Условия, решения, критерии 7 класс

№1

В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.

Ответ: 70.

Решение. Разделим мысленно все ряды на два типа: в первом лжецов и рыцарей поровну, а во втором нет. Ясно, что в рядах 1-го типа утвердительный ответ дают рыцари, а в рядах 2-го типа лжецы. Но в рядах первого типа суммарно сидит столько же лжецов, сколько и рыцарей. Поэтому число утвердительных ответов равно числу лжецов.

Критерии.

- Утверждается, что возможен только один вариант рассадки;

+/2 При переборе случаев один из случаев рассадки пропущен;

+ Полностью верное решение.

№2

Имеется пять гирь различного веса, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что две самые тяжёлые гири весят в два раза больше остальных, а три самые тяжёлые гири весят в восемь раз больше остальных. Найдите наименьшее возможное значение суммарного веса всех гирь.

Ответ: 27.

Пример. 11, 7, 6, 2, 1 или 10, 8, 6, 2, 1.

Оценка. Упорядочим веса $a>b>c>d>e$. Тогда по условию

$a+b=2(c+d+e), \quad a+b+c=8(d+e)$. Тогда $d+e\geq 3 \Rightarrow a+b+c\geq 24 \Rightarrow a+b+c+d+e\geq 27.$

Критерии.

- Алгебраические соотношения между весами наборов не выписаны верно.

-/+ Алгебраические соотношения между весами наборов выписаны верно, но дальнейших продвижений нет; либо только пример без оценки.

+/2 В условии пропущено слово «различных», и задача решается в таком понимании; либо присутствует только оценка.

+/- Арифметическая ошибка при соблюдении логики решения.

+. В примере не указаны точные значения веса двух самых больших гирь, но указано, что их сумма 18. Не указана связь между минимальностью веса двух самых лёгких гирь и минимальностью всех гирь;

+ Полное решение.

№3

Имеется дробь 1/n. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

Решение. Нет, не стоит. Через x минут дробь $1/n$ превратится в дробь $(1+x)/(n+x)$. Чтобы эта дробь оказалась сократимой, нужно, чтобы её числитель делился на какой-нибудь делитель числа n-1. По условию через 1000 минут получится сократимая дробь $1001/(n+1000)$. Значит, n-1 делится на какой-то делитель числа 1001. Тогда n-1 делится на один из простых делителей p=7, 11, 13. Тогда уже через p-1 шаг дробь окажется сократимой.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Процесс рассматривается на примерах, при этом идея разложения на простые множители отсутствует либо используется некорректно.

-/+ Перепутаны понятия сократимости и делимости нацело. Либо допущены ошибки в работе с прямым и обратным утверждением.

+/2 Условие сократимости не сформулировано.

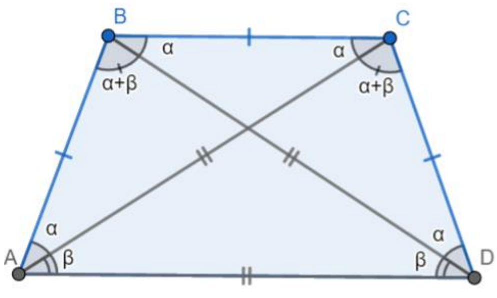
+/- Число 1001 неправильно разложено на простые множители, но логика решения соблюдена.

\+ Полное решение.

№4

В выпуклом четырёхугольнике ABCD выполнено AB=BC=CD, и каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Найдите углы четырёхугольника. (Ответ нужно выразить в градусах).

Ответ: $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{C} = \mathbf{72}°$ и $\angle B = \angle C = 108°$.



В условии сказано, что каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Тогда существует три возможности: обе диагонали равны AB; одна из диагоналей равна AB, а другая — AD; обе диагонали равны AD.

В выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей строго больше суммы противоположных сторон по неравенству треугольника. Таким образом, $AC + BD > AB + CD = 2AB$ и $AC + BD > BC + AD = AB + AD$. Следовательно, первые три случая невозможны и обе диагонали равны AD. Тогда треугольники ABC и BCD равны по трем сторонам и являются равнобедренными. Откуда $\angle CAB = \angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = \alpha$. Треугольники ABD и CDA равны по трем сторонам и являются равнобедренными. Значит, $\angle BAD = \angle ABD =$

$\angle CDA = \angle DCA = \alpha + \beta$. По сумме углов треугольников получаем, что $2\alpha + 3\beta = 180°$ и $4\alpha + \beta = 180°$. Таким образом, $\alpha = \beta = 72°$.

Критерии.

Есть три принципиально разных случая: обе диагонали равны AB (1), ровно одна диагональ равна AB (2), обе диагонали равны AD (3).

- Ни один из случаев не разобран полностью.

-. Либо только (1), либо только (2).

-/+ Либо только (3), либо только (1) и (2).

+/- Отсутствие (1) либо (2) случая.

\+ Полное решение.

№5

Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена число 2, сторона с двумя синими вершинами помечена число ½, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

Ответ. ½.
Решение. Если мы поменяем цвета двух соседних вершин разного цвета, то рассматриваемое произведение не изменится. Это показывает рассмотрение четырёх возможных случаев: ККСК, СКСК, ККСС и СКСС. Значит, можно собрать одноцветные вершины в один блок, после чего произведение станет равно ½. Значит, таким оно было изначально.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Без каких-либо объяснений утверждается, что отрезков с ½ на 1 больше, чем отрезков с 2.

-/+ Используется идея перехода от фиксированного очевидного состояния к произвольному, но при этом изменение произведения не отслеживается. Или наоборот: переход произведён корректно, но исходное состояние не исследовано.

+/2 используется идея перестановки двух элементов, но разобран только тривиальный случай.

+/- Используется идея перестановки двух элементов, но разобран только один (существенный) из четырёх случаев.

\+ Полное решение.

№6

Имеется клетчатая доска (2n+1)× (2n+1). В центральной клетке сидит таракан. Семиклассник Семён хочет убить таракана и кидает в него камешками. Пока камешек летит, таракан может перебежать в любую соседнюю по стороне клетку. Если камешек попал на пустую клетку (без таракана), то на эту клетку таракан заползать больше никогда не будет. Как только таракан попадает на край доски, Семён утрачивает к нему интерес и перестаёт кидаться камешками. Найдите наименьший размер доски, при котором Семён гарантированно добьётся своего.

Ответ. n=4.

Решение. Для начала докажем, что при n=4 (доска 9×9) Семён сможет этого добиться. Рассмотрим вертикали и горизонтали, расположенные в одной клетке от края доски (это 2-я и 8-я горизонтали и вертикали b и h). Назовём их критическими рядами, а их пересечения (клетки $b2$, $h2$, $b8$ и $h8$) – узлами.

Докажем следующие два утверждения.

1) Семён может добиться следующего: если таракан пришёл на критический ряд, то оба узла на этом ряду уже заняты камнями.
2) Если таракан пришёл на критический ряд, оба узла которого уже заняты камнями, то Семён может не дать таракану выйти с этого ряда на соседний с ним край.

Начнём с утверждения 2: пусть таракан на критическом ряду. Тогда Семён каждый раз кидает камешек на соседнюю с тараканом клетку края (если она ещё свободна – если занята, он может кидать куда хочет). Такая клетка только одна везде, кроме узлов, а узлы уже заняты. Следовательно, с этого ряда таракан на край выйти не сможет.

Теперь докажем утверждение 1.

Пусть Семён первым ходом кидает камень в клетку b2, а дальше, если таракан не на критическом ряду, занимает любой свободный узел того ряда, в сторону которого таракан последний раз полз (или любой другой свободный узел, если в этом ряду уже оба узла заняты; если заняты все четыре узла, а таракан всё ещё не на критическом ряду, Семён может кидать куда угодно на доске).

Чтобы добраться до своего первого критического ряда, таракан должен сделать хотя бы три хода в его сторону; следовательно, хотя бы уже два раза он полз в сторону этого ряда (но не достигал его), что означает, что на этом ряду заняты оба узла (либо их занимали после этих двух ходов, либо после какого-то из этих ходов их не занимали, так как они уже были заняты). Заметим, что, так как прошло не менее трёх ходов, хотя бы три узла уже заняты.

По утверждению 2, таракан не может выйти с этого ряда на край. Пусть он пытается ползти с него внутрь (от края). Тогда он больше не на критическом ряду (иначе он начинал бы с узла, а узлы этого ряда заняты), и следующим ходом закрывается четвёртый узел (если он ещё не занят), то есть на любом критическом ряду, куда ещё мог бы прийти таракан, уже будут заняты оба его узла. Утверждение 1 доказано.

Объединяя утверждения 1 и 2, получаем, что Семён может не дать таракану выйти на край ни с какого критического ряда, т.е. выигрывает.

Заметим, что при n>4 Семён может применить ту же стратегию, не давая таракану выйти из центрального квадрата 7*7, т.е. тоже выигрывает.

Докажем, что при n=3 (доска 7*7) таракан может спастись.

Лемма. Пусть таракан в одной клетке от края, и в прямоугольнике 2*k, содержащем таракана и один из углов, нет ни одного камня. Тогда таракан может выйти на край.

Доказательство. Если Семён кинет камень куда угодно, кроме соседней клетки края, таракан ползёт туда и выигрывает; иначе таракан ползёт вдоль длинной стороны прямоугольника и оказывается в той же ситуации при k на единицу меньшем. Когда k достигает 2, этот ход таракана тоже приведёт его к краю.

Действительно, предположим, что первым ходом Семён кидает камень не ниже и не левее центра (этого всегда можно добиться, повернувшись относительно доски), то есть не ниже 4-горизонтали и не левее вертикали d.

Тогда таракан ползёт вниз, на клетку d3.

Если после этого Семён кидает камень куда угодно, кроме клеток d2 и d1, то таракан ползёт на d2; иначе он ползёт на c3.

Если таракан оказался на d2, то на нижних двух горизонталях не более одного камня, причём не на d1; тогда либо снизу и справа, либо снизу и слева от таракана камней нет, и выполнено условие леммы.

Пусть таракан на c3. Тогда на трёх левых вертикалях нет ни одного камня (второй камень был на вертикали d, а первый не левее); если после этого Семён кидает камень на b3 или a3, то таракан ползёт на c2, а если куда-либо ещё, то на b3.

Наконец, если таракан оказался на c2, то слева и снизу от него камней нет, и он выигрывает по лемме; если же он оказался на b3, то на двух левых вертикалях не более одного камня, причём не на *a*3, то есть либо снизу и слева, либо сверху и слева от таракана камней нет, и он опять же выигрывает по лемме.

Критерии.

\+ Полное решение.

+/2 Оценка без примера.

-/+ Присутствует идея рассмотрения угловых клеток, но в изложении оценки есть логические ошибки.

Условия, решения, критерии 8 класс

№1

См. задачу 7 класс, №1.

Критерии.

\- Утверждается, что возможен только один вариант рассадки;

+/2 При переборе случаев один из случаев рассадки пропущен;

\+ Полностью верное решение.

№2

См. задачу 7 класс, №3.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Процесс рассматривается на примерах, при этом идея разложения на простые множители отсутствует либо используется некорректно.

-/+ Перепутаны понятия сократимости и делимости нацело. Либо допущены ошибки в работе с прямым и обратным утверждением.

+/2 Условие сократимости не сформулировано.

+/- Число 1001 неправильно разложено на простые множители, но логика решения соблюдена.

\+ Полное решение.

№3

Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см^2, а объём увеличится на 5 см^3. Может ли он оказаться прав? Замечание. Прямоугольный параллелепипед – пространственная фигура, напоминающая куб, но, рёбра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объём равен произведению дли трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

Ответ: нет, не может.

Решение. Объём параллелепипеда с рёбрами *a, b, c* равен X=*abc*, а его полная поверхность равна 2Y=2(*ab*+*ca*+*bc*). Обозначая Z=*a*+*b*+*c*, получаем:

$$5=(a+1)(b+1)(c+1)-abc=Y+Z+1\Rightarrow Y+Z=4;$$

$$9=2\left((a+1)(b+1)+(c+1)(a+1)+(b+1)(c+1)-(ab+ac+bc)\right)=4Z+6\Rightarrow$$

$$Z=\frac{3}{4}, Y=\frac{13}{4}$$

Но все рёбра меньше 1 и Y<3. Противоречие.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо содержательная мотивация.

-/+ Найдена только одна из двух рассматриваемых величин (либо только полная поверхность, либо только длина рёбер). Либо при двух найденных величинах дан неправильный ответ.

+/2 Найдены обе величины. Правильный ответ дан, но не мотивирован.

+/- Вычислительная ошибка, повлиявшая на дальнейшую логику, но не очень существенно. Либо использование метода Штурма без необходимых пояснений.

+. Вычислительная ошибка в конце решения, не повлиявшая на логику рассуждений.

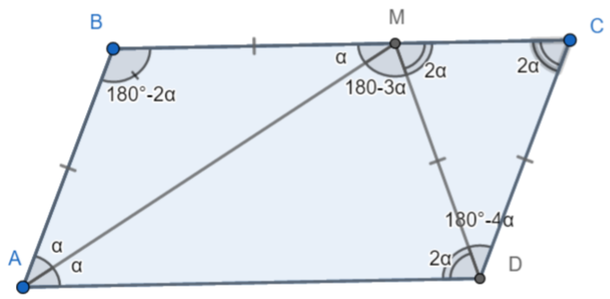
\+ Полное решение.

№4

На стороне BC параллелограмма ABCD выбрана точка M так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников ABM, AMD, CDM. Найдите углы параллелограмма. (Ответ нужно выразить в градусах).

Ответ. Значения меньших углов параллелограмма бывают: $\angle A = \frac{360°}{5}$, $\angle A = \frac{360°}{7}$ или $\angle A = 90°$ (углы параллелограмма совпадают).

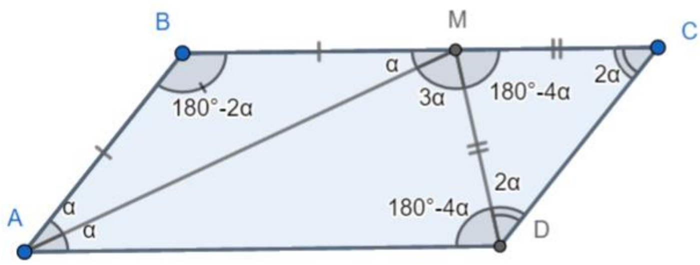
Решение. Без ограничения общности можно считать, что $\angle B \geq 90°$. Тогда, поскольку треугольник ABM — равнобедренный, $\angle BAM = \angle BMA = \alpha$. Более того, $\angle MAD = \alpha$ в силу параллельности BC и AD. Следовательно, $\angle A = \angle C = 2\alpha$. То есть для того, чтобы решить задачу, достаточно найти угол α. По условию треугольник MCD — равнобедренный. Отсюда возникают три случая: $MD = DC$, $MC = MD$ и $MC = CD$. Случаи разбираются одинаково, поэтому разберем полностью только первый из них, а в остальных просто запишем возможные значения для α.

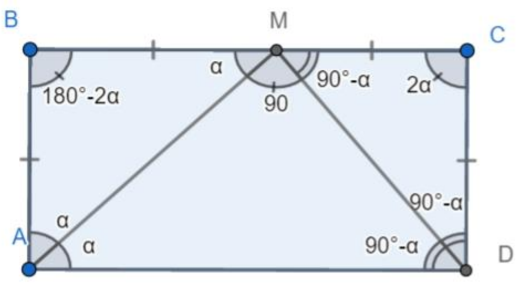


Итак, углы на рисунке расставлены в соответствии со сделанными предположениями. Теперь, треугольник AMD по условию равнобедренный. Его углы по предположению — это $\alpha, 2\alpha$ и $180° - 3\alpha$. $\alpha \neq 2\alpha$, поскольку $\alpha > 0°$

$\alpha \neq 180° - 3\alpha$, поскольку в этом случае треугольник MCD вырождается.

Таким образом, $2\alpha = 180° - 3\alpha$ и $\alpha = 36°$. Во втором случае $\alpha = \frac{180°}{7}$. В третьем случае $\alpha = 45°$.





Критерии.

- В рассуждениях отсутствует содержательная мотивация.

-. Только один ответ с примером.

-/+ Разобраны не все случаи.

+/- Несколько арифметических ошибок или не проверен на существование случай, которого на самом деле нет.

+. Одна арифметическая ошибка.

\+ Полное решение.

№5

См. задачу 7 класс, №5.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Без каких-либо объяснений утверждается, что отрезков с ½ на 1 больше, чем отрезков с 2.

-/+ Используется идея перехода от фиксированного очевидного состояния к произвольному, но при этом изменение произведения не отслеживается. Или наоборот: переход произведён корректно, но исходное состояние не исследовано. Или: используется идея перестановки двух элементов, но разобран только тривиальный случай.

+/- Используется идея перестановки двух элементов, но разобран только один (существенный) из четырёх случаев.

\+ Полное решение.

№6

См. задачу 9-6.

Критерии.

-. Частные верные утверждения, связанные с оценкой на число наборов, не приводящие к правильному ответу.

-/+ Верный пример без мотивации.

\+ Полное решение.

Условия, решения, критерии 9-10 класс

№1

В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце - снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?

Ответ: Может.

Пример

81	82	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2090
71	72	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079
61	62	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069
51	52	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059
41	42	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049
31	32	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039
21	22	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	5	6	7	8	9

$2S = 101646, S = 50823$

Сумма чисел в центральном квадрате 5×5 равна 51125.

Критерии

– Попытка доказывать неверный ответ.

± Наличие одинаковых чисел в примере.

+/2 Пример, содержащий верную идею построения таблицы (большие числа в верхнем правом квадрате 7×7), но неверный из-за вычислительной ошибки.

\+ Отсутствие вычислений, подтверждающих верный пример.

№2

Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

Ответ: 90°.

Доказательство. Докажем, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают.

Обозначим точки касания T_B и T_D соответственно. Тогда

$$|AT_B| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \qquad |AT_D| = \frac{|AD| + |AC| - |DC|}{2}.$$

Из описанности четырёхугольника $ABCD$ следует равенство $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, а это равносильно равенству $|AT_B| = |AT_D|$.

Теперь легко видеть, что картинка однозначно задается радиусом вписанных окружностей треугольников ABC и ADC и расстояниями от точки касания до точек A и C. Значит, картинка переходит в себя при симметрии относительно прямой AC, при этом точки B и D меняются местами. Но это означает, что прямая BD тоже переходит в себя, то есть она перпендикулярна оси симметрии AC.

□

Критерии

– Задача решалась исходя из неверного понимания условия (например, что четырехугольник $ABCD$ вписанный вместо описанного).

– Решен любой частный случай (например, когда диагональ BD является биссектрисой угла четырёхугольника).

– Недоведённый или неверный счёт.

∓ Задача решена при дополнительном предположении, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, этот факт никак не обоснован.

∓ Доказано, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, нет вывода утверждения задачи из этого факта.

№3

В последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ каждое следующее число, начиная с третье-го, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.

Доказательство. Для начала докажем, что на 7 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 8. Докажем это по индукции.

База: Первое число Фибоначчи, кратное 7 – это 21, которое является 8 числом Фибоначчи.
Переход: Пусть этот факт был верен для всех чисел Фибоначчи с номерами от 1 до $8k$. Докажем, что он верен для чисел от $8k+1$ до $8k+8$. Пусть число с номером $8k-1$ имело остаток a от деления на 7 ($a \neq 0$). Тогда числа с номерами $8k+1, \ldots, 8k+8$ будут иметь следующие остатки: $a, a, 2a, 3a, 5a, a, 6a, 0$.

Теперь докажем, что на 3 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 4. Доказательство аналогично.

Следовательно, если число Фибоначчи делится на 7, то его номер делится на 8. Значит его номер делится на 4, а значит, само число обязано делиться на 3. Значит оно не может быть равно натуральной степени числа 7. □

Критерии

– Перебор конечного числа чисел Фибоначчи.

∓ Доказано, что на 7 делятся те и только те числа Фибоначчи, номер которых делится на 8.

№4

Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех ребер иррациональны, а объем, полная поверхность и большая диагональ – числа целые? (*Прямоугольный параллелепипед* – это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, где $a, b, c > 0$ – фиксированные числа. *Большая диагональ* – это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)

Ответ Да, существует.

Доказательство. Нам нужно найти такие иррациональные a, b, c, что $abc \in \mathbb{Z}, 2(ab+bc+ac) \in \mathbb{Z}, a^2+b^2+c^2$ — полный квадрат. Например, нам подойдут корни многочлена $x^3 - 9x^2 + 16x - 1$. Легко видеть, что у него 3 положительных корня(достаточно посмотреть на значения в 0, 2, 4, 8), что у него нет рациональных корней (их числитель и знаменатель будут обязаны делить единицу, то есть быть равными ± 1). При этом произведение корней равно 1, сумма попарных произведений равна 16, $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 9^2 - 2 \cdot 16 = 81 - 32 = 49$, значит большая диагональ равна 7. □

– Попытка доказывать неверный ответ.

± Правильно составлен многочлен, но не доказано, что его корни вещественны и положительны.

± Правильно составлен многочлен, но не доказано, что его корни иррациональны.

∓ Идея рассмотрения многочлена.

Комментарий Обобщенная теорема Виета считается общеизвестной.

№5

Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

Доказательство. Обозначим данные числа через $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи. Также будем считать, что $S > 1$, иначе можно взять все числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k - 99S/100 = S - 99S/100 = S/100 \leqslant 1/100,$$

Для всех $i = 1, 2, \ldots, 99$ обозначим через m_i наименьший индекс, для которого выполняется неравенство $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} \geq iS/100$. Рассмотрим также разности $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} - iS/100$. Заметим что m_k и a_k определены корректно, поскольку для суммы всех чисел выполняется неравенство $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = S \geq iS/n$ для любого $i = 1, 2, \ldots, 99$. Положим $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим, что $a_i \in [0; 1)$. Действительно, по построению имеем

$$0 \leqslant a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} - iS/100 < |x_{m_i}| \leqslant 1.$$

Предположим, что все a_i лежат на отрезке $[0; 99/100]$. Тогда найдутся два различных индекса $i, j \in \{0, 1, \ldots, 99\}$, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности будем считать, что $j > i$. Заметим, что $m_j \geqslant m_i$ по определению чисел m_i. Тогда

$$|(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_j}) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i}) + jS/100 - iS/100| = |a_i - a_j| \leq 1/100. \qquad (1)$$

Если $m_j > m_i$, то из неравенства (1) следует, что

$$|x_{m_i} + x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j} - (j-i)S/100| \leq 1/100.$$

Тем самым, числа $x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_{m_j}$ — искомые.

Если $m_j = m_i$, то из неравенства (1) следует, что $|(j-i)S/100| \leq 1/100$. Следовательно, $(j-i)S \leqslant 1$, значит $S \leqslant 1$.

Осталось разобрать случай, когда для некоторого i выполнено $a_i \in (99/100, 1)$. Тогда, если $m_i > 1$, имеем

$$0 < iS/100 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i - 1}) = iS/100 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i-1} + x_{m_i}) + x_{m_i} \leqslant$$

$$\leqslant -99/100 + x_{m_i} \leqslant -99/100 + 1 = 1/100.$$

Тем самым, числа $x_1, x_2, \ldots, x_{m_i - 1}$ — искомые.

Если $m_i = 1$, то

$$x_1 \geqslant S/100 + 99/100.$$

Следовательно,

$$1 \geqslant S/100 + 99/100,$$

$$S \leqslant 1$$

. ∎

Комментарий. Запись решения существенно упрощается, если в качестве ответа разрешается предъявлять пустое множество.

Критерии

– Рассуждения, какой должна быть сумма выбранного подмножества, без указаний, как выбрать подмножество с такой суммой или почему это возможно сделать.

– Решение задачи в частном случае (например, если $|S| \leq 2$ или для конкретного набора чисел).

№6

Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $2/3$. Для каждого набора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.

Ответ: 23.

Предположим, есть набор, у которого меньше 23 больших поднаборов. Тогда все наборы из 6 гирь большие. В самом деле, путь поднабор без гири A с весом a — не большой. Тогда $a > 1/3$. У множества шести гирь (всех кроме A) есть 2^6 подмножеств. Эти подмножества разбиваются на пары с пустым пересечением, дающие в объединении все гири без A. Тогда в каждой паре хотя бы одно множество весит не менее $(1-a)/2$. То есть половина, $2^6/2 = 2^5$, из этих подмножеств весит не менее $(1-a)/2$. Тогда каждое множество из этой половины в объединении с A дает вес не менее $(1-a)/2 + a \geq 2/3$. Таким образом, мы нашли $2^5 = 32 > 23$ больших набора. Противоречие.

Итого, на данный момент мы нашли уже 8 больших поднаборов: 7-элементный и все семь 6-элементных. Посмотрим, какие 5-элементные поднмножества могут не давать большой поднабор.

Допустим, все гири без гирь A, B – не большой поднабор, и все без C, D – тоже не большой поднабор (разными буквами обозначены разные гири). Тогда, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что у дополнения к A, B есть $2^5/2 = 2^4$ подмножеств, дающих в объединении с A, B большой поднабор. То же самое с C, D: у дополнения к C, D есть $2^5/2 = 2^4$ подмножеств, дающих в объединении с C, D большой поднабор. Рассмотрим объединение этих поднаборов и оценим его мощность. Если первое множество наборов это X, второе — это Y, то $X \cap Y \leq 8$. Действительно, набор в пересечении X и Y включает в себя A, B, C, D, и число способов дополнить его несколькими из оставшихся трех – не более $2^3 = 8$. Итого, больших поднаборов $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \geq 16 + 16 - 8 = 24 > 23$. Значит, не существует таких непересекающихся пар A, B и C, D, что их пятиэлементные дополнения – не большие наборы. Или же, для любых двух 5-элементных не больших наборов их 2-элементные дополнения пересекаются. Максимальное количество попарно пересекающихся 2-элементных подмножеств множества из 7 элементов – 6. (В самом деле, пусть есть несколько попарно-пересекающихся пар элементов 7-элементного множества. Если все пары содержат некоторый один и тот же элемент, то пар не больше чем остальных элементов, то есть 6. Пусть никакой элемент не принадлежит всем парам. Рассмотрим две любые пары A, B и B, C. Должна найтись пара, не содержащая A, но чтобы она пересекалась с первыми двумя она должна быть парой B, C. Тогда больше ни одной пары добавить нельзя, итого в этом случае пар не больше чем 3.) Отсюда существует хотя бы $C_7^5 - 6 = 21 - 6 = 15$ больших пятиэлементных поднабора. Складывая это количество с 8 (число уже найденных больших поднаборов мощности > 5), получаем оценку на хотя бы 23 поднабора.

Пример. Как видно из доказательства оценки, самая тяжелая гиря должна весить строго меньше $\frac{1}{4}$ строго больше $\frac{1}{5}$. Возьмем ее вес равным $\frac{2}{9}$, или что то же самое $\frac{12}{54}$. Тогда если веса остальных гирь взять равными, они получаются по $\frac{7}{54}$. Из поднаборов без первой гири подходит только содержащий все остальные. Из поднаборов с первой гирей подходят C_6^4 гирь (первая и четыре оставшихся), C_6^5 гирь (первая и пять оставшихся) и C_6^6 гирь (первая и все шесть оставшихся). Итого, больших поднаборов $1 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 1 + 15 + 6 + 1 = 23$.

Критерии

– Попытка доказать неверный ответ.

± (1) Верная оценка, но пример отсутствует (или в нем ошибка).

∓ (2) Только пример.

∓ В предположении противного доказано, что все поднаборы из 6 гирь являются большими (или, что равносильно, что вес любой гири не больше $1/3$).

+/2 (2) и (3).

№7

Докажите, что для любых подмножеств $A_1, \ldots, A_m$ в n-элементном множестве выполнено

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

где $|A|$ обозначает число элементов в множестве A.

Доказательство. Посчитаем левую часть иным образом. Для каждого элемента множества из n элементов посчитаем, в какое количество пересечений троек $A_i \cap A_j \cap A_k$ он входит, и просуммируем эти количества по всем элементам. Легко видеть, что если элемент входит в a_i множеств, то он входит ровно в a_i^3 пересечений троек множеств (в качестве первого множества тройки годятся a_i множеств, в качестве второй и третьей — тоже a_i). Таким образом, левая часть это $n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)$. Теперь заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = |A_1| + \cdots + |A_m|$, так как обе суммы подсчитывают двумя способами одну и ту же величину: количество пар (множество; элемент множества). Итого, надо доказать:

$$n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству между средним кубическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Замечание Это одна из лемм(Lemma 6) в статье https://arxiv.org/pdf/1808.08363.pdf

□

Критерии

– Решение задачи в частном случае.

– Решение основано на неправильной формуле включения-исключения.

± Сведено к неравенству $n^2 \cdot \sum b_i^3 \geqslant (\sum b_i)^3$.

Баллы

	0	-	-.	∓	+/2	±	+.	+
1	0	0	2	4	8	10	12	12
2	0	0	2	5	8	10	15	15
3	0	0	2	5	8	10	15	15
4	0	0	2	5	10	15	20	20
5	0	0	4	8	16	25	32	32
6	0	0	4	8	16	22	28	28
7а	0	0	2	5	8	10	15	15
7б	0	0	4	8	13	20	25	25

Условия и решения, вариант для разбора.

№1

На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?

Решение. Могло. Пусть $x_1 = x_2 = 2t$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = -t$ (при произвольном действительном t). Тогда равны нулю $\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$ сумм, а именно:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$$

Комментарий: а для 13 такое уже невозможно.

Критерии.

– Попытка доказывать неверный ответ,

– Приводятся какие-то рассуждения о системах линейных уравнений, не содержащие явного указания системы требуемого вида, имеющей бесконечно число решений, или неявного доказательства ее существования,

± Приводится система требуемого вида, имеющая бесконечно много решений, но не написано доказательство того, что система имеет бесконечно много решений.

№2

Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

Решение. Докажем, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают.

В самом деле, обозначим точки касания T_B и T_D соответственно. Тогда $|AT_B| = \frac{|AB|+|AC|-|BC|}{2}$ и $|AT_D| = \frac{|AD|+|AC|-|DC|}{2}$. Критерий описанности четырехугольника $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$, это равенство равносильно $|AT_B| = |AT_D|$.

Теперь легко видеть, что картинка однозначно задается радиусом вписанных окружностей треугольников ABC и ADC и расстояниями от точки касания до точек A и C. Значит картинка переходит в себя при симметрии относительно прямой AC, при этом точки B и D меняются местами. Но это означает, что BD перпендикулярна AC, итак ответ $90°$.

Критерии.

– задача решалась исходя из неверного понимания условия (например, что четырехугольник $ABCD$ вписанный вместо описанного),

– решен любой частный случай, например когда диагональ BD является биссектрисой угла четырехугольника,

∓ задача решена при дополнительном предположении, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, этот факт никак не обоснован,

+/2 доказано, что точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ADC с диагональю AC совпадают, нет вывода утверждения задачи из этого факта.

№3

Найдите все вещественные c, при которых сумма девятых степеней корней уравнения $x^2 - x + c = 0$ равна нулю, и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексными.

Первое решение. Обозначим корни через x_1 и x_2 и воспользуемся теоремой Виетта. Задача переформулируется так: известно что $x_1^{15} + x_2^{15} = x_1^9 + x_2^9 = 0$ и $x_1 + x_2 = 1$, найти x_1x_2.

Для начала заметим, что $x_1x_2 \neq 0$, поскольку в противном случае одно из x_1, x_2 равно нулю, тогда $x_1^9 + x_2^9 = 0$ влечет что и второе равно нулю, что противоречит $x_1 + x_2 \neq 0$.

Теперь посмотрим, что получится если сумму девятых степеней домножить на суммы шестых (ноль поскольку сумма девятых ноль) и вычесть сумму пятнадцатых (тоже ноль). $0 = (x_1^9 + x_2^9)(x_1^6 + x_2^6) - x_1^{15} + x_2^{15} = x_1^6x_2^6(x_1^3 + x_2^3) = c^6(x_1^3 + x_2^3)$. Поскольку $c \neq 0$ имеем $x_1^3 + x_2^3 = 0$ **(!)**. С другой стороны $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\big((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\big) = 1 \cdot \big(1^2 - 3c\big)$ откуда $c = \frac{1}{3}$.

Второе решение. Так же как в первом решении докажем равенство (!), вместо последнего шага сделаем следующее. Заметим, что если x_1, x_2 – действительные корни, то одновременное выполнение (!) и $x_1 + x_2 \neq 0$ невозможно из-за монотонности куба.

Если x_1, x_2 не действительные то они сопряжены, тогда их кубы – тоже. Если сумма двух сопряженных чисел равна нулю, то их аргументы имеют вид $\frac{\pi}{2} + \pi k$, то есть до возведения в куб аргумент имел вид $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + \pi k)$, или эквивалентно $\frac{m\pi}{6} + n\pi$ где $m \in \{1, 3, 5\}$. Обозначив аргумент через r имеем для тех случаев соответственно $2\cos\frac{\pi}{6}r = 1$, $2\cos\frac{\pi}{2}r = 1$, $2\cos\frac{5\pi}{6}r = 1$. В первом случае $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$, два других невозможны поскольку аргумент – неотрицательное число. Получаем $c = x_1x_2 = r^2 = \frac{1}{3}$.

Критерии.

− правильный ответ без доказательства

∓ корректно выписана система полиномиальных уравнений на c, далее утверждается, что $c = \frac{1}{3}$ является ее корнем, доказательство того, что других корней нет, отсутствует или неверно,

+/2 в работе корректно доказано, что все возможные значения c принадлежат некоторому конечному множеству, элементы которого выписаны явно (не как корни системы уравнений), но множество содержит не только $\frac{1}{3}$, и все множество указано в качестве ответа,

± верное решение за исключением случая действительных корней,

+. верное решение, но отсутсвует проверка, что $\frac{1}{3}$ подходит (доказано только что числа, не равные $\frac{1}{3}$, не подходят). В случае, если в решении присутсвуют оба дефекта, упомянутые в критериях на ± и +. – ставится все равно ±.

№4

Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и QM пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.

Решение. Для этой задачи мы приведем нелюбимое геометрами счетное решение, но попробуем хотя бы счет сделать эстетичным. Начнем с обозначений. Пусть длина стороны квадрата ℓ. Продлим AH до пересечения с PQ (естественно, нам же ровно про эти два отрезка надо доказать, что они перпендикулярны), точку пересечения обозначим через R. Длины отрезков BP, PR, RQ и QD обозначим через x, y, z и t соответственно.

Мы ввели переменных слегка с запасом, задумаемся, какие соотношения на них мы знаем. Во-первых, записав теорему Пифагора для треугольника PCQ имеем: $(y+z)^2 = (\ell - x)^2 + \ell - t)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2$. Во-вторых, запишем теорему Чевы для треугольника APQ. Заметим что $AP = \sqrt{\ell^2 + x^2}$, поскольку BD – биссектриса треугольника ABP, она делит AP в отношении боковых сторон, то есть $AM = \frac{\ell}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2}$ и $MP = \frac{x}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2}$. Аналогично $AN = \frac{\ell}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}$ и $NQ = \frac{t}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}$. Таким образом, т. Чевы гласит:

$$|PR||QN||AM| = y\frac{t}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}\frac{\ell}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2} = z\frac{\ell}{\ell+t}\sqrt{\ell^2+t^2}\frac{x}{\ell+x}\sqrt{\ell^2+x^2} = |RQ||NA||MP|$$

Сокращая одинаковые множители (все они не равны нулю, ибо все не меньнше $\ell > 0$) получаем $yt = zx$, мы позволим себе вольность записывать это соотношение как $\frac{y}{z} = \frac{x}{t}$, поскольку все переменные положительны из картинки.

Теперь поймем, как записывается условие задачи в терминах введенных переменных. С описанностью $PQNM$ все просто: эти четыре точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $|AP| \cdot |AM| = |AQ| \cdot |AN|$, пользуясь ранее выписанными длинами имеем $(\ell^2 + x^2)\frac{\ell}{\ell+x} = (\ell^2+t^2)\frac{\ell}{\ell+t}$ что равносильно $(x-t)\big(\ell^2 - (x+y)\ell - xt\big) = 0$.

Чуть сложнее с условием, что $AR \perp PQ$. Из него, очевидно, следует что $y^2 - z^2 = (\ell^2 + x^2) - (\ell^2 + t^2) = x^2 - t^2$ (для прямоугольных треугольников APR и AQR с общим катетом разность квадратов других катетов равна разности квадратов гипотенуз). Обратное тоже верно: запишем теорему косинусов для треугольников APR и AQR и вычтем равенства. Имеем: $(\ell^2 + x^2) - (\ell^2+t^2) = y^2 - z^2 + |AR|^2 - |AR|^2 - 2y|AR|\cos\angle PRA + 2z|AR|\cos(180^\circ - \angle PRA)$. Значит равенство $x^2 - t^2 = y^2 - z^2$ влечет $2(y+z)|AR|\cos\angle PRA = 0$, но это и означает, что скалярное произведение отрезков AR и PQ равно нулю, то есть для алгебраиста они перпендикулярны. Для геометра – что отрезки перпендикулярны или один из них равен нулю, что невозможно в условиях задачи: $|PQ| = 0$ означает, что обе точки P и Q совпали с C, но они на сторонах квадрата а не в вершине. $|AR| = 0$ означает, что A лежит на PQ, что тоже противоречит тому, что точки взяты на сторонах а не на их продолжениях.

Итак, в задаче требуется доказать равносильность двух систем

$$\boxed{\begin{cases} (y+z)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2 \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{t} \\ (x-t)\big(\ell^2 - (x+y)\ell - xt\big) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+z)^2 = 2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2 \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{t} \\ y^2 - z^2 = x^2 - t^2 \end{cases}}$$

Этим и займемся, благо из трех уравнений два совпадают, надо что-то сделать с третьим. Левое оставим как есть, преобразуем правое.

Представим себе, что про переменные y и z нам сообщена их сумма и отношение: $y + z = a$ и $\frac{y}{z} = b$, как выразить $y^2 - z^2$ через a, b? Очевидно $z = a\frac{1}{b+1}$, $y = a\frac{b}{b+1}$, $y - z = a\frac{b-1}{b+1}$, $y^2 - z^2 = (y+z)(y-z) = a^2\frac{b-1}{b+1}$. Подставив a^2 и b из первого и второго уравнения системы соответственно, видим что третье уравнение переписалось в виде $\big(2\ell^2 - 2\ell(x+t) + x^2 + t^2\big)\frac{x-t}{x+t} = x^2 - t^2$, после преобразований получаем $(x-t)\big(2\ell^2 - 2(x+y)\ell - 2xt\big) = 0$ – то есть то же, что и в левой системе, с точностью до домножения на константу. Итак, системы действительно равносильны – задача решена.

Комментарий. То что третье уравнение оказывается приводимым означает, что есть два разных случая, когда точки P, Q, M, N лежат на одной окружности. Один (очевидный) – когда $x = t$, и картинка симметрична. Другой – когда $\ell^2 - (x+y)\ell - xt$, в более геометрических терминах: когда PQ виден из точки A под углом 45°.

Критерии.

$\mp$ Доказано что если $\angle PAQ = 45^\circ$, то точки P, Q, M, N лежат на одной окружности.

$\pm$ Доказано в одну сторону, при том что обращение рассуждений не тривиально.

№5

Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.

Для начала мы приведем ложное решение пятой задачи, с нетривиальной дырой. Желающим развить свою математическую культуру читателям предлагается в качестве полезного и непростого упражнения самостоятельно найти дыру в решении. Те кого интересует просто как решается задача №5 могут сразу читать настоящее решение ниже.

Ложное решение. Обозначим данные n чисел за $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи.

Докажем, что среди данных чисел существует набор из подряд идущих, удовлетворяющих неравенству из условия. То есть найдутся такие натуральные s и t $(1 \leq s \leq t \leq n)$ что подмножество $x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t$ – искомое.

Обозначим через m_1 первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_1} \geq S/100$, через m_2 – первый индекс, для которого $x_1+x_2+\cdots+x_{m_2} \geq 2S/100$, и так далее: $x_1+x_2+\cdots+x_{m_i} \geq iS/100$ по всем i до 100. Рассмотрим также разности $a_i = x_1+x_2+\cdots+x_{m_i}-iS/100$. Заметим что m_{100} и a_{100} определены, поскольку по крайней мере для n выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_n = S \geq iS/100$ для любого i. Формально доопределим: $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим теперь, что так как выбранные нами индексы были первыми для своего условия и так как все числа x_i по модулю не превосходят 1, то все a_i лежат на отрезке $[0;1]$. Чисел a_i всего 101 (для i от 0 до 100). Значит найдутся два индекса i и j, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности $j > i$. Тогда $|(x_1+x_2+\cdots+x_{m_i})-(x_1+x_2+\cdots+x_{m_j})-iS/100+jS/100| \leq 1/100$ или $|x_{m_i}+x_{m_i+1}+\cdots+x_{m_j}-(j-i)S/100| \leq 1/100$. Тем самым, числа $x_{m_i+1}+\cdots+x_{m_j}$ — искомые.

Настоящее решение. Обозначим данные n чисел через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Без ограничения общности будем считать, что $S \geq 0$. Если это не так, то будем доказывать утверждение задачи для чисел $y_i = -x_i$ с положительной суммой. Из него будет следовать утверждение исходной задачи.

Докажем, что среди данных чисел существует набор из подряд идущих, удовлетворяющих неравенству из условия. То есть найдутся такие натуральные s и t $(1 \leq s \leq t \leq n)$ что подмножество $x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t$ – искомое.

Обозначим через m_1 первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_1} \geq S/100$, через m_2 – первый индекс, для которого $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_2} \geq 2S/100$, и так далее: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} \geq iS/100$ по всем i от 1 до 99. Рассмотрим также разности $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} - iS/100$. Заметим что m_i и a_i определены, поскольку по крайней мере для n выполняется неравенство $x_1+x_2+\cdots+x_n = S \geq iS/100$ для любого i. Формально доопределим: $m_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Заметим теперь, что так как выбранные нами индексы были первыми для своего условия и так как все числа x_i по модулю не превосходят 1, то все a_i лежат на отрезке $[0;1]$.

Предположим, все a_i лежат на отрезке $[0; 1-1/100]$. Тогда, так как чисел a_i всего 100 (для i от 0 до 99), найдутся два индекса i и j, для которых $|a_i - a_j| \leq 1/100$. Без ограничения общности $j > i$. Тогда $m_j \geq m_i$ по определению чисел m_i. Получаем: $|(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_j}) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i}) + jS/k - iS/k| \leq 1/k$ или $|x_{m_i} + x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j} - (j-i)S/k| \leq 1/k$. Заметим, что можно взять $n = j - i$, поскольку $j - i > 0$ и $j - i \leq j < 100$. Тем самым, числа $x_{m_i}, x_{m_i+1} + \cdots + x_{m_j}$ — искомые.

Пусть теперь для некоторого i разность a_i попала на полуинтервал $(1-1/100, 1]$. Докажем, что в этом случае подмножество $x_1, \ldots, x_{m_i-1}$ — искомое. Для этого достаточно показать, что

$$iS/k - 1/k < x_1 + \cdots + x_{m_i-1} \leq iS/100.$$

Второе неравенство следует из определения m_i, ведь m_i – это первый индекс для которого сумма стала не меньше $iS/100$. Первое неравенство равносильно следующему: $x_1+\cdots+x_{m_i-1}-iS/k > -1/100$. Но $x_1 + \cdots + x_{m_i-1} - iS/k = a_i - x_{m_i}$, и это больше $-1/100$, так как $a_m > 1 - 1/100$ и $x_m \leq 1$.

Критерии.

– Рассуждения, какой должна быть сумма выбранного подмножества, без указаний, как выбрать подмножество с такой суммой или почему это возможно сделать.

– Решение задачи в частном случае (например, если $|S| \leq 2$ или для конкретного набора чисел).

– Доказательство более слабого утверждения, например построение требуемого подмножества для $1 \leq n \leq 100$ (либо $0 \leq n < 100$) вместо требующегося в задаче $1 \leq n < 100$; за исключением более слабого утверждения, оприсанного в критерии на $\mp$.

$\mp$ Доказано более слабое утверждение: что в условиях задачи можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{99}$. Это гипотетический критерий, ни одной работы, удовлетворяющей ему, не обнаружено.

№6

В правильном тетраэдре с ребром, равным 8, отмечены 25 различных точек: 4 вершины и 21 произвольная точка внутри тетраэдра. Никакие 4 отмеченные точки не лежат в одной плоскости. Докажите, что найдется тетраэдр с вершинами в отмеченных точках, объем которого меньше единицы.

Решение. Объем тетраэдра с ребром 8 есть $128\sqrt{2}/3$, поскольку этот тетраэдр получается если взять не соединенные ребром вершины куба с ребром $4\sqrt{2}$. Заметим, что $128\sqrt{2}/3 < 64$, значит если удастся тетраэдр разрезать на 64 тетраэдра с вершинами в отмеченных точках, то один из тетраэдров разбиения будет иметь объем меньше 1.

Докажем, что если внутри тетраэдра выбраны k точек, так что если добавить к ним 4 вершины тетраэдра, то среди полученных $k+4$ точек никакие 4 не лежат в одной плоскости, тогда тетраэдр можно разрезать на $3k+1$ тетраэдр с вершинами в выбранных точках.

Индукция по k. При $k = 0$ считаем что тетраэдр разбит на один тетраэдр – самого себя. Пусть для k доказано, докажем для $k+1$. Возьмем любые k из внутренних точек, по предположению индукции разобьем тетраэдр. Теперь добавим последнюю точку, и посмотрим, внутрь какого тетраэдра разбиения она попала. Этот тетраэдр разобьем на четыре, каждый из которых образован новой точкой и гранью разбиваемого тетраэдра. Разбитый тетраэдр заменим в разбиении четырьмя новыми, число тетраэдров в разбиении выросло на 3 (4 добавили 1 убрали).

Итак, при $k = 21$ имеем разбиение на 64 тетраэдра, что и требовалось.

Критерии.

$\mp$ идея разбивать на непересекающиеся тетраэдры и пользоваться принципом Дирихле, но отсутствует реализация (например, в корне неправильное число тетраэдров в разбиении, не 64 или 63, либо не доказано, почему можно разбить на столько тетраэдров, либо объем тетраэдра не посчитан или посчитан неверно, что не позволяет довести решение),

+. вычислительная ошибка не влияющая на общий план решения при безупречной канве решения.

№7

Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \cdots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

Решение. Посчитаем левую часть иным образом. Для каждого элемента множества из n элементов посчитаем, в какое количество пересечений троек $A_i \cap A_j \cap A_k$ он входит, и просуммируем эти количества по всем элементам. Легко видеть, что если элемент входит в a_i множеств, то он входит ровно в a_i^3 пересечений троек множеств (в качестве первого множества тройки годятся a_i множеств, в качестве второй и третьей — тоже a_i). Таким образом, левая часть это $n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)$. Теперь заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = |A_1| + \cdots + |A_m|$, так как обе суммы подсчитывают двумя способами одну и ту же величину: количество пар (множество; элемент множества). Итого, надо доказать:

$$n^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству между средним кубическим и средним арифметическим:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Замечание. Это одна из лемм (Lemma 6) в статье: https://arxiv.org/pdf/1808.08363.pdf.

Критерии.

Обратите внимание! Любой положительный знак по задаче 7б автоматически дублируется в задачу 7а, кроме случая, когда по 7а написан отдельный текст, получающий более высокую оценку, чем текст за 7б. Если в вашей работе дублирование не произошло – это техническая ошибка, на которую следует подать апелляцию.

$-$ решение основано на неправильной формуле включения-исключения,

$-.$

$\mp$ в пункте а) вводятся переменные и явным образом выписываются полиномиальные неравенства, для которых предъявляется работоспособный план доказательства, который не реализован (возможно из-за арифметической ошибки),

$+/2$

$\pm$ сведено к неравенству между средним кубическим и средним арифметическим,

$+.$ арифметическая ошибка при идеальной канве решения, если оно не является чисто вычислительным.