хотя бы упомянуто (очевидно что...) – нет претензий.

А8 Не рассматривает случай обращения в ноль знаменателя: -2 балла к итоговой сумме.

А9 Не доказано, что многочлен $P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)$ не может быть тождественно нулем: -4 балла к итоговой сумме.

Критерии А7, А8 и А9 не могут давать более чем -4 балла в сумме – то есть даже допущены все три ошибки, доказательство оценки стоит 10 баллов $(14-4)$ а не $14-2-2-4=6$.

В Чистое построение примера вместе с доказательством существования всех корней: 14 баллов.

В1 Пример верный, но доказано существование только 4019 корней: 4 балла.

№6

ABC — равносторонний треугольник на плоскости, а S — круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* — значит, отразить точку X симметрично

относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).
а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.
б) Пусть d – расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в круг S после ровно 2021 операции. Найдите промежуток возможных значений d.

Автор: В.Тиморин

Первое решение. Пусть O - центр окружности S (и описанной окружности треугольника ABC соответственно). Прямые OA, OB, и OC разделят плоскость на 6 частей, которые назовем областями. Пусть эти прямые пересекают окружность S в точках A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2 соответственно (A_1 и A на одном луче от O, A_2 – на другом, для других точек аналогично). Тогда стороны угла B_2OC_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC и AB, а значит, для всех точкек угла B_2OC_2 (равного $120°$) и только для них A является ближайшей из A, B, C. При этом для точек, которые лежат внутри угла C_2OA_1, но вне круга S, после операции вершина C становится ближайшей, а внутри угла A_1OB_2 - вершина B. Для вершин B и C аналогично.

Рассмотрим, что происходит при применении нескольких операций к точке X_0. Пусть X_k - образ точки X_0, после применения к ней k операций. Докажем следующие утверждения:

Утверждение 0. Если X_k лежит в S, то все X_n при $n > k$ – тоже.

Очевидно.

Так что теперь можем без ограничения общности считать, что X_0 лежит в угле A_1OB_2 и вне круга S.

Утверждение 1. Вектор X_0X_2 равен удвоенному вектору AB.

В самом деле, для X_0 ближайшая вершина A, для X_1 – B, композиция симметрий относительно A потом B – параллельный перенос на вектор $2AB$.

Соответственно, если все точки $X_0, X_2, X_4, \dots X_{2k}$ лежат в A_1OB_2 но не в S, то все вектора $X_0X_2, X_2X_4, X_4X_6, \dots X_{2k}X_{2k+2}$ равны $2AB$.

Утверждение 2. Пусть X_{2k+2} – первая из четных точек, не лежащая одновременно в угле A_1OB_2 и вне круга S. Тогда X_{2k+2} лежит в одной из трех областей: S, A_1OC_2 и B_2OC_1.

Очевидно.

Итак, без ограничения общности можно считать, что X_{2k+2} попала в A_1OC_2.

Утверждение 3. Если X_{2k+2} – первая из четных точек, попавшая в A_1OC_2, то X_{2k+4} попадет в S или A_1OB_2, X_{2k+6} попадет в S или A_1OC_2 и так далее (за каждые два хода точка перескакивает через границу между теми же двумя соседними углами, или запрыгивает в S).

Очевидно.

Итак, если точка когда то за две операции перескочит из угла в соседний – то дальше за каждую пару операций точка перепрыгивает между ровно этими двумя соседними углами, пока не попадет в круг S. Докажем, что это рано или поздно произойдет. В самом деле, пусть точка за двойную операцию переходит между A_1OC_2 и A_1OB_2. Тогда она за каждую двойную операцию смещается на вектор $2AB$ или $2AC$. Оба вектора имеют проекцию -3/4 на луч OA, значит рано или поздно проекция точки на OA будет иметь отрицательную координату, то есть точка покинет углы A_1OC_2 и A_1OB_2. По Утверждению 3 сделать это четная точка может только попав в S, что завершает доказательство пункта A.

Набросок решения пункта Б

Как доказано выше, каждому из шести углов, на которые разделена плоскость, сопоставлен свой вектор $e_1, \cdots e_6$, такой что квадрат операции для точки, лежащей в данном угле, есть перенос на соответствующий вектор. Тогда множество точек, попадающих в круг S не более чем за 1010 операций – это множество кругов, получаемых из круга S при параллельных переносах на всевозможные линейные комбинации векторов $e_1, \cdots e_6$ с целыми неотрицательными коэффициентами, сумма которых не больше 1010, и только два циклически соседних коэффициента отличны от нуля. Тогда самый близкий к S граничный круг (обозначим его S' а его центр O')– представляющийся в виде $505e_i + 505ei + 1$, то есть $|OO'| = 1515$. Заметим, что для S' только его дуга размером $120°$, отвернутая от S, не покрыта остальными кругами, итого самая ближняя к O граничная точка Y такова что $\angle OO'Y = 120°$, то есть $|OY| = \sqrt{1515^2 + 1515 + 1}$.

По аналогичным соображениям, точки переходящие в S за 2021 ход – образы кругов радиуса 1 с центрами в точках A_1, B_1, C_1 при переносах на ту же систему векторов. Тогда самый далекий от S круг (обозначим его S‘ а его центр O‘)получается при переносе на вектор $1010e_i$, то есть имеющий длину $1010\sqrt{3}$. Поскольку OA_1 образует угол в 150° с e_i имеем $|OO‘| = \sqrt{3 \cdot 1010^2 + 3 \cdot 1010 + 1}$. Точка на границе круга еще на 1 дальше, итого ответ $\sqrt{3 \cdot 1010^2 + 3 \cdot 1010 + 1} + 1$.

Набросок альтернативного решения. Нарисуем на плоскости треугольную решетку, так чтобы вершинами одного из треугольников были точки A_2, B_2, C_2 (в обозначениях основного решения). Присвоим этому треугольнику метку 0, далее по индукции присвоим метки всем треугольникам: каждый еще не помеченный треугольник, соседний по стороне с треугольником с меткой n, получит метку $n+1$. Тогда несложно доказать, что при применении операции точки из треугольника с меткой $n > 0$ переходят в какой-то из треугольников с меткой $n-1$ (а точки из треугольника с меткой 0 – в треугольники с меткой 1). Тогда множество точек, не более чем за n операций переходящих в круг S – объединение кругов, описанных вокруг всех треугольников с метками не больше n. Итак, мы получили альтернативное описание того же объединения кругов, что и в основном пути решения, осталось сделать тот же подсчет.

Критерии.

A0 Доказано только, что в результате применения операции точка, не лежавшая в круге, становится ближе к центру: 0 баллов. Комментарий: последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ убывает, отсюда не следует что она становится меньше 1.

A1 Плоскость поделена на 6 областей и установлено, какая вершина треугольника становится ближайшей к точке после применения операции (в зависимости от расположения исходной точки X): 1 балл.

A2 Сказано, что двойное применение операции параллельный перенос на вектор, равный удвоенной стороне треугольника, но не выяснено, какой именно: 1 балл.

Критерии A1 и A2 суммируются так: $A1 + A2 = 3$ **балла.**

B1 Утверждение без доказательства, что для достижения минимума расстояния точка должна двигаться “зигзагом” (правильно сказано, каким именно): 2 балла.

B1 Если к тому же получен верный ответ: 3 балла.

№7

Для таблички $n \times n$ рассматриваем семейство квадратов 2×2, состоящих из клеток таблицы, и обладающее свойством: для любого квадрата семейства найдется покрытая им клетка, не покрытая никаким другим квадратом из семейства. Через $f(n)$ обозначим максимальное количество квадратов в таком семействе. Для какого наименьшего C неравенство $f(n) \le Cn^2$ верно при любом n?

Автор: Г.Челноков

Докажем ответ $C = \frac{1}{2}$.

Во-первых, докажем что $f(n) \le \frac{1}{2}n^2$. Для этого полезно доказать более сильное утверждение: для произвольной фигуры из S клеток количество квадратов 2×2 в семействе, таком что все квадраты лежат в фигуре и для любого квадрата найдется клетка, покрытая только им, не превосходит $S/2$. Рассмотрим два случая: для семейства найдется клетка A, покрытая четырьмя квадратами, и случай, когда такой клетки не найдется.

Если такая клетка A нашлась, то рассмотрим четыре покрывающих ее квадрата. Они образуют квадрат 3×3 с клеткой A в центре. И поскольку в каждом из четырех квадратов 2×2 должна быть клетка, покрытая только им – это четыре угловые клетки квадрата 3×3, поскольку все остальные покрыты хотя бы дважды. Но тогда никакой другой квадрат 2×2 из семейства не покрывает клетки квадрат 3×3, иначе он покрывает и угловую клетку, а она должна быть покрыта только один раз. Итак, все остальные квадраты лежат в множестве площади $S - 9$. В этот момент доказательства еще не поздно решить, что на самом-то деле мы ведем индукцию по S :), благо база тривиальна. Итак, всего квадратов в семействе оказывается не больше $4 + \frac{S-9}{2} = \frac{S-1}{2} < S/2$.

Пусть клетки, покрытой четырьмя квадратами из семейства, не найдется. Поместим в каждую клетку множества единичный заряд. Теперь пусть каждая клетка, покрытая k квадратами из семейства, отдаст каждому из этих квадратов по $1/k$ заряда (таким образом, раздаст весь свой заряд). Тогда каждый квадрат семейства получил заряд не меньше 2, потому что минимум от одной клетки получил 1, и от остальных получал не меньше $1/3$ от каждой. Итого, всего полученного заряда не меньше чем дважды число квадратов в семействе, а отданного заряда не больше S, итого квадратов в семействе не больше $S/2$.

Теперь построим пример, доказывающий, что $f(n) \geq \frac{1}{2}n^2 - 4n$, следовательно неравенство $f(n) \leq Cn^2$ при $C < \frac{1}{2}$ неверно при всех достаточно больших n.

Возьмем бесконечную клетчатую плоскость и покрасим ее в два цвета следующим образом: выберем одно из двух направлений диагонали, покрасим все клетки каждой диагонали в один цвет: две диагонали в белый, следующие две в черный и так далее с периодом 4. Теперь выберем квадрат $n \times n$, в который черных клеток попало не меньше чем белых, то есть хотя бы $n^2/2$. Теперь на каждую черную клетку внутри квадрата $n \times n$ положим квадрат 2×2 так, чтобы кроме этой черной клетки квадрат содержал только белые (это можно сделать единственным образом). Удалим все квадраты 2×2, частично вылезшие за границы квадрата $n \times n$, их не больше $4n$. Требуемое семейство построено.

Критерии.

A Чистое доказательство оценки $C \leq 1/2$: 22 балла.

B Чистое построение примера, доказывающего что $C \geq 1/2$: 12 баллов.