Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 7 класс. Решения задач

весна 2023 г.

7 класс

Задача 7.1. *(15 баллов)* Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

Ответ: 9024675318.

Решение. Обозначим $A = 9024675318$. Рассмотрим произвольное число $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$, удовлетворяющее условиям задачи. Ясно, что $a_1 = 9$, поскольку $a_1 \neq 0$. Пусть $7 = a_k$ для некоторого k. Разберём несколько случаев.

- Если $k > 6$, то $N = 9024687531 > A$.
- Если $k < 6$, то $N = \overline{9\ldots 7\ldots a_6 \ldots a_{10}} > A$.
- Если $k = 6$, то $N = \overline{902467 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$. Если $a_{10} \neq 8$, то $N = \overline{902467\ldots 8\ldots a_{10}} > A$. Если же $a_{10} = 8$, то $N = 9024675318 = A$.

Итак, мы разобрали все возможные случаи и убедились, что A — наименьшее число. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный ответ с обоснованием минимальности.

8 б. Приведён верный ответ без обоснования минимальности.

Задача 7.2. *(15 баллов)* Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На сторонах AB, BC, AC отметили точки K, L, M соответственно так, что $\angle AKM = 90°$, $\angle BLK = 90°$ и $KM = KL$. Чему равен угол CML?

Ответ: $90°$.

Решение. Из условия следует, что $\angle MKL + \angle LKB = 90° = \angle LKB + \angle LBK$, откуда $\angle MKL = \angle LBK$ (рис. 1). Треугольники ABC и MKL — равнобедренные с равными углами при вершине, поэтому и углы при основании у них тоже равны: $\angle KLM = \angle MCL$. Осталось заметить, что $90° = \angle KLM + \angle CLM = \angle MCL + \angle CLM$, поэтому $\angle CML = 180° - \angle MCL - \angle CLM = 90°$. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Доказано подобие (т. е. равенство соответствующих углов) треугольников ABC и MKL.

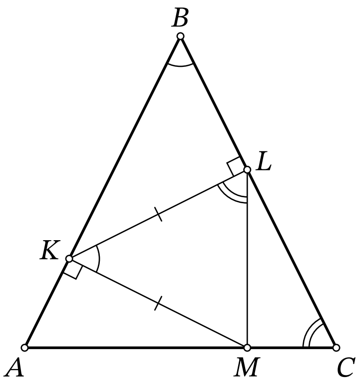


Рис. 1: к решению задачи 7.2.

8 б. Задача решена с использованием подобия треугольников ABC и MKL, но само их подобие не доказано.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.3. *(15 баллов)* На складе стоят несколько ящиков. Известно, что ящиков не более 60, и в каждом из них находятся либо 59 яблок, либо 60 апельсинов. После того, как на склад принесли коробку с некоторым количеством апельсинов, фруктов на складе стало поровну. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть в принесённой коробке?

Ответ: 30.

Решение. Обозначим количество ящиков с апельсинами через n, количество ящиков с яблоками — через m, а количество апельсинов в принесённом ящике — через x. По условию $59m = 60n + x$. Перенеся $59n$ влево, получим $59(m - n) = n + x$. Отсюда следует, что $n + x$ — натуральное число, кратное 59, поэтому оно не меньше 59. Также, поскольку обе части равенства положительны, получаем $m > n$.

Если $x \leqslant 29$, то $n \geqslant 30$ и $m \geqslant 31$, что противоречит условию $n + m \leqslant 60$. Значит, $x \geqslant 30$.

Осталось заметить, что при $m = 30$, $n = 29$ и $x = 30$ условие задачи выполняется, то есть в принесённой коробке могло быть ровно 30 апельсинов. □

Другое решение. Рассмотрим ситуацию с наименьшим возможным количеством апельсинов в коробке. Заметим, что ящиков с яблоками должно быть больше, чем ящиков с апельсинами (иначе в ящиках яблок уже меньше, чем апельсинов, и принесенная коробка с апельсинами не сможет уравнять количество фруктов). Обозначим количество ящиков с апельсинами через n; тогда $n \leqslant 29$, иначе общее количество ящиков превысит 60.

Докажем, что ящиков с яблоками ровно на 1 больше, чем ящиков с апельсинами. Действительно, в ином случае ящиков с яблоками не менее $n+2$. Получается, яблок в ящиках больше, чем апельсинов, хотя бы на

$$59(n+2) - 60n = 118 - n.$$

Так как $n \leqslant 29$, то эта разность не меньше 89. Но тогда один ящик с яблоками можно убрать, а количество апельсинов в принесенной коробке уменьшить на 59. Значит, рассматриваемый случай не дает минимального количества апельсинов в коробке, противоречие.

Тогда разность между количествами яблок и апельсинов в ящиках равна

$$59(n+1) - 60n = 59 - n.$$

Она уменьшается с увеличением n, то есть наименьшее значение разности достигается при наибольшем значении n. Отсюда ясно, что эта разность (равная количеству апельсинов в коробке) достигает наименьшего значения, равного 30, при наибольшем значении $n = 29$ (всего ящиков тогда ровно 59). □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

12 б. *Оценка* — доказано, что в коробке не менее 30 апельсинов.

Альтернативно (если указанные выше критерии не применимы, либо дают меньше баллов), суммируются следующие продвижения:

+8 б. Доказывается, что для достижения минимальной разности между количеством яблок и количеством апельсинов необходимо, чтобы коробок с яблоками было ровно на одну больше.

В отсутствие доказательства этого факта используется следующий критерий:

+6 б. Этот факт утверждается без доказательства.

+7 б. Разобраны при всех $n < 30$ случаи, когда ящиков с яблоками $n+1$, а с апельсинами — n. (Например, может быть просто отмечено, что при увеличении n на 1 разность $59(n+1) - 60n = 59 - n$ уменьшается на 1.)

В отсутствие полного разбора этих случаев используется следующий критерий:

+3 б. *Пример* — указана ситуация, в которой апельсинов в коробке ровно 30 (либо иным способом доказано, что такая ситуация возможна).

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён верный ответ.

Задача 7.4. *(15 баллов)* На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 100 жителей этого острова выстроились в ряд, и каждый из них сказал одну из следующих фраз:

- «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 2 больше, чем рыцарей.»

  …

- «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей.»

Известно, что каждую фразу сказал ровно один человек. Какое наименьшее количество лжецов может быть среди этих 100 жителей?

Ответ: 50.

Решение. Предположим, что рыцарей в ряду не менее 51. Рассмотрим самого правого из них. Слева от него хотя бы 50 рыцарей и не более 49 лжецов, поэтому он не мог сказать ни одну из перечисленных фраз, противоречие. Значит, всего рыцарей не больше 50.

Теперь приведём пример, когда рыцарей ровно 50. Пусть левые 50 человек — лжецы, которые соответственно говорят фразы «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей», «Слева от меня лжецов на 98 больше, чем рыцарей», …, «Слева от меня лжецов на 51 больше, чем рыцарей» и «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей». А следующие 50 человек — рыцари, которые говорят соответственно «Слева от меня лжецов на 50 больше, чем рыцарей», «Слева от меня лжецов на 49 больше, чем рыцарей», …, «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей». Понятно, что фразы лжецов ложны, так как слева от каждого из них не более 49 лжецов. Фраза самого левого рыцаря верна, так как слева от него стоит 50 лжецов и 0 рыцарей. Фразы следующих рыцарей верны, так как для каждого следующего количество лжецов не изменяется, а количество рыцарей увеличивается на 1, т. е. разница между лжецами и рыцарями уменьшается на 1. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+8 б. *Оценка* — доказано, что лжецов не менее 50.

В отсутствие верной оценки оценивается следующее продвижение:

+6 б. Доказано, что если лжецов k, то фразы, начиная с «Слева от меня лжецов на $k+1$ больше, чем рыцарей» и до «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей» ложны.

+7 б. *Пример* — приведена верная расстановка рыцарей и лжецов с указанием сказанных ими фраз (либо иным способом доказано, что такая расстановка существует).

В случае, если не указаны некоторые фразы, но из самой конструкции они очевидны (например, фразы рыцарей), баллы не снижаются.

В отсутствие верного примера используется наибольший подходящий критерий:

+3 б. Приведена подходящая расстановка рыцарей и лжецов без указания сказанных ими фраз.

+5 б. Приведена расстановка ЛЛ…ЛРР…Р, и ошибочно указано, что первый лжец говорит фразу «Слева от меня лжецов столько же, сколько рыцарей».

+6 б. Приведена расстановка ЛЛ…ЛРР…Р, и не указано, какую фразу говорит первый лжец.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.5. *(20 баллов)* Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

Ответ: всегда.

Решение. Обозначим наименьшее из изначально выписанных Андреем чисел через x. Тогда следующие числа равны $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$ соответственно. Пусть их выписанные простые делители равны p_0, p_1, …, p_5 соответственно.

Предположим, что Борис не может однозначно восстановить числа Андрея. Это значит, что у него есть как минимум 2 кандидата на роль x. Обозначим другого кандидата через y. Тогда x и y делятся на p_0, откуда $x-y$ делится на p_0. Аналогично $x+1$ и $y+1$ делятся на p_1, откуда $x-y$ делится ещё и на p_1. Продолжая таким образом рассуждения, получим, что $x-y$ делится также и на p_2, p_3, p_4, p_5.

Следовательно, число $x-y$ делится на 6 различных простых чисел, а значит, и на их произведение. Произведение 6 различных простых чисел не меньше, чем $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 = 30030$. Но разность двух различных четырёхзначных чисел не может делиться на 30030, противоречие. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Любое полное решение задачи.

12 б. Утверждается, но не доказывается, что минимальное расстояние между двумя шестёрками чисел, удовлетворяющих условию, составляет хотя бы НОК$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 7.6. *(20 баллов)* На столе по кругу лежат n монет, пронумерованных числами от 0 до $n-1$ в некотором порядке. За одну операцию разрешается взять какую-то монету с номером k и переместить её на k позиций в произвольном направлении, сместив при этом промежуточные монеты (например, операция над монетой с номером 2 может быть выполнена одним из двух способов, показанных на рис. 2). Докажите, что из любого начального положения можно получить такое, в котором, начиная с некоторого места, монеты $0, 1, 2, \ldots, n-1$ лежат по часовой стрелке.

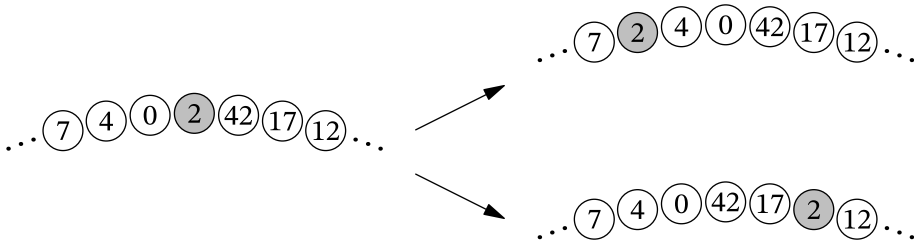


Рис. 2: к условию задачи 7.6

Решение. Покажем, что любую монету, кроме 0 и $n-1$, некоторой последовательностью операций можно поменять местами с соседней монетой, сохранив при этом порядок остальных монет. Рассмотрим монету k, где $1 < k < n-2$. Убедимся, что среди следующих k подряд идущих монет по часовой стрелке нет монеты 1. Если это не так, просто выведем 1 за пределы этой области, обменивая её последовательно с какими-то монетами. Теперь совершим нашей монетой k операцию по часовой стрелке. Далее поставим монету 1 перед монетой k и совершим монетой k операцию против часовой стрелки. В итоге монета k поменяется местами со следующей за ней по часовой стрелке (рис. 3). Положение остальных монет, кроме монеты 1, друг относительно друга не поменяется, поэтому монету 1 можно вернуть на место, на котором она была до этих операций.

Заметим, что теперь мы умеем менять местами любые две соседние монеты, кроме пары $0, n-1$, так как в любой другой паре есть хотя бы одна монета, отличная от 0 и $n-1$. Тогда легко поставить монеты в нужном порядке: поставим после монеты 0 по часовой стрелке монету 1, затем за ней монету 2 и т. д. Когда мы поставим на место монету $n-2$, монета $n-1$ автоматически окажется между монетами $n-2$ и 0, то есть получится требуемая расстановка. □

Другое решение. Рассмотрим некоторый отрезок из k монет (т. е. k последовательно лежащих монет), среди которых нет монеты 0. Определим процедуру «вылупления», в ходе которой будем двигать монеты внутри этого отрезка, и докажем, что по окончании процедуры крайняя правая монета отрезка (первая, если идти против часовой стрелки) будет иметь номер не меньше k.

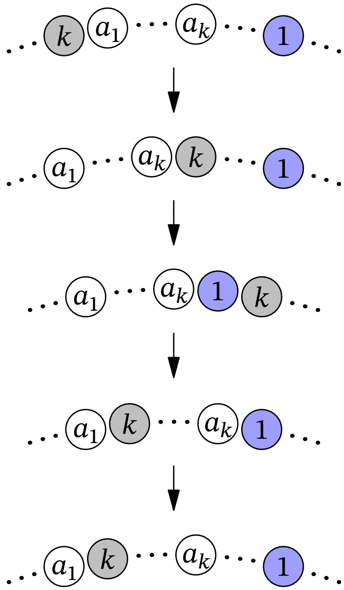


Рис. 3: к решению задачи 7.6.

Процедура «вылупления» состоит в том, чтобы последовательно брать крайнюю правую монету отрезка, и если её номер меньше k, то перемещать её влево с помощью нашей операции. Так как сам отрезок имеет длину k, то перемещаемая монета за его пределы не выйдет. Если номер крайней правой монеты оказывается не меньше k, то процедура заканчивается.

Докажем, что процедура закончится за конечное число шагов. Действительно, предположим, что в ходе процедуры мы сделаем бесконечное число операций. Тогда к некоторым монетам операция должна быть применена бесконечное число раз. Из таких монет выберем монету с наибольшим номером, пусть это m. Каждый раз, когда мы перемещаем монету m влево, справа от неё (в пределах отрезка) оказываются m других монет; ясно, что прежде чем мы опять дойдём до монеты m, мы к ним ко всем применим операцию хотя бы по одному разу. Но хотя бы одна из них имеет номер, больший m. Значит, между каждыми двумя применениями операции к m должно произойти применение операции к монете с номером, большим m. Следовательно, таких операций тоже бесконечное количество; тогда существует монета с номером, большим m, к которой операция применялась бесконечное число раз. Противоречие с выбором номера m.

Теперь, когда процедура «вылупления» определена корректно, с её помощью легко получить требуемое. Рассмотрим монету 0. Все остальные монеты образуют отрезок из $n-1$ монеты. Процедурой «вылупления» добьёмся, чтобы правая из них имела номер $n-1$ (других монет с номером, не меньшим $n-1$, там нет). Теперь все монеты, кроме 0 и $n-1$, образуют отрезок из $n-2$ монет; «вылуплением» добьёмся, чтобы с правого конца стояла монета $n - 2$. Аналогично продолжая процесс, будем последовательно получать монеты $n - 3$, $n - 4$, ... в порядке против часовой стрелки, пока не дойдём до 2 и 1. Это и есть требуемая в условии расстановка. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Любой верный алгоритм с обоснованием.

6 б. Задача сведена к доказательству следующего утверждения: в ряд стоят монеты от 0 до $k + 1$, причём монеты от 0 до k расположены в порядке возрастания (а монета $k + 1$ в произвольном месте этого ряда). Тогда, применяя к этим монетам операции из условия задачи и не выходя за пределы ряда, их можно расположить в порядке возрастания от 0 до $k + 1$.

3 б. Утверждается, но не доказывается или доказывается неверно, что если для некоторого $k < n - 1$ удалось расположить подряд монеты от 0 до k, то монеты из промежутка между монетами k и $k+1$ можно удалить так, чтобы ни одна из них не оказалась между какими-то двумя из монет $0, 1, 2, \dots, k$.

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 8 класс. Решения задач

весна 2023 г.

8 класс

Задача 8.1. *(15 баллов)* В клетчатом квадрате 5×5 каждую клетку покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Справа от каждой строки записали суммарное количество синих и красных клеток в этой строчке, а под каждым столбцом записали суммарное количество синих и зелёных клеток в этом столбце.

Справа от таблицы оказались числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке. Могли ли и под таблицей оказаться числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке?

Ответ: да.

Решение. Подойдёт, например, следующая раскраска:

с	к	к	к	к	5
з	с	к	к	к	4
з	з	с	к	к	3
з	з	з	с	к	2
з	з	з	з	с	1
5	4	3	2	1	

□

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный пример.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.2. *(15 баллов)* Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12, \\ x_1 + x_3 \geqslant 13, \\ x_1 + x_4 \geqslant 14, \\ x_3 + x_4 \geqslant 22, \\ x_2 + x_3 \geqslant 23, \\ x_2 + x_4 \geqslant 24. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

Ответ: 37.

Решение. Сложив второе равенство с последним, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 37$.

Также отметим, что значение выражения $x_1+x_2+x_3+x_4$ может быть равно 37, например, при $x_1 = 1, x_2 = 11, x_3 = 12, x_4 = 13$. Легко проверить, что такие числа удовлетворяют всем условиям задачи. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+7 б. *Оценка* — доказано, что рассматриваемая сумма не меньше 37.

+8 б. *Пример* — приведены числа, при которых сумма равна 37 (либо иным способом доказано, что такие числа существуют).

Задача 8.3. *(15 баллов)* За один ход можно выбрать натуральное число x и вычеркнуть все натуральные числа y такие, что $|x-y|$ — натуральное составное число. При этом в качестве x можно выбирать уже вычеркнутые числа.

Какое наименьшее количество ходов понадобится, чтобы вычеркнуть из натурального ряда все числа?

Ответ: 2.

Решение. Во-первых, заметим, что одного хода не хватит, так как если мы выберем некоторое натуральное число x, то число $y = x$ окажется невычеркнутым. Докажем, что двух ходов хватит.

Будем искать два подходящих числа x_1 и x_2 разной чётности. Тогда одна из разностей $|y-x_1|$ или $|y-x_2|$ будет чётной. Значит, она будет составной — кроме случаев, когда она окажется равной 2 или 0. Эти случаи нужно разобрать отдельно. При $y = x_1 - 2$, $y = x_1$ и $y = x_1 + 2$ разность $|y - x_2|$ должна оказаться составным числом; а при $y = x_2 - 2$, $y = x_2$ и $y = x_2 + 2$, наоборот, разность $|y - x_2|$ должна оказаться составным числом.

В любом случае, достаточно, чтобы разности $|x_1 - x_2 - 2|$, $|x_1 - x_2|$ и $|x_1 - x_2 + 2|$ были нечётными составными числами. Так как выражения под модулями не могут быть разных знаков (иначе один из них окажется равным 1), то это должны быть три последовательных составных нечётных числа.

Теперь достаточно найти три последовательных составных нечётных числа $a-2$, a, $a+2$ (или даже лишь доказать, что такие существуют). Тогда можно выбрать, например, $x_1 = a + 1$ и $x_2 = 1$ и получить требуемое.

Доказать, что три последовательных нечётных составных числа существуют, можно разными способами. Приведём некоторые из них.

Способ 1. Рассмотрим последовательные нечётные числа $7!+3$, $7!+5$ и $7!+7$. Они делятся соответственно на простые числа 3, 5 и 7, но не равны им, то есть являются составными.

Способ 2. Если предположить, что $a-2$ делится на 3, a делится на 5, а $a+2$ делится на 7, то число a должно давать остатки 2, 0 и 5 от деления на 3, 5 и 7 соответственно, а также остаток 1 от деления на 2. По китайской теореме об остатках таких a бесконечно много, и они образуют арифметическую прогрессию с разностью $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$. Первое такое число — это, очевидно, $a = 5$, но оно нам не подходит; а следующее $a = 215$ подходит и даёт тройку составных 213, 215, 217.

Способ 3. Можно перебирать нечётные числа и найти подходящую тройку. Наименьшей такой тройкой является 91, 93, 95, что соответствует $x_1 = 1$ и $x_2 = 94$. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

0 б. Доказано, что одного хода не хватит.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 8.4. *(15 баллов)* В классе учится поровну мальчиков и девочек. Назовём непустую группу мальчиков *популярной,* если каждая девочка в классе дружит хотя бы с одним мальчиком из этой группы (все дружбы взаимны). Оказалось, что в классе ровно 63 популярные группы. Докажите, что каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой.

Решение. Предположим, существует мальчик x, который не дружит ни с одной девочкой. Обозначим через M множество всех остальных мальчиков класса. Заметим, что группа мальчиков $G \subset M$ является популярной тогда и только тогда, когда группа мальчиков $G\cup\{x\}$ является популярной. Таким образом, все популярные группы разбиваются на пары, в каждой из которых группы различаются только присутствием x, и их количество чётно. Но по условию популярных групп 63 — нечётное количество, противоречие. Следовательно, каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. □

Замечание. Описанная в условии задачи конструкция существует. Например, класс, в котором учится 6 мальчиков и 6 девочек, и каждая девочка дружит с каждым мальчиком, удовлетворяет условиям задачи.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

12 б. Разбиение на пары построено не вполне корректно (например, в предположении, что мальчик, который не дружит ни с одной девочкой, существует, каждой популярной группе, которая его содержит, сопоставлена группа, которая его не содержит; но обратное сопоставление не указано).

5 б. Присутствует идея разбивать группы мальчиков на пары, но она не применяется именно к популярным группам.

Задача 8.5. *(20 баллов)* Треугольник ABC таков, что $BC < AC < AB$. Точка M — середина стороны AC. На стороне AB нашлась точка K такая, что $CK = BC$ и $BK = AC$. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle ABM$.

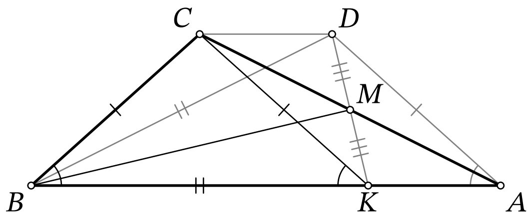


Рис. 1: к решению задачи 8.5.

Решение. Продлим отрезок KM за точку M на его длину и отметим точку D (рис. 1). В четырёхугольнике $AKCD$ диагонали пересекаются в своих серединах, поэтому он параллелограмм. Получаем $AD = CK$ и $\angle BAD = \angle BKC$; а используя равнобедренность треугольника BCK, находим $AD = BC$ и $\angle BAD = \angle CBK$. Значит, треугольники BAD и ABC равны по двум сторонам и углу $\angle BAD = \angle ABC$ между ними, то есть $BD = AC$ и $\angle ABD = \angle BAC$.

Осталось доказать, что $\angle ABD = 2\angle ABM$, то есть что BM — биссектриса угла ABD. Мы уже знаем, что BM — медиана в треугольнике BDK, а из $BD = AC = BK$ получаем, что этот треугольник равнобедренный, откуда и следует требуемое. □

Критерии

20 б. Любое полное решение задачи.

Задача 8.6. *(20 баллов)* На столе лежит 55 кучек конфет. В одной кучке лежит 1 конфета, в другой — две, в третьей — 3, ..., в последней — 55. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За один ход игрок берёт одну конфету из любой кучки. Если игрок забрал из кучки последнюю конфету, то он её съедает, а иначе выбрасывает. Игра продолжается до тех пор, пока все конфеты из кучек не будут съедены или выброшены. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно съесть Петя?

Ответ: 1.

Решение. Понятно, что Петя может съесть 1 конфету, например, если самым первым ходом заберёт конфету из кучки с 1 конфетой.

Докажем, что Вася может помешать Пете съесть больше 1 конфеты. Для этого Вася будет действовать следующим образом. Если в какой-то кучке осталась ровно 1 конфета, он заберёт её и съест. Если же кучек с 1 конфетой нет, он будет брать конфету из любой кучки, в которой более 2 конфет.

Для начала поймём, почему Вася всегда сможет сделать ход по такой стратегии. Предположим, что в какой-то момент Вася не может сделать ход, то есть в каждой кучке не больше 2 конфет, при этом нет кучек с 1 конфетой. Тогда в каждой кучке ровно 2 конфеты, и перед ходом Васи осталось чётное количество конфет. С другой стороны, изначально на столе конфет было $1 + 2 + \ldots + 55 = \frac{55 \cdot 56}{2} = 1540$, т. е. чётное количество. Значит, после хода Пети должно оставаться нечётное количество конфет, а после хода Васи — чётное количество, противоречие.

Теперь докажем, что при такой стратегии Васи Петя не сможет съесть больше 1 конфеты. Заметим, что если после какого-то хода Пети нет кучек из 1 конфеты, то их больше никогда и не будет. Действительно, кучки, из которых берёт конфеты Вася, после его хода не могут состоять только из 1 конфеты, а все кучки из 1 конфеты, которые оставляет Петя, Вася сразу же съедает следующим ходом.

Таким образом, если Петя на первом ходу съест кучку из 1 конфеты, больше он конфет никогда не съест. Если же он не будет этого делать, её следующим ходом съест Вася, а Петя успеет за свой первый ход сделать не более одной новой кучки из 1 конфеты. Если она всё-таки появится (из кучки с 2 конфетами), и Петя не съест её на своём втором ходу, то он не съест вообще ничего, так как новой кучки из 1 конфеты на втором ходу он образовать не сможет. А если съест, то, как и ранее, больше ничего съесть не сможет.

Итак, у Васи есть стратегия, позволяющая не дать Пете съесть более 1 конфеты. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведена верная стратегия Васи с объяснением.

18 б. Задача верно решена в необоснованном предположении, что Петя на первом ходу съест 1 конфету из кучки с 1 конфетой.

10 б. Приведена верная стратегия Васи без верного объяснения.

5 б. Задача решена в предположении, что ни один из игроков не трогает кучки с 2 конфетами, если есть хотя бы одна кучка другого размера.

0 б. Приведён только ответ.

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 9 класс. Решения задач

весна 2023 г.

9 класс

Задача 9.1. *(15 баллов)* Артём, Боря, Вадим и Гриша вернулись из леса, в котором они собирали грибы. Если бы Артём собрал в 2 раза меньше, а Боря в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Вадима и Гриши вместе. А если бы Вадим собрал в 2 раза меньше, а Гриша в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Артёма и Бори вместе. Докажите, что Вадим собрал грибов в 2 раза больше, чем Боря, а Артём собрал грибов в 2 раза больше, чем Гриша.

Решение. Пусть Артём, Боря, Вадим, Гриша собрали a, b, v, g грибов соответственно. Из условия следует, что $\frac{a}{2} + 2b = v + g$ и $a + b = \frac{v}{2} + 2g$. Если из первого равенства, умноженного на 2, вычесть второе, получится $3b = \frac{3}{2}v$, откуда $v = 2b$. Тогда из второго равенства следует, что $a = 2g$. Что и требовалось доказать. □

Критерии

15 б. Любое полное решение задачи.

Задача 9.2. *(15 баллов)* Существует ли 1000-значное натуральное число, состоящее из ненулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим произвольное число A, заканчивающееся на 31253125. Заметим, что оно делится на $3125 = 5^5$, так как число $x = 31253125 = 3125 \cdot 10001$, очевидно, делится на 3125, а оставшееся $A - x$ заканчивается на восемь нулей, т. е. тоже делится на 5^5.

Теперь сделаем так, чтобы сумма цифр числа A была равна в точности 3125. Для этого достаточно, чтобы в числе, помимо последних 8 цифр, было 127 цифр 4 и 865 цифр 3. □

Замечание. Существуют и другие подходящие примеры.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён верный пример с обоснованием того, что он подходит (или иным образом доказано, что такое число существует).

0 б. Приведён неверный пример.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.3. *(15 баллов)* В кафе цены за обед определяются в рублях согласно диаграмме на рис. 1.

Например, только за салат надо заплатить 200 рублей, а за суп + второе — 350 рублей.

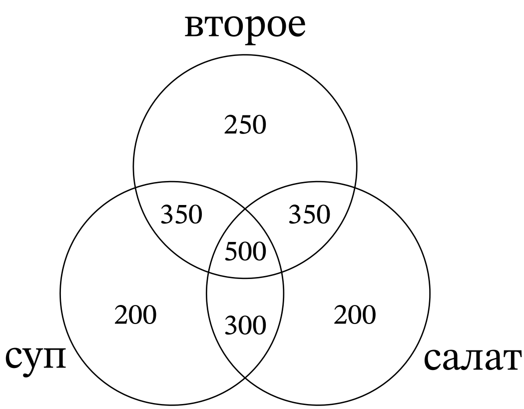


Рис. 1: к условию задачи 9.3

В это кафе пришла группа туристов, которым в сумме требуется 50 вторых блюд, 30 салатов и 15 супов. За какую наименьшую плату можно накормить группу?

Ответ: 17000 рублей.

Решение. Во-первых, отметим, что покупать лишние блюда (которые не будут съедены) в любом случае бессмысленно: если, например, остался лишний суп, то из набора, в который входил этот суп, можно было бы его исключить и заплатить меньше.

Теперь заметим, что вторых требуется больше, чем суммарно супов и салатов. Это означает, что нам обязательно придётся покупать некоторые вторые по отдельности (наборов, в которые входят супы или салаты, не больше 45).

Предположим, что мы взяли хотя бы один набор суп + салат. Но этот набор и отдельное второе (которое точно присутствует) можно было бы заменить на набор из всех трёх блюд, сэкономив на этом $300 + 250 - 500 = 50$ рублей.

Предположим, что мы взяли хотя бы один набор из всех трёх блюд. Но тогда его и отдельное второе можно заменить на наборы второе + суп и второе + салат, сэкономив на этом $250 + 500 - 350 - 350 = 50$ рублей.

Кроме того, отдельные супы или салаты можно совмещать с отдельными вторыми и экономить на этом $200 + 250 - 350 = 100$ рублей.

Таким образом, в оптимальном способе выбора могут встречаться только наборы суп + второе, салат + второе и просто второе. Отсюда однозначно восстанавливается, что наборов первого типа должно быть 15, второго типа — 30, а третьего — 5. Их общая стоимость составляет $350 \cdot 15 + 350 \cdot 30 + 250 \cdot 5 = 17\,000$ рублей. □

Другое решение. Заметим, что выгода при покупке любого набора из двух блюд составляет 100 рублей (по сравнению с покупкой этих блюд по отдельности). Можно считать, что каждое блюдо, купленное в «двойном» наборе, покупается со скидкой 50 рублей. Заметим также, что выгода при покупке набора из трех блюд составляет 150 рублей. Можно считать, что каждое блюдо, купленное в «тройном» наборе, также покупается со скидкой 50 рублей.

Итак, можно считать, что каждое блюдо, купленное в наборе, на 50 рублей дешевле, чем то же блюдо, купленное отдельно. Поэтому суммарная плата равна

$$S = 250 \cdot 50 + 200 \cdot 30 + 200 \cdot 15 - 50k,$$

где k — общее число блюд, попавших в наборы (здесь мы, как и в первом решении, пользуемся тем, что лишних блюд нет).

Заметим, что общее число блюд $50 + 30 + 15 = 95$, и хотя бы $50 - 30 - 15 = 5$ вторых блюд придется купить отдельно. Поэтому $k \leqslant 95 - 5 = 90$ и

$$S = 21500 - 50k \geqslant 21500 - 50 \cdot 90 = 17000.$$

Оценка достигается при покупке 15 наборов «суп + второе», 30 наборов «салат + второе» и 5 вторых блюд отдельно. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+10 б. *Оценка* — доказано, что общая стоимость не может оказаться меньше 17 000 рублей.

В отсутствие такого доказательства используется наибольший подходящий критерий:

- +7 б. В решении доказано, что оптимальном примере нет тройных обедов, но доказательство оценки не доведено (например, не доказано, что нет пары суп+салат).
- +5 б. Замечено, что если блюдо идет в (любом) наборе, то на него скидка 50 рублей.
- +2 б. Рассматривается функция «выгоды» в зависимости от количества тройных обедов (в предположении, что все наборы содержат второе). Замечено, но не доказано, что эта функция (линейно) убывает.
- +2 б. В решении доказано, что в оптимальном примере тройных обедов не более одного.

+5 б. *Пример* — продемонстрировано, что есть ситуация, в которой стоимость достигает 17 000 рублей, и эта величина верно вычислена.

В отсутствие такого примера используется наибольший подходящий критерий:

- +4 б. Решение содержит описание верного примера, но ответ посчитан неправильно или не посчитан.
- +2 б. Приведен верный ответ.

Задача 9.4. *(15 баллов)* Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На сторонах AB и BC нашлись точки N и M соответственно такие, что $\angle BAC = \angle NOA$ и $\angle BCA = \angle MOC$. Точка K — центр описанной окружности треугольника MBN. Докажите, что $AK = CK$.

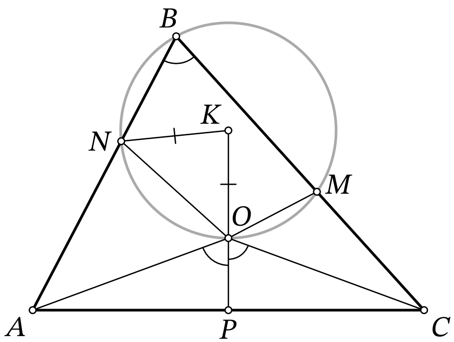


Рис. 2: к решению задачи 9.4.

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$; имеем $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Так как O является центром описанной окружности треугольника ABC, то $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle AOC = 2\beta$, $\angle OBA = \angle OAB = 90° - \gamma$, $\angle OAC = \angle OCA = 90° - \beta$.

Из условия следует, что $\angle MON = 360° - \alpha - \gamma - 2\beta = 180° - \beta$. Тогда четырёхугольник $ONBM$ является вписанным, поскольку $\angle MBN + \angle MON = 180°$. Значит, точка K является центром его описанной окружности (рис. 2).

Получаем, что $\angle OKN = 2\angle OBN = 2(90° - \gamma) = 180° - 2\gamma$. Тогда $\angle KON = \angle KNO = \gamma$.

Пусть прямая KO пересекает прямую AC в точке P. Тогда

$$\angle AOP = 180° - \angle AON - \angle KON = 180° - \alpha - \gamma = \beta.$$

Следовательно, прямая OP в равнобедренном треугольнике AOC является биссектрисой угла AOC, поэтому она также является и серединным перпендикуляром к отрезку AC. Точка K лежит на этой прямой, поэтому $AK = CK$. □

Другое решение. Проведём луч BO до пересечения со стороной AC в точке D (рис. 3). Заметим, что $\angle BAO = \angle ABO$ из равнобедренности треугольника ABO. Тогда, так как $\angle BAC = \angle NOA$ по условию, то треугольники ANO и BDA подобны по двум углам. Имеем $AB : BD = OA : AN$, откуда $AB \cdot AN = OA \cdot BD$.

Аналогично имеем $CB \cdot CM = OC \cdot BD$. Но так как $OA = OC$, получаем $AB \cdot AN = CB \cdot CM$.

Этого равенства достаточно, чтобы установить требуемое. Действительно, произведение $AB \cdot AN$ отрезков секущей равно квадрату длины отрезка касательной, проведённой из точки A к окружности, описанной около BMN. Аналогично той же величине оказывается

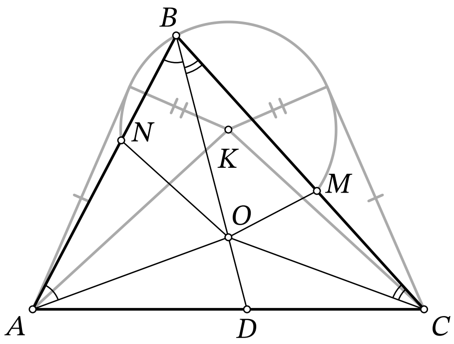


Рис. 3: к решению задачи 9.4.

равен квадрат отрезка касательной, проведённой из точки C. Из равенства отрезков касательных следует и равенство расстояний от точек A и C до центра окружности. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Доказана вписанность четырёхугольника $ONBM$.

1 б. Замечена, но не доказана вписанность четырехугольника $ONBM$.

1 б. Проделаны вычисления углов, из которых в одно действие следует вписанность четырехугольника $ONBM$, но сам этот вывод не получен.

Задача 9.5. *(20 баллов)* Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b=\frac{9}{c-d}$ и $c+d= =\frac{25}{a-b}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $a^2+b^2+c^2+d^2$?

Ответ: 34.

Решение. Если данные равенства домножить на знаменатели соответствующих дробей и сложить, мы получим $2(ac-bd)=34$. Докажем, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2(ac-bd)$. Это следует из $a^2+c^2 \geqslant 2ac$ (эквивалентно $(a-c)^2 \geqslant 0$) и $b^2+d^2 \geqslant -2bd$ (эквивалентно $(b+d)^2 \geqslant 0$). Значит, $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 34$.

Равенство достигается, если все указанные выше неравенства обращаются в равенства, то есть при $a=c$ и $b=-d$. Подставив эти соотношения в равенства, данные в условии, нетрудно найти подходящие значения, например $a=4$, $b=-1$, $c=4$, $d=1$. □

Другое решение. Обозначим $a+b$ через x, а $a-b$ — через y. Получаем $a=\frac{1}{2}(x+y)$ и $b=$

$= \frac{1}{2}(x-y)$, что даёт

$$a^2+b^2 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

С другой стороны, из условия имеем $c-d = \frac{9}{x}$ и $c+d = \frac{25}{y}$, откуда $c = \frac{1}{2}(\frac{9}{x} + \frac{25}{y})$ и $d = \frac{1}{2}(\frac{9}{x} - \frac{25}{y})$. Аналогично получаем

$$c^2+d^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{x}+\frac{25}{y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{x}-\frac{25}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9^2}{x^2}+\frac{25^2}{y^2}\right).$$

Складывая, имеем

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{9^2}{x^2}+y^2+\frac{25^2}{y^2}\right).$$

Заметив, что $x^2+9^2/x^2 \geqslant 2\cdot 9$ (что следует из $(x-9/x)^2 \geqslant 0$) и аналогично $y^2+25^2/y^2 \geqslant 2\cdot 25$, получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant \frac{1}{2}(2\cdot 9+2\cdot 25) = 9+25 = 34\,.$$

Равенство может достигаться, только если все неравенства обращаются в равенства. Из $x-9/x = 0$ следует $x = \pm 3$, а из $y-25/y = 0$ следует $y = \pm 5$, откуда нетрудно получить подходящие примеры значений исходных переменных. □

Замечание. Из приведенных решений можно понять, что выражение принимает значение 34 только при четырех наборах (a,b,c,d):

$$(4,-1,4,1); \quad (-1,4,-1,-4); \quad (1,-4,1,4); \quad (-4,1,-4,-1).$$

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+17 б. *Оценка* — доказано, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 34$.

В отсутствие полного доказательства оценки используется наибольший подходящий критерий:

+3 б. В работе присутствует равенство $2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b)^2+(a-b)^2+$ $+(c+d)^2+(c-d)^2$.

+3 б. В работе присутствует равенство $ac-bd = 17$ или $2ac-2bd = 34$.

+0 б. В работе присутствует равенство $ad-bc = 8$ или $2ad-2bc = 16$.

+0 б. Задача решается в предположении, что числа a, b, c, d целые.

+3 б. *Пример* — приведены подходящие числа a, b, c, d, для которых $a^2+b^2+c^2+d^2 = 34$ (или доказано, что такие существуют).

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только ответ.

Задача 9.6. *(20 баллов)* Было n внешне одинаковых монет, которые весят $x_1, x_2, \ldots, x_n$ граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов $x_1, x_2, \ldots, x_8$, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Ответ: да.

Решение. Рассмотрим веса 10, 20, 25, 30, 35, 201, 203, 207 (здесь и далее веса будут измеряться в граммах). Сделаем две проверки:

$$10 + 20 + 30 = 25 + 35,$$
$$10 + 25 + 201 < 30 + 207.$$

Сначала рассмотрим первое взвешивание. Докажем, что если некоторые три монеты уравновесили некоторые две монеты, то это обязательно 10, 20, 30 на одной чаше и 25, 35 на другой.

Будем называть монеты 10, 20, 25, 30, 35 *маленькими,* а монеты 201, 203, 207 — *большими.*

Если среди пяти монет, участвующих в первом взвешивании, есть большие, то на каждой чаше такая монета должна быть ровно одна (иначе чаша, где таких монет больше, перевесит). При этом веса всех маленьких монет делятся на 5, а веса больших монет дают разные остатки при делении на 5. Тогда суммарные веса на чашах дают разные остатки при делении на 5, что невозможно в случае равенства.

Значит, все эти пять монет — маленькие. Тогда обе чаши весят по $\frac{1}{2}(10+20+25+30+35) = 60$. Легко понять, что сумма весов двух монет может быть равна 60, только если эти две монеты весят 25 и 35. Тогда три другие монеты весят 10, 20, 30.

Следовательно, если первое взвешивание показало равенство, то 10, 20, 30 находятся на чаше с 3 монетами (эту группу назовём A), а 25, 35 — на чаше с двумя монетами (эту группу назовём B). При этом монеты 201, 203, 207 (эту группу назовём C) в первом взвешивании не участвуют.

Рассмотрим второе взвешивание. На одну чашу взяли по одной монете из каждой из трёх групп A, B, C, минимальная сумма весов таких монет $10 + 25 + 201 = 236$. На вторую чашу взяли по одной монете из групп A и C, максимальная сумма весов таких монет $30 + 207 = 237$. В силу того, что 237 больше 236 всего на 1, при взятии любых других монет неравенство во втором взвешивании выполняться не будет. Значит, на одной чаше лежат монеты 10, 25, 201, а на другой — 30, 207.

Итак, при каждом взвешивании мы однозначно определили набор монет на каждой чаше. При этом для всех 8 монет различны пары групп, куда они попали при первом и втором взвешиваниях (либо на чашу с 3 монетами, либо на чашу с 2 монетами, либо не взвешивалась). Следовательно, вес каждой монеты определяется однозначно. □

Замечание. В любом верном алгоритме одно взвешивание должно устанавливать равенство весов двух монет на одной чаше с тремя монетами на другой, а другое взвешивание должно устанавливать, что две монеты на одной чаше тяжелее трёх монет на другой. Это можно понять из следующих соображений.

- Монеты, входящие при одном взвешивании в одну из трёх групп (на первой чаше, на второй и не взвешиваемые), обязаны оказаться в разных группах при втором взвешивании. (Действительно, если две монеты оказались в одних и тех же группах при обоих взвешиваниях, лаборант мог их перепутать и мы бы ничего не заметили.)
- Из предыдущего пункта следует, что никакое взвешивание не может создавать группу из 4 монет или более. Это означает, что в каждом взвешивании на чашах либо по 3 монеты, либо 3 и 2.
- Также из первого пункта следует, что монеты можно расположить в таблице 3×3, по строкам которой располагаются группы первого взвешивания, а по столбцам — группы второго; ровно одна из клеток останется без монеты.

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1		c_3

- Не могут оба взвешивания иметь одинаковый формат и исход. (Например, не может быть, чтобы в обоих взвешиваниях 2 монеты на одной чаше перевешивали 3 монеты на другой.) Действительно, в этом случае если в таблице, привёденной выше, упорядочить строки и столбцы одинаковым образом (например, в порядке лёгкое/тяжёлое/невзвешенное), то пустая клетка расположится на главной диагонали; тогда лаборант мог так перепутать наклейки, чтобы монеты отразились относительно этой диагонали, и заметить этого мы бы не смогли.
- Не может быть взвешивания, в котором на обеих чашах по три монеты, и между ними установилось равновесие. Например, пусть первое взвешивание так устроено; его чаши сопоставим первой и второй строкам нашей таблицы. Тогда лаборант мог так перепутать наклейки, что первая и вторая строка поменяются местами. На результатах наших взвешиваний это бы не отразилось, то есть мы бы такую ошибку не заметили.
- Не может быть взвешивания, в котором на обеих чашах по три монеты, и одна чаша тяжелее другой. Чтобы это доказать, предположим противное — пусть это было первое взвешивание. Лёгкую его чашу сопоставим первой строке, а тяжёлую — третьей строке; столбцы упорядочим так, чтобы группа из 2 монет от второго взвешивания оказалась в последнем столбце (независимо от самой структуры второго взвешивания).

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	
c_1	c_2	c_3

Если теперь переупорядочить числа в столбцах сверху вниз по возрастанию (оставив пустую клетку пустой), то показания весов не изменятся: состав столбцов не поменяется, а нижняя строка окажется помонетно тяжелее верхней. Но если после этого поменять местами, например, в центральном столбце две нижние монеты, то нижняя строка всё равно будет тяжелее верхней! Получается, что мы не можем однозначно установить расположение монет, то есть у лаборанта опять есть шанс нас обмануть.

- Аналогично доказывается, что не может быть взвешивания, в котором чаша с тремя монетами перевешивает чашу с двумя.

Также из аналогичных соображений нетрудно понять, что для 9 монет двумя взвешиваниями обойтись уже ни в какой ситуации не получится.

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведен верный пример набора масс и описание двух взвешиваний, позволяющих проверить правильность маркировки.

3 б. В работе содержится указание на то, что монеты, попавшие в одну группу при первом взвешивании, при втором взвешивании должны оказаться в разных группах.

3 б. В работе приведен пример набора масс и описание двух взвешиваний, не позволяющих проверить правильность маркировки, но монеты, оказавшиеся в одной группе при каждом из взвешиваний, при другом взвешивании попадают в разные группы.

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 10 класс. Решения задач

весна 2023 г.

10 класс

Задача 10.1. *(15 баллов)* Существуют ли многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что многочлены $P(x) \cdot Q(x)$, $Q(x) \cdot R(x)$ и $P(x) \cdot R(x)$ имеют одинаковую степень, а многочлены $P(x)+Q(x)$, $P(x)+R(x)$ и $Q(x)+R(x)$ имеют попарно различные степени? (Считаем, что нулевой многочлен степени не имеет, то есть указанные многочлены не могут быть ему равны.)

Ответ: да.

Решение. Достаточно взять, например, $P(x) = x^2$, $Q(x) = -x^2+1$, $R(x) = x^2+x$. Тогда многочлены $P(x) \cdot Q(x)$, $Q(x) \cdot R(x)$ и $P(x) \cdot R(x)$ имеют степень 4 (это произведения двух многочленов степени 2); многочлен $P(x)+Q(x)$ равен 1 и имеет степень 0; многочлен $P(x)+R(x)$ равен $2x^2+x$ и имеет степень 2; многочлен $Q(x)+R(x)$ равен $x+1$ и имеет степень 1. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведён любой верный пример многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ (либо иным образом доказано, что такие многочлены существуют).

0 б. Приведён только ответ.

Задача 10.2. *(15 баллов)* Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$. На стороне CD нашлась точка N такая, что $\angle DNB = 90°$. Докажите, что $AD + NC = DN$.

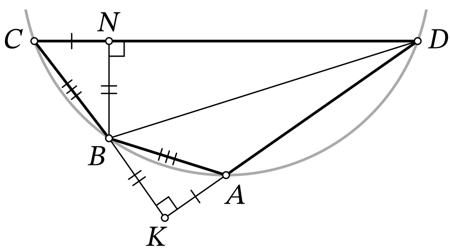


Рис. 1: к решению задачи 10.2.

Решение. На продолжении отрезка DA за точку A отметим точку K такую, что $AK = NC$ (рис. 1). Заметим, что треугольники AKB и CNB равны ($AB = CB$ по условию, $AK = CN$ по построению, $\angle KAD = \angle NCB$ из вписанности четырёхугольника $ABCD$). Следовательно, $BK = BN$ и $\angle BKA = \angle BNC = 90°$.

Теперь заметим, что равны прямоугольные треугольники DBN и DBK (у них равны катеты BN и BK, а гипотенуза BD — общая). Следовательно, $DN = DK = AD + AK = AD + NC$, что и требовалось. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

3 б. Рассмотрена точка K из решения (т. е. точка на продолжении отрезка DA за точку A с условием $AK = CN$), либо та же точка, построенная другим корректным способом (например, как проекция точки B на луч DA).

Задача 10.3. *(15 баллов)* Для действительных чисел $x > 2$ и $y > 2$ докажите, что

$$\frac{x^2 - x}{y^2 + y} + \frac{y^2 - y}{x^2 + x} > \frac{2}{3}.$$

Решение. Домножив обе части на произведение знаменателей, получим

$$3(x^4 - x^2 + y^4 - y^2) > 2(x^2 + x)(y^2 + y).$$

Раскрыв скобки в правой части и перенеся отрицательные слагаемые в правую часть, получим

$$3x^4 + 3y^4 > 2x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2xy + 3x^2 + 3y^2.$$

Это неравенство получается суммированием трёх следующих неравенств, справедливых для любых $x > 2$ и $y > 2$:

- $x^4 + y^4 \geqslant 2x^2y^2$. Это неравенство равносильно тому, что $(x^2 - y^2)^2 \geqslant 0$.
- $x^4 + y^4 = x^2 \cdot x^2 + y^2 \cdot y^2 > 4x^2 + 4y^2 \geqslant 3x^2 + 3y^2 + 2xy$. Последнее неравенство равносильно тому, что $(x - y)^2 \geqslant 0$.
- $x^4 + y^4 = x \cdot x^3 + y \cdot y^3 > 2x^3 + 2y^3 \geqslant 2x^2y + 2xy^2$. Последнее неравенство равносильно тому, что $2(x + y)(x - y)^2 \geqslant 0$. □

Другое решение. Воспользуемся неравенством Коши для двух чисел (неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим): для положительных p и q верно $p + q \geqslant 2\sqrt{pq}$.

Пусть $p = \frac{x^2 - x}{y^2 + y}$ и $q = \frac{y^2 - y}{x^2 + x}$ (p и q положительны в силу того, что $x > 2$ и $y > 2$). Тогда по неравенству Коши получаем

$$\frac{x^2 - x}{y^2 + y} + \frac{y^2 - y}{x^2 + x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2 + x} \cdot \frac{y^2 - y}{y^2 + y}} = 2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{y-1}{y+1}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{y+1}\right)} > 2\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}.$$ □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

5 б. Применено неравенство Коши к двум исходным дробям (как во втором решении).

5 б. Применено транснеравенство к числителям и знаменателям дробей левой части исходного неравенства:

$$\frac{x^2-x}{y^2+y}+\frac{y^2-y}{x^2+x}\geqslant\frac{x^2-x}{x^2+x}+\frac{y^2-y}{y^2+y}.$$

Задача 10.4. *(15 баллов)* Однажды 45 друзей, живущих в разных уголках земного шара, захотели обменяться друг с другом новостями. Для этого они собираются устроить k видеовстреч, на каждой из которых каждый человек расскажет всем свои новости, а также все новости других людей, которые он узнал ранее.

Для видеовстреч было предложено 10 дней, но оказалось, что каждый из друзей может присутствовать только в какие-то 8 из них. При каком наименьшем натуральном k можно гарантированно выбрать k дней для видеовстреч из предложенных 10 так, чтобы каждый узнал новости каждого?

(Между предложенными днями у людей новых новостей не возникает, и никак иначе они друг с другом не общаются. В каждый из предложенных дней проходит одна видеовстреча, на которой собираются все, кто может в этот день присутствовать.)

Ответ: 5 дней.

Решение. Приведём пример ситуации, в которой 4 дней не хватит. Пусть у каждого из 45 людей будет своя, не совпадающая с другими людьми, пара дней, в которые он не может участвовать во встрече. Так как количество способов выбрать пару дней из 10 предложенных равно $C_{10}^2=45$, то для любой пары дней найдётся человек, который не может присутствовать ровно в эту пару дней. Предположим, что мы смогли выбрать какие-то 4 дня так, чтобы каждый узнал все новости. Но тогда существует человек A, который не может присутствовать в первые два дня из этих четырёх, а также человек B, который не может присутствовать в последние два из этих четырёх дней. Заметим, что тогда B не сможет узнать новостей A. Противоречие.

Теперь поймём, что 5 дней всегда точно хватит. Выберем 5 дней произвольным образом. Докажем, что любые два человека будут вместе присутствовать на какой-то встрече. Действительно, среди этих 5 дней есть не более 2 дней, в которые не может присутствовать первый, а также не более 2 дней, в которые не может присутствовать второй. Значит, найдётся день, в который могут присутствовать оба человека. Таким образом, каждая пара людей сможет обменяться новостями, т. е. каждый узнает новость каждого. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются:

+9 б. *Оценка* — доказано, что 4 дней может не хватить.

В отсутствие этого доказательства оценивается следующее продвижение:

+1 б. Упомянуто, что всем людям могут соответствовать разные пары пропущенных дней.

+6 б. *Пример* — доказано, что 5 дней гарантированно хватит.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Приведён только верный ответ.

Задача 10.5. *(20 баллов)* Найдите все составные натуральные числа n, обладающие следующим свойством: каждый натуральный делитель числа n (в частности, само n), уменьшенный на 1, является квадратом целого числа.

Ответ: 10.

Решение. Предположим, что n делится на квадрат какого-то простого числа p. Тогда у него есть делитель $p^2 = b^2 + 1$; но два квадрата целых чисел могут отличаться на 1, только если это 0 и 1.

Пусть n делится на какие-то два простых числа p и q. Без ограничения общности можно считать, что $p > q$. Из условия, что любой делитель, уменьшенный на 1, является квадратом, можно записать

$$p = a^2 + 1,$$
$$q = b^2 + 1,$$
$$pq = c^2 + 1.$$

Вычтем из третьего уравнения первое, получим $pq - p = c^2 - a^2$. Это можно переписать в виде

$$p(q-1) = (c-a)(c+a).$$

Так как p — простое число, один из множителей в правой части должен делиться на p. Заметим, что из условия $p > q$ следует, что $pq < p^2$, откуда $c < p$. Поэтому $c - a < p$ и, так как $c \neq a$, не может делиться на p. Значит, $c + a$ должно делиться на p. При этом $c < p$ и $a < p$, откуда $c + a$ должно быть в точности равно p.

Итак, получили, что $c = p - a$. Кроме того, так как $p = c + a$, $q - 1$ должно быть равно оставшемуся множителю, т. е. $c - a$. Значит, $q = c - a + 1 = p - 2a + 1$. Отсюда видно, что числа p и q разной чётности. Но так как они оба простые и $p > q$, получаем, что $q = 2$.

Подставляя $q = 2$, получаем $2 = c - a + 1 = p - 2a + 1$, откуда, во-первых, $c = a + 1$, а во-вторых, $p = 2a + 1$. Тогда $pq = 2p = 4a + 2$ и $pq = c^2 + 1 = (a+1)^2 + 1$. Приравнивая, получаем квадратное уравнение $a^2 + 2a + 2 = 4a + 2$, корнями которого являются числа 2 и 0, откуда p равно 5 или 1. Но так как p должно быть простым, то остаётся единственный вариант $p = 5$.

Таким образом, единственный возможный случай — это $p = 5$, $q = 2$. Понятно, что других простых чисел в разложении n уже быть не может. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведено любое полное решение задачи.

16 б. Доказано, что n чётно.

4 б. Верно разобран случай чётного n.

В отсутствие указанных выше продвижений суммируются следующие критерии:

+1 б. Приведён верный ответ.

+1 б. Доказано, что n свободно от квадратов.

Задача 10.6. *(20 баллов)* Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH^2 = BH^2 + CH^2$. На описанной окружности треугольника ABC нашлись точки D и E такие, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Докажите, что точка H лежит на прямой DE.

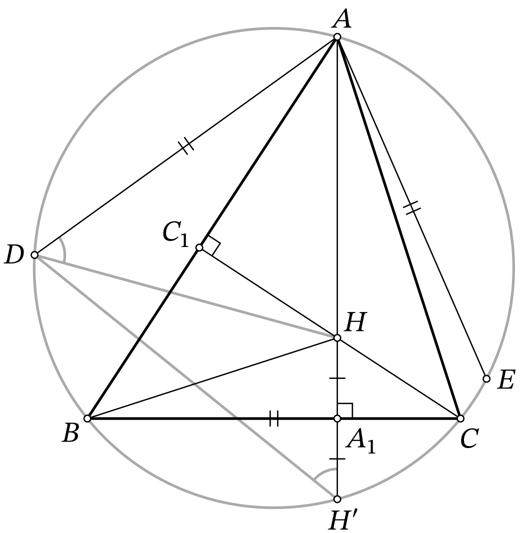


Рис. 2: к решению задачи 10.6.

Решение. Обозначим основания высот треугольника через A_1, B_1, C_1, а точку пересечения прямой AH с описанной окружностью — через H' (рис. 2). Из условий $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$ следует, что $AD = AE = BC$. Кроме того, из $\angle BCC_1 = 90° - \angle ABC = \angle BAH' = \angle BCH'$ и $CA_1 \perp HH'$ следует $HA_1 = A_1H'$ (это известное утверждение о том, что отражение ортоцентра треугольника относительно стороны лежит на описанной около него окружности).

По условию $AH^2 = BH^2 + CH^2$. Применяя несколько теорем Пифагора, получаем

$$CH^2 = AH^2 - BH^2 = (AC_1^2 + C_1H^2) - (BC_1^2 + C_1H^2) = \\ = (AC_1^2 + C_1C^2) - (BC_1^2 + C_1C^2) = AC^2 - BC^2.$$

Тогда

$$BC^2 = AC^2 - CH^2 = (AA_1^2 + A_1C^2) - (HA_1^2 + A_1C^2) = AA_1^2 - HA_1^2 = \\ = (AA_1 - HA_1)(AA_1 + HA_1) = AH \cdot (AA_1 + A_1H') = AH \cdot AH'.$$

Наконец, из равенства $BC^2 = AH \cdot AH'$ следует, что $AD^2 = AH \cdot AH'$, т. е. $\frac{AD}{AH'} = \frac{AH}{AD}$. Отсюда следует подобие треугольников $AH'D$ и ADH, откуда $\angle AH'D = \angle ADH$. С другой стороны, $\angle AH'D = \angle ADE$, поскольку эти вписанные углы опираются на равные хорды AD и AE. Из равенства $\angle ADH = \angle ADE$ и следует, что точка H лежит на прямой DE.

Идея другого решения. Как и в предыдущем решении, легко понять, что $AD = AE = BC$. Тогда прямая DE является радикальной осью окружности с центром A и радиусом BC и описанной окружности треугольника ABC. Тогда для доказательства коллинеарности точек D, E, H достаточно проверить, что степени точки H относительно двух этих окружностей одинаковы.

Идея ещё одного решения. Пусть B_1 и C_1 — основания высот из точек B и C соответственно, а B_2 и C_2 — точки пересечения этих высот с описанной окружностью треугольника ABC (из утверждения об отражении ортоцентра следует, что $HC_1 = C_1C_2$ и $HB_1 = B_1B_2$). Тогда EC_2 и DB_2 — диаметры описанной окружности треугольника ABC, пересекающиеся в её центре O. Значит, коллинеарность точек D, E, H эквивалентна тому, что точка, симметричная H относительно O, лежит на отрезке B_2C_2, а это эквивалентно тому, что точка O лежит на отрезке B_1C_1. Несложным счётом углов можно проверить, что $AO \perp B_1C_1$, поэтому для решения задачи достаточно доказать, что точка O является основанием высоты из точки A в треугольнике AB_1C_1. □

Критерии

20 б. Приведено любое полное решение задачи.

Олимпиада «Высшая проба». Математика.

Заключительный тур. 11 класс. Решения задач

весна 2023 г.

11 класс

Задача 11.1. *(15 баллов)* Каждое натуральное число покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный, причём все 3 цвета встречаются. Может ли оказаться так, что сумма любых двух чисел разных цветов является числом оставшегося цвета?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такое возможно. Без ограничения общности можно считать, что число 1 покрашено в первый цвет. Выберем произвольное число x второго цвета. Заметим, что тогда $x+1$ должно быть третьего цвета, $x+2$ — второго, $x+3$ — третьего и т. д. Таким образом, все числа, большие x, покрашены во второй или третий цвет. С другой стороны, так как x покрашен во второй цвет, а $x+1$ — в третий, число $2x+1$ должно быть покрашено в первый цвет, противоречие. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. Доказано, что с некоторого момента чередуются числа двух цветов.

10 б. Разобран случай, когда числа 1 и 2 одного цвета.

2 б. Разобран случай, когда числа 1 и 2 разных цветов, и получено противоречие на маленьких числах.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Рассмотрены несколько частных случаев раскраски натурального ряда.

0 б. Приведён только ответ.

Снимаются баллы за следующие недочёты в в остальном верном решении:

−2 б. Утверждается, но никак не обосновывается, что с некоторого момента чередуются числа двух цветов.

Задача 11.2. *(15 баллов)* Различные действительные числа x, y, z таковы, что среди трёх чисел

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{y+z}{y^2+yz+z^2}, \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2}$$

какие-то два равны. Верно ли, что все эти три числа равны?

Ответ: да.

Решение. В данных выражениях умножим числители и знаменатели на $x-y$, $y-z$, $z-x$ соответственно (согласно условию, эти разности ненулевые). Получим те же числа в другом виде:

$$\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, \quad \frac{y^2-z^2}{y^3-z^3}, \quad \frac{z^2-x^2}{z^3-x^3}.$$

Без ограничения общности будем считать, что первое и третье числа равны. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{z^2-x^2}{z^3-x^3} \quad \Rightarrow \\ x^2z^3-x^5-y^2z^3+y^2x^3=z^2x^3-z^2y^3-x^5+x^2y^3 \quad \Rightarrow \\ x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2=x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2. \qquad (*)\end{gathered}$$

Это симметричное равенство, поэтому теперь можно просто поменять местами две переменные (например, x и y) и проделать те же переходы в обратном порядке, получив равенство третьего и второго чисел:

$$\begin{gathered}x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2=x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2 \quad \Rightarrow \\ x^2z^3-x^2y^3-z^5+z^2y^3=z^2x^3-z^5-y^2x^3+y^2z^3 \quad \Rightarrow \\ \frac{x^2-z^2}{x^3-z^3}=\frac{z^2-y^2}{z^3-y^3} \quad \Rightarrow \\ \frac{z^2-x^2}{z^3-x^3}=\frac{y^2-z^2}{y^3-z^3}.\end{gathered}$$

(Деления при этом корректны, так как выражения-делители уже фигурировали ранее в знаменателях, и мы знаем, что они не равны нулю.) □

Замечание. Равенство (*) эквивалентно $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)=0$. Отсюда легко понять, в частности, что такие x, y, z существуют — подойдёт любая тройка различных чисел, для которых $xy+yz+zx=0$, например $x=-2$, $y=3$, $z=6$.

Другое решение. Без ограничения общности предположим, что первые два выражения равны k. Имеем

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}=k, \\ \dfrac{y+z}{y^2+yz+z^2}=k.\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x+y=k(x^2+xy+y^2), \\ y+z=k(y^2+yz+z^2).\end{cases}$$

Вычитая эти равенства, получаем

$$\begin{gathered}x-z=k(x^2-z^2+xy-yz) \quad \Rightarrow \\ x-z=k(x-z)(x+z+y) \quad \Rightarrow \\ 1=k(x+y+z).\end{gathered}$$

(Последний переход корректен, так как по условию $x-z\neq 0$.)

Мы получили симметричный относительно x, y, z вывод. Теперь можно проделать переходы в обратном порядке, чтобы установить, что и третье из данных выражений тоже равно k:

$$\begin{gathered}1 = k(x+y+z) \quad \Rightarrow \\ z-y = k(z-y)(x+z+y) \quad \Rightarrow \\ z-y = k(z^2-y^2+zx-xy).\end{gathered}$$

Складывая с уже известным $x+y = k(x^2+xy+y^2)$, получаем

$$z+x = k(z^2+zx+x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2} = k.$$

(Последний переход корректен, так как выражение, на которое мы делим, уже фигурирует в знаменателе в условии задачи.) □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. В (в остальном верном) решении производится деление на выражение, значение которого может быть равно 0, но случай равенства 0 не разбирается; при этом разбор этого случая не представляет сложности (например, при приравнивании первых двух дробей происходит деление на $x+y$ и не проверяется случай, когда $x+y=0$).

6 б. Доказано равенство $xy+yz+zx=0$.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. В решении производится деление на выражение, значение которого может быть равно 0, но случай равенства 0 не разбирается, и разбор этого случая нетривиален.

0 б. Приведён только ответ.

Задача 11.3. *(15 баллов)* Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a).$$

Ответ: 3000.

Решение. Заметим, что $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,b-a) \leqslant b-a$, так как НОД двух натуральных чисел не превосходит каждое из них. Аналогично получаем, что $\text{НОД}(b,c) \leqslant c-b$, а также $\text{НОД}(c,a) \leqslant a$.

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a) \leqslant (b-a)+(c-b)+a = c \leqslant 3000.$$

В качестве примера на 3000 можно предъявить, например, $a = 1000$, $b = 2000$, $c = 3000$. В этом случае $\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(b, c) + \text{НОД}(c, a) = 1000 + 1000 + 1000 = 3000$. □

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются.

+14 б. *Оценка* — доказано, что рассматриваемая сумма не превосходит 3000.

В отсутствие такого доказательства оценивается следующее продвижение:

+4 б. Замечено, что НОД различных натуральных чисел не превосходит их разности, но дальнейших продвижений нет.

+1 б. *Пример* — приведены числа a, b, c, для которых рассматриваемая сумма равна 3000 (либо иным способом доказано, что такие числа существуют).

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

0 б. Неполный перебор, в котором отсутствует разбор одного из случаев, и этот случай не аналогичен разобранным.

Задача 11.4. *(15 баллов)* В окружность ω вписан треугольник ABC такой, что $AB < BC$. Биссектриса внешнего угла B пересекает ω в точке M. Прямая, параллельная BM, пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны CA за точку A в точках P, Q и R соответственно. Прямая MR вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что точки B, P, Q, X лежат на одной окружности.

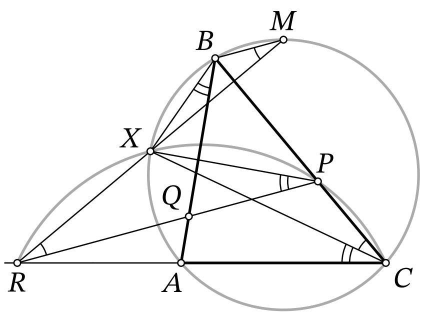


Рис. 1: к решению задачи 11.4.

Решение. Рис. 1. Докажем, что точки R, X, P, C лежат на одной окружности Ω. Действительно, $\angle XRP = \angle BMX$ как накрест лежащие при параллельных прямых BM и RP, а $\angle BMX = \angle BCX$ как опирающиеся на одну дугу в ω, откуда $\angle XRP = \angle XCP$.

Теперь получаем $\angle XBQ = \angle XCA$ из окружности ω и $\angle XCA = \angle XPR$ из окружности Ω. Значит, $\angle XBQ = \angle XPQ$, откуда и следует, что точки X, B, P, Q лежат на одной окружности. $\square$

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

15 б. Приведено любое полное решение задачи.

7 б. Доказано, что один из четырёхугольников $RXPC$ или $RXQA$ вписанный.

Следующее продвижение не оценивается:

0 б. Счёт углов, из которого не сделан вывод о вписанности одного из четырёхугольников $RXPC$ или $RXQA$.

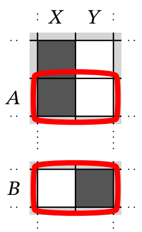
Задача 11.5. *(20 баллов)* Дана клетчатая доска 100×100. Каждая клетка доски покрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Назовём раскраску доски *уравновешенной,* если в каждой строке и в каждом столбце 50 белых и 50 чёрных клеток. За одну операцию разрешается выбрать две строки и два столбца так, чтобы из 4 клеток на их пересечении две были чёрными, а две — белыми, и перекрасить каждую из этих 4 клеток в противоположный цвет. Докажите, что из любой уравновешенной раскраски можно получить любую другую уравновешенную раскраску с помощью указанных операций.

Решение. Докажем, что из любой уравновешенной доски можно получить доску, раскрашенную в шахматную раскраску, причём на каждом шаге доска будет оставаться уравновешенной. Из этого будет следовать, что из любой уравновешенной доски можно получить любую другую, так как операция обратима.

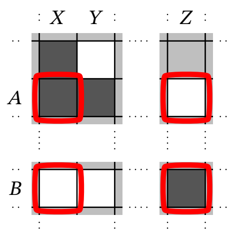
Будем получать шахматную раскраску следующим образом. Разобьём столбцы на пары подряд идущих. Выберем самую левую пару столбцов и в этой паре столбцов по очереди будем приводить строки (состоящие из двух клеток) к шахматной раскраске. После того как закончим с первой парой столбцов, перейдём ко второй и так далее.

Объясним, как делать следующий шаг внутри одной пары столбцов X и Y. Пусть в следующей строке A сейчас находятся чёрная и белая клетка, но в неправильном порядке. Например, слева стоит чёрная клетка, а справа белая, а должно быть наоборот. Заметим, что во всех строках выше A в первом столбце суммарно чёрных клеток не меньше, чем во втором, так как они уже покрашены шахматным образом. Значит, в какой-то строке B ниже A должна быть ситуация, когда в левом столбце чёрных клеток меньше, чем в правом, т. е. должна быть строка белая-чёрная (это следует из того, что суммарно в первом столбце столько же чёрных клеток, сколько и во втором). Произведём операцию со строками A и B и текущими столбцами (рис. 2a).

Пусть теперь у нас в строке A стоят две одинаковые клетки, например чёрные. Тогда в какой-то строке B должны оказаться две белые клетки (иначе суммарно чёрных клеток в этих двух столбцах будет слишком много). Понятно, что эта строка расположена ниже



(a)



(b)

Рис. 2: к решению задачи 11.5.

текущей, т. к. выше неё все строки разноцветные. Теперь заметим, что если посмотреть на эту пару строк во всей таблице, то должен быть столбец Z правее X и Y, в котором в первой строке белая клетка, а во второй — чёрная. Тут мы пользуемся тем, что левее наших столбцов в этих строках поровну чёрных и белых клеток. Теперь осталось лишь выбрать один из столбцов X или Y (в котором неправильный цвет в строке A) и столбец Z, а также строки A и B и произвести операцию с ними (рис. 2b).

Легко видеть, что на каждом шаге уравновешенность доски сохраняется. А так как мы всегда можем сделать шаг в нашем алгоритме, то в конце получится шахматная раскраска. □

Критерии

Используется наибольший подходящий критерий:

20 б. Приведено любое полное решение задачи.

10 б. Описан метод получения первого столбца какой-то конкретной раскраски. Про последующие столбцы делается верное, но не обоснованное утверждение, что они заполняются аналогично.

В отсутствие указанных выше продвижений суммируются следующие критерии:

+2 б. Доказано, что если в столбце есть пара белая-чёрная клетки, то в соответствующих строках найдётся столбец, в котором находится пара чёрная-белая клетки (именно в таком порядке).

+1 б. Есть идея получить какую-то конкретную раскраску (например, шахматную), которую можно получить, а из неё любую.

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Доказано, что можно получить какую-то другую уравновешенную раскраску, а не любую уравновешенную раскраску.

0 б. Предложенный алгоритм нарушает уравновешенность, но существенно использует её.

Задача 11.6. *(20 баллов)* Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что в совокупности они имеют 4 различных действительных корня, а также каждый из многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ имеет 4 различных действительных корня. Какое наименьшее количество различных действительных чисел может быть среди корней многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$?

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что если среди корней многочлена $P(Q(x))$ есть корень $Q(x)$, скажем, число x_0, то $P(Q(x_0)) = P(0) = 0$, откуда 0 является корнем $P(x)$. Аналогично если среди корней $Q(P(x))$ есть корень многочлена $P(x)$, то 0 является корнем $Q(x)$. Но одновременно $P(x)$ и $Q(x)$ не могут иметь корень 0, т. к. иначе в совокупности у них было бы менее 4 корней.

Отсюда можно получить оценку общего числа различных корней. Если их не больше 5, то у $P(Q(x))$ и $Q(x)$ есть общий корень, а также у $Q(P(x))$ и $P(x)$ есть общий корень, чего не может быть по вышесказанному.

Теперь построим пример, когда различных корней ровно 6. Пусть $P(x) = \frac{1}{2}x(x-3)$, $Q(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$. Тогда у $P(x)$ корнями будут числа 0 и 3; у $Q(x)$ корнями будут числа -1 и 2; у $P(Q(x))$ корнями будут числа -1, 0, 1, 2; у $Q(P(x))$ корнями будут числа -1, 1, 2, 4. Итого корни всех многочленов в совокупности — целые числа от -1 до 4. □

Замечание. Существуют и другие примеры, когда различных корней ровно 6; во всех примерах один из трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеет корень 0. Например, пара трёхчленов $P(x) = x(x-3)$ и $Q(x) = -\frac{3}{4}(x+1)(x-4)$ тоже подходит.

Критерии

Баллы за оценку и пример суммируются.

+6 б. *Оценка* — доказано, что менее 6 различных чисел среди корней рассматриваемых многочленов быть не может.

В отсутствие этого доказательства оценивается следующее продвижение:

+3 б. Замечено, что если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(x)$ имеют общий корень, то многочлен $P(x)$ имеет корень 0.

+14 б. *Пример* — указаны подходящие квадратные трёхчлены $P(x)$, и $Q(x)$ и показано, что среди корней всех четырёх рассматриваемых многочленов ровно 6 различных чисел (либо иным способом доказано, что такие трёхчлены существуют).

В отсутствие такого примера с обоснованием используется наибольший из следующих критериев:

+10 б. Верный пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$.

+12 б. Верный пример квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$, и в работе также есть верная оценка. (Таким образом, за решение с верной оценкой и верной парой $P(x)$ и $Q(x)$ без доказательства, что они подходят, ставится в сумме 18 б.)

Следующие продвижения не оцениваются:

0 б. Приведён только ответ.

0 б. Верный пример с 7 и более корнями.