Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

7-1 Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

Ответ: 9.

Решение. Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 делится на 2, если и только если его последняя цифра чётная, то есть 2 или 4. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. В нашей ситуации такое возможно, для следующих наборов цифр:

$$\{1, 2\}, \text{ или } \{1, 2, 3\}, \text{ или } \{2, 4\}, \text{ или } \{2, 3, 4\}$$

имеем 2 варианта в первом случае, 2 варианта во втором и 4 в последнем третьем случае. Итого 9 вариантов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Верно обоснованный перебор, но в ответе упущено число.	±	15
Только ответ.	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

7-2 На плоскости есть набор из 2018 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Рассмотрим все замкнутые ломанные, проходящие через все точки набора. Сколько точек самопересечения может иметь ломанная минимальной длины?

Ответ: 0.

Решение. Обозначим через V рассматриваемый набор из 2018 точек. Покажем, что замкнутая ломаная минимальной длины (если она существует) не имеет самопересечений. Заметим, что доказательство существования в данной задаче не требуется, но его можно доказать, см. конец решения.

Предположим противное: пусть $L = A_1 \ldots A_k$ — замкнутая ломаная минимальной длины (среди всех ломаных, проходящих через точки набора V), имеющая точку самопересечения. Здесь $A_1, \ldots, A_k$ — вершины ломаной L, включая все точки набора V (подразобьём ломаную так чтобы каждая точка набора V стала вершиной; считаем, что соседние вершины не совпадают). Покажем, что можно преобразовать L в другую ломанную M меньшей длины, проходящей через точки набора. Положим $A_0 = A_k$, $A_{k+1} = A_1$.

Пусть O — точка самопересечения ломаной L. Рассмотрим два случая.

Случай 1): O не вершина. Тогда это точка пересечения ребер AjA_{j+1} и A_mA_{m+1}. Пусть $j < m$, тогда $j+1 < m$. Рассмотрим ломаную

$$M = A_{m+2} \ldots A_kA_1 \ldots A_jA_mA_{m-1} \ldots A_{j+1}A_{m+1},$$

полученную из ломаной L заменой пересекающихся диагоналей A_jA_{j+1} и A_mA_{m+1} выпуклого четырёхугольника $A_{m+1}A_jA_mA_{j+1}$ на его противоположные стороны A_jA_m, $A_{j+1}A_{m+1}$. Сумма противоположных сторон меньше суммы диагоналей, по неравенству треугольника. Значит, ломаная M имеет длину меньше, чем L.

Случай 2): $O = A_j$ — вершина. Тем самым, $O = A_j = A_m$, $|m - j| \geqslant 2$. Точки A_{j-1}, A_j, A_{j+1} лежат на одной прямой, так что A_j разделяет A_{j-1} и A_{j+1} , в силу минимальности: иначе можно было бы заменить участок $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ ломаной на ребро $A_{j-1}A_{j+1}$ и получить ломаную меньшей длины с теми же вершинами. Аналогичное утверждение справедливо с заменой индекса j на m. Рассмотрим ломаную

$$M = A_{m+2}...A_kA_1...A_{j-1}A_jA_{m-1}A_{m-2}...A_{j+1}A_{m+1}$$

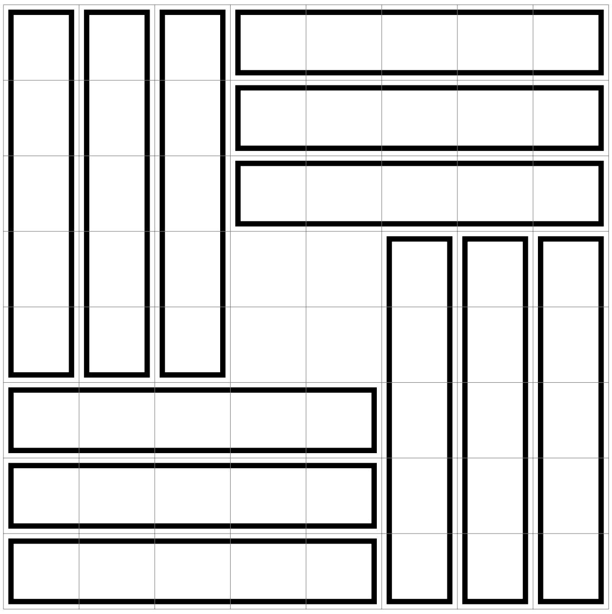
, полученную из ломаной L заменой объединения участков $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ и $A_{m-1}A_mA_{m+1}$ на объединение ломаной $A_{j-1}A_jA_{m-1}$ и ребра $A_{j+1}A_{m+1}$. При этом длина ломаной уменьшилась, как и в предыдущем случае, так как в выпуклом четырёхугольнике $A_{j-1}A_{m-1}A_{j+1}A_{m+1}$ и точкой $O=A_j$ пересечения диагоналей сумма длин диагоналей не больше суммы длин $|A_{j-1}A_j|+|A_jA_m|+|A_{j+1}A_{m+1}|$ по неравенству треугольника. Исключительный случай, когда все вершины $A_{j\pm1}$, $A_{m\pm1}$, A_j, A_m лежат на одной прямой, рассматривается аналогично. Полученое противоречие доказывает отсутствие самопересечений у ломаной минимальной длины. Ломаная минимальной длины действительно существует. А именно, можно считать, что все вершины рассматриваемых ломаных являются точками набора: иначе если есть вершина вне набора, то можно заменить примыкающие к ней два ребра одним, не увеличив длину. Тем самым, достаточно показать, что в рассматриваемом классе ломаных имеется ломаная минимальной длины. Выберем произвольную допустимую ломаную, обозначим через D её длину. Рассмотрим все допустимые ломаные длины не больше D. Их длины — всевозможные суммы попарных расстояний между точками набора V, не превосходящие D, их конечное число. А на конечном множестве минимум достигается.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-3 Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

Ответ: 12

Решение Заметим, что больше 12 фигурок из 5 клеток в каждой поместить на клетчатую бумагу в которой всего $8\times8=64$ клетки заведомо не удастся (т. к. $64=12\times5+4$). Поэтому остается подыскать пример из 12 полосок. Вот он:



Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Пример без оценки.	$+.$	17
Оценка без примера с верным ответом.	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-4 Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

Ответ: 50°.

Решение. Поскольку $\angle ABE = \angle ADE$, четырёхугольник $ABDE$ вписанный. Поскольку BCD равнобедренный с $\angle BDC = 80^\circ$, в нём $\angle CBD = \angle BCD = 50^\circ$. Значит, $\angle EBD = 190^\circ - \angle ABE - \angle CBD = 50^\circ$. Поскольку $ABDE$ вписанный, $\angle EAD = \angle EBD = 50^\circ$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Показано, что $\angle EBD = 50^\circ$, найдено равенство углов $\angle BAD = \angle BED$.	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-5 В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

Ответ: 2017.

Решение. Будем называть дорогу федеральной, если она имеет метку «Ф», даже если она при этом имеет метку «С».

Если есть две федеральные дороги без общих концов (пусть это дороги А–Б и В–Г), то федеральных дорог не более 6 (потому что все дороги, кроме дорог между городами А, Б, В, Г, обязательно имеют метку «С», а число меток равно числу дорог).

Если любые две федеральные дороги имеют общий конец, то рассмотрим две из них: А–Б и Б–В. Тогда либо есть ещё только одна федеральная дорога А–В (в таком случае федеральных дорог больше нет, т. е. их всего 3), либо все федеральные дороги имеют своим концом город Б (в таком случае федеральных дорог не более 2017).

Случай с 2017 федеральными дорогами возможен (все дороги из одного города имеют метку «Ф», все остальные дороги – метку

«С»).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Из того, что любые две федеральные дороги имеют общий конец, делается вывод, что они все имеют общий конец, то есть упущен треугольник, в остальном решение верно.	$+.$	18
Только верный пример.	$\mp$	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

7-6 Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Ответ: 15620.

Решение. Заметим, что после каждого перезакапывания число монет делится на 5. Пусть археолог нашёл n, монет, тогда $n = 5a$.

Значит, шестой пират нашёл $6a+1$, что также делится на 5, то есть $a \equiv 4 \mod (5)$. Значит, $a = 5b-1$, то есть $6a+1 = 5(6b-1)$.

Пятый нашёл $6(6b-1)+1 = 6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть $b = 5c$, $6^2b-5 = 5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй нашёл $6(6^4e-1)+1 = 6^5e-5$. При этом e делится на 5, то есть $e = 5f$, $6^5e-5 = 5(6^5f-1)$.

Первый пират нашёл 6^6f-5, но это уже не имеет значения.

Таким образом, $b = 5c = \ldots = 5^4 f$. Тогда $n = 5a = 5(5b-1) = 5^6 f - 5$. Поскольку $f \geqslant 1$, $b \geqslant 5^6 - 5 = 15620$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки.	−.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

8-1 Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

Ответ: 9.

Решение. Число делится на 6, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4 делится на 2, если и только если его последняя цифра чётная, то есть 2 или 4. Число делится на 3, тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3. В нашей ситуации такое возможно, для следующих наборов цифр:

$$\{1, 2\}, \text{ или } \{1, 2, 3\}, \text{ или } \{2, 4\}, \text{ или } \{2, 3, 4\}$$

имеем 2 варианта в первом случае, 2 варианта во втором и 4 в последнем третьем случае. Итого 9 вариантов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Верно обоснованный перебор, но в ответе упущено число.	±	15
Только ответ.	−	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

8-2 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y = (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + y \qquad (1)$$

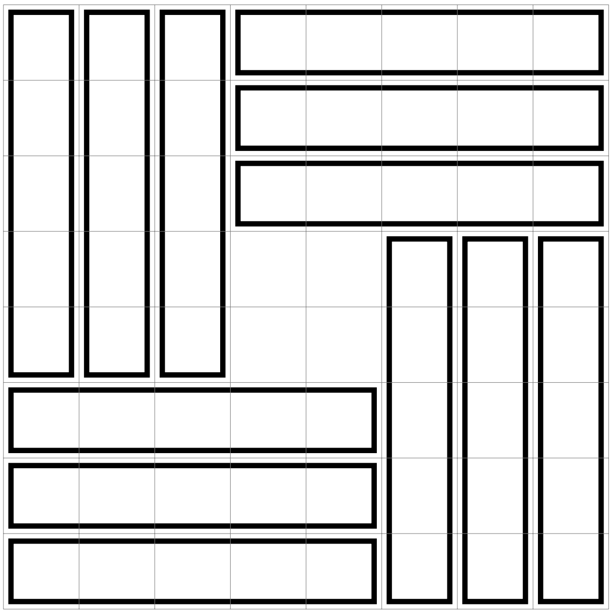
Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1, y=2, z=3$ или $x=1, y=1, z=3$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-3 Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

Ответ: 12

Решение Заметим, что больше 12 фигурок из 5 клеток в каждой поместить на клетчатую бумагу в которой всего $8\times8=64$ клетки заведомо не удастся (т. к. $64=12\times5+4$). Поэтому остается подыскать пример из 12 полосок. Вот он:



Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Пример без оценки.	$+.$	17
Оценка без примера с верным ответом.	$-.$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-4 Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

Ответ: $50°$.

Решение. Поскольку $\angle ABE = \angle ADE$, четырёхугольник $ABDE$ вписанный. Поскольку BCD равнобедренный с $\angle BDC = 80°$, в нём $\angle CBD = \angle BCD = 50°$. Значит, $\angle EBD = 190° - \angle ABE - \angle CBD = 50°$. Поскольку $ABDE$ вписанный, $\angle EAD = \angle EBD = 50°$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Показано, что $\angle EBD = 50^\circ$, найдено равенство углов $\angle BAD = \angle BED$.	$\mp$	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

8-5 В стране из 2018 городов каждая пара городов соединена одной дорогой. Власти решили присвоить каждой трассе статус «федеральной» или «социальной», и для этой цели выпустили метки «Ф» и «С» суммарным числом, равным числу дорог. Однако рабочие расставили метки неправильно: на некоторых трассах могло оказаться по одной метке обоих видов, а на некоторых могло не оказаться ни одной. (Случай, когда на каждой дороге — ровно по одной метке, также считается возможным.) Каково максимально возможное число дорог с меткой «федеральная», если для любой такой дороги на каждой, не имеющей с ней общих концов, есть метка «социальная»?

Ответ: 2017.

Решение. Будем называть дорогу федеральной, если она имеет метку «Ф», даже если она при этом имеет метку «С».

Если есть две федеральные дороги без общих концов (пусть это дороги А–Б и В–Г), то федеральных дорог не более 6 (потому что все дороги, кроме дорог между городами А, Б, В, Г, обязательно имеют метку «С», а число меток равно числу дорог).

Если любые две федеральные дороги имеют общий конец, то рассмотрим две из них: А–Б и Б–В. Тогда либо есть ещё только одна федеральная дорога А–В (в таком случае федеральных дорог больше нет, т. е. их всего 3), либо все федеральные дороги имеют своим концом город Б (в таком случае федеральных дорог не более 2017).

Случай с 2017 федеральными дорогами возможен (все дороги из одного города имеют метку «Ф», все остальные дороги – метку

«С»).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Из того, что любые две федеральные дороги имеют общий конец, делается вывод, что они все имеют общий конец, то есть упущен треугольник, в остальном решение верно.	+.	18
Только верный пример.	∓	3
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

8-6 Шесть почти честных пиратов закопали добытые золотые монеты на необитаемом острове и пустились в бега. Через год первый пират вернулся на остров, разделил все монеты на шесть равных частей, одна монета оказалась лишней. Пират забрал себе одну из частей и лишнюю монету, а остальное закопал. То же самое сделали по очереди остальные пираты, причем никто из них не знал о действиях других. Через много лет ученый археолог наткнулся на закопанные монеты. Какое наименьшее количество монет мог найти археолог?

Ответ: 15620.

Решение. Заметим, что после каждого перезакапывания число монет делится на 5. Пусть археолог нашёл n, монет, тогда $n=5a$.

Значит, шестой пират нашёл $6a+1$, что также делится на 5, то есть $a\equiv 4 \mod (5)$. Значит, $a=5b-1$, то есть $6a+1=5(6b-1)$.

Пятый нашёл $6(6b-1)+1=6^2b-5$. При этом 6^2b-5 делится на 5, откуда b делится на 5, то есть $b=5c$, $6^2b-5=5(6c^2-1)$.

Продолжая таким образом, получаем, что второй нашёл $6(6^4e-1)+1=6^5e-5$. При этом e делится на 5, то есть $e=5f$, $6^5e-5=5(6^5f-1)$.

Первый пират нашёл 6^6f-5, но это уже не имеет значения.

Таким образом, $b = 5c = \ldots = 5^4 f$. Тогда $n = 5a = 5(5b - 1) = 5^6 f - 5$. Поскольку $f \geqslant 1$, $b \geqslant 5^6 - 5 = 15620$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Есть правильная идея рассмотрения последовательных делимостей и роста степеней пятёрки.	−.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

9-1 От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

Решение. Двое выбирают одну из 6 дорог случайно, равновероятно и независимо, поэтому вероятность выборы заданной упорядоченной пары дорог равна 1/36. Возможные расстояние через час равны 0, 5км, $5\sqrt{3}$км и 10км соответственно для выбора одной дороги, двух соседних, двух, расходящихся под углом 120° и противоположных. Превышают 7 расстояния 10 и $5\sqrt{3}$ ($5\sqrt{3} > 5\sqrt{2.25} = 7.5 > 7$). Расстояние 10 получается в 6 случаях, расстояние $5\sqrt{3}$ — в 12 случаях. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{6+12}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	+	20
Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на суть решения и ответ.	+.	18
Считается, что пути обязательно различны, в остальном решение верно.	±	16
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

9-2 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

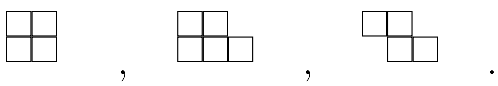
$$13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y=(2x-y)^2+(3x-z)^2+y \qquad (1)$$

Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1, y=2, z=3$ или $x=1, y=1, z=3$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Несущественные неточности в рассуждении.	$+.$	19
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-3 Имеется три типа фигурок. Тип А: квадраты 2×2. Тип В: прямоугольники 3×2, из которых вырезана одна угловая клетка. Тип С: прямоугольники 3×2, из которых вырезаны две противоположные угловые клетки:

Тип A Тип B Тип C



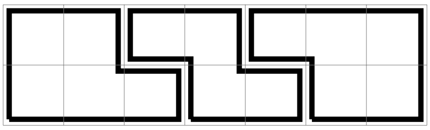
Из этих фигурок составлен прямоугольник 20×17. Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 20.

Решение. Раскрасим 17 рядов длины 20 в чёрный и белый цвет попеременно: первый ряд – чёрный, второй – белый и т.д.

Каждая фигурка типа A и каждая фигурка типа C будет всегда содержать поровну чёрных и белых клеток, а в каждой фигурке типа B количество чёрных и белых клеток должно отличается на 1. Поскольку чёрных клеток на 20 больше, чем белых, придётся взять не менее 20 фигурок типа B.

Этого количества хватит. Выкладываем прямоугольник 2×7 из двух фигурок типа B и одной фигурки типа C следующим образом:



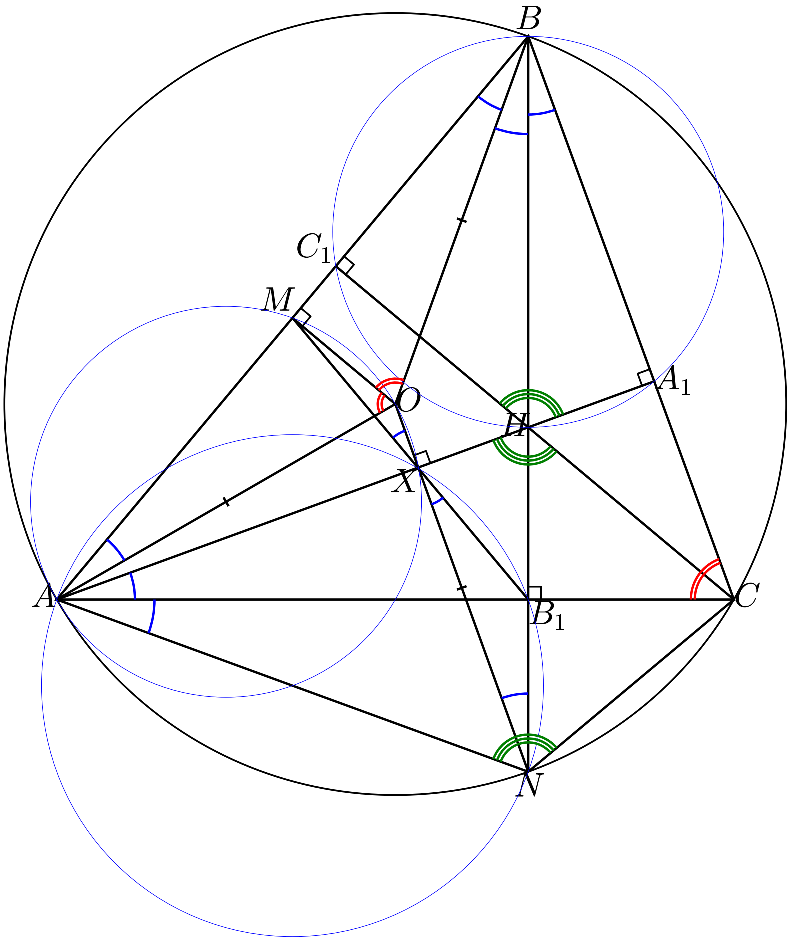
Затем составляем из таких прямоугольников полосу 20×7, на которую уйдёт 20 фигурок типа B, а оставшийся прямоугольник 10×20 составляем из квадратиков (фигур типа A).

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Доказана оценка для 20, но нет примера.	$\mp$	10
Доказана кратность ответа 4, невозможность $B = 0$ и приведён пример.	$+/2$	8
Только пример.	$\mp$	7
Доказана кратность ответа 4 и невозможность $B = 0$.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-4 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.



Имеем $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90°$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

9-5 Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

Ответ: 420.

Решение. Предположим, что число $2N$ подходящее. Пусть $2N = 2^k m$, где m нечётное. Если $k \geqslant 2$, то условие говорит, что $2^k m$ делится на $2^{k-1}m - m = m(2^{k-1} - 1)$, что возможно только при условии $k = 2$. Если $k = 1$ и $m = ps$, где p минимальный простой нечетный делитель m, то $2ps$ делится на $2s - ps = (2 - p)s$, откуда имеем $p - 2|p$, значит $p = 3$. Число N или имеет остаток 2 по модулю 4 или имеет остаток 3 по модулю 6. Тем самым число $2N$ является подходящим, если число N может иметь остаток 2, 3, 6, 9, 10 по модулю 12. Это значит, что в каждом ряду из 12 последовательных четных чисел ровно пять подходящих. Используя равенство $2018 = 2 \cdot (12 \cdot 84 + 1)$, получаем ответ $420 = 5 \cdot 84$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	+	20
Доказана кратность только 2 или 4, полностью рассмотрен случай 4.	±	13
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	−/0	0
Максимальный балл	20	

9-6 Из натурального числа n разрешается получить либо число $2n+1$, либо число $3n+2$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа от 1 до 2017, совместимые с числом 2018.

Ответ: 672, 1345.

Решение. Обозначив две указанные операции через D и T, то есть: $D\colon n \mapsto 2n+1$, $T\colon n \mapsto 3n+2$. Легко видеть, что операции перестановочны $D(T(n)) = T(D(n))$ и значет и многократно перестановочны $D^m(T^k(n)) = T^k(D^m(n))$. Докажем, что верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в виде следующей, ключевой в решении задачи, леммы:

Лемма. Если $D^m(b) = T^k(c)$, то найдётся такое d, что $b = T^k(d))$ и $c = D^m(d)$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что лемма очевидна для $m=1$. В самом деле, процедура T не меняет чётность числа, поэтому $c = 2d+1$. Это число d и нужно взять: $D(T^k(d)) = T^k(c) = D(b)$, откуда $b = T^k(d)$. Далее будем вести индукцию по m. Пусть $D^{m+1}(b) = T^k(c)$. Тогда снова $c = 2d+1$ и $D^m(b) = T^k(d)$. По предположению индукции найдётся такое число e, что $b = T^k(e))$ и $d = D^m(e)$. Тогда $D^{m+1}(e) = c$ и $b = T^k(e))$, что и требовалось. $\square$

Далее мы воспользуемся фактом, что операции D и T обратимы, то есть: если $D(a) = D(b)$, то $a = b$; если $T(a) = T(b)$, то $a = b$. Пусть число s совместимо с числом 2018. Тогда в силу указанных свойств операций (перестановочность и обратимость) можно считать, что одно и тоже число получается применением к s некоторого количество операций одного типа и применением к 2018 некоторого количества операций другого типа. Воспользуемся леммой. Поскольку 2018 можно получить только с помощью операции T, получаем: найдётся такое d, что $2018 = T^k(d)$ и $s = D^m(d)$. Но из первого равенства сразу вытекает, что $k = 1$ и $d = 672$. Но уже двукратное применение к числу 672 операции D выводит это число за границы отрезка [1; 2017]. Значит, $m = 1$ и $s = 1345$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Решение полностью верно, однако одно из чисел упущено.	$+.$	18
Получен общий вид совместимого с заданным.	$\pm$	12
Не рассмотрены случаи более двух операций.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько частных случаев.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

10-1 Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение $13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y$.

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что

$$13x^2+y^2+z^2-4xy-6xz+y=(2x-y)^2+(3x-z)^2+y \qquad (1)$$

Поскольку квадрат целого числа всегда неотрицательное число, он достигает минимума, когда равен 0. Натуральное число y не меньше 1. Если же $y=1$, то число $(2x-y)$ — нечётное и его квадрат также не меньше 1. Поэтому выражение (1) не меньше 2 для любых натуральных x, y, z. Значение 2 может быть достигнуто несколькими способами, например, $x=1, y=2, z=3$ или $x=1, y=1, z=3$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Несущественные неточности в рассуждении.	$+.$	19
Оценка без примера.	$\pm$	10
Только пример.	$\mp$	4
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-2 Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k>0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k-1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

Решение. Докажем, что дорасставить требуемым образом фонари можно.

Разделим синие фонари на два вида — освещённые другими и нет. Пусть неосвещённые имеют координаты $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Все x-координаты различны, так как иначе бы какой-то из фонарей освещал бы какой-то другой. Тогда можно считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда $y_1 > \ldots > y_n$, так как иначе бы какой-то из этих фонарей освещал бы какой-то другой.

Расставим красные фонари в точки $(x_1, y_2), (x_2, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_n)$, а также во все точки, где стоят освещённые другими синими фонарями синие фонари.

Рассмотрим производную точку плоскости. Если она не освещалась ни одним синим фонарём, то не будет освещаться ни одним красным. Если она освещается хотя бы одним синим, то освещается хотя бы одним синим, который не освещается другими синими. Тогда для выбранной точки

- количество синих, освещённых другими синими и освещающих данную точку, сохранится;
- количество синих, не освещённых другими синими и освещающих данную точку, уменьшится на 1.

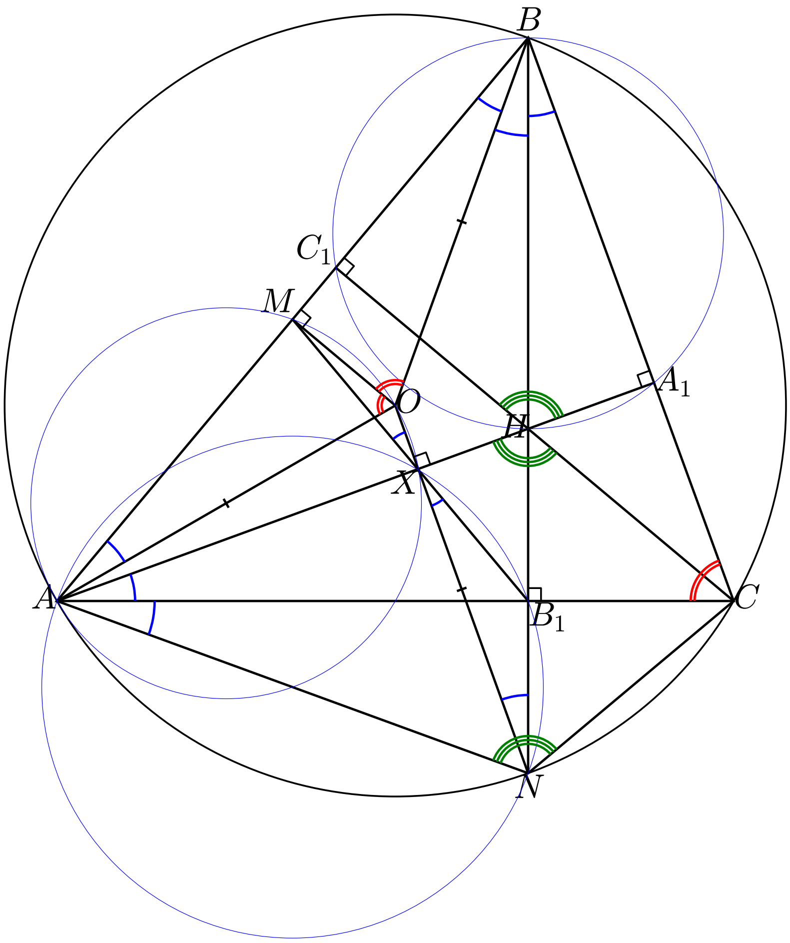
Таким образом, найденная нами расстановка является требуемой. *На самом деле данная расстановка является единственной.*

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	19
Приведён правильный алгоритм расстановки, но не доказано, почему он работает.	$\pm$	17
Присутствует идея деления синих на освещённые и нет.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько (>1) частных случаев, для которых решение построено.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-3 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.

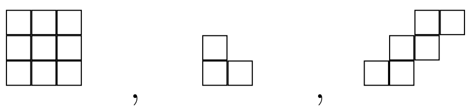


Имеем $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90^\circ$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-4 Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:

Тип A Тип B Тип C

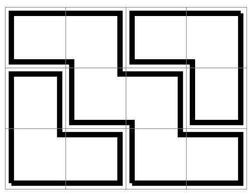


(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

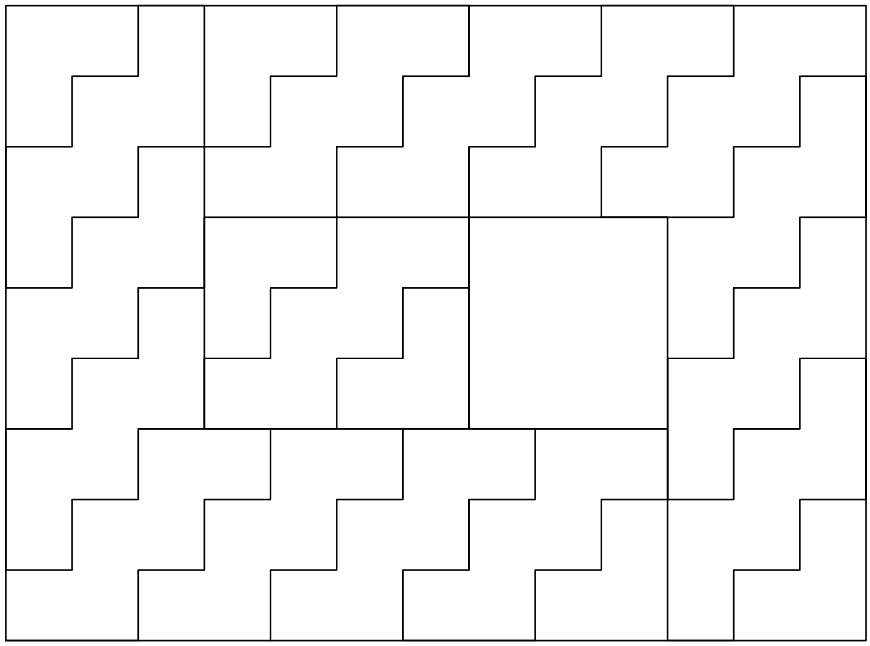
Ответ: 6.

Решение.

Построим пример с 6-ю фигурками типа B. Сначала из двух фигурок типа B и одной фигурки типа C смастерим прямоугольник 3×4, поставив фигурки типа B в противоположные углы:



Впрочем, правильных разрезаний достаточно много, например, разрезание на рисунке ниже.



Далее прямоугольник 9×13 можно разрезать параллельной сеткой на 3 прямоугольника 3×4 (в каждом по 2 фигурки типа B) и $3 * 3 = 9$ квадратов 3×3.

Докажем, что меньше 6 фигурок типа B использовать не получиться. Раскрасим столбцы прямоугольника 13×9 в три цвета: белый, синий и красный, параллельно стороне 13. Красных и синих клеток будет одинаковое количество, а вот белых клеток будет на 9 больше. Фигурки типа A и типа C имеют всегда одинаковое количество клеток каждого цвета. Фигурка типа B может иметь на две клетки одного цвета больше, чем любого другого цвета. Поэтому, замощениями фигурками прямоугольника 13×9 должно быть использовано не менее, чем $[9/2] = 5$ фигурок типа B. Покажем, что и 5 фигурок типа B будет недостаточно. Действительно, ведь если бы это было так, то среди 15 клеток покрытых фигурками типа B имелось бы одинаковое количество клеток синего и красного цвета и на 9 клеток больше белого цвета, такое возможно, если белых клеток будет 11, а синих и красных по 2. Но в таком случае одна из 5 фигурок типа B должна быть покрашена целиком в белый цвет, чего невозможно.

10-5 Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

Ответ: числа вида $2019^{2^n 3^k} - 1$ для неотрицательных целых k и n.

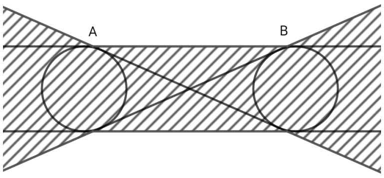
Решение. Сделаем замену $k = n+1$ и будем считать, что мы преобразуем число k, которое может принимать значения натуральных чисел, кроме единицы. Замена $n \mapsto n^2 + 2n$ для k соответствует замене $f_1\colon k = n+1 \mapsto n^2 + 2n + 1 = k^2$. Вторая замена соответствует $f_2\colon k \mapsto k^3$. Заметим, что для любого k верно $f_1(f_2(k)) = f_2(f_1(k))$. Таким образом, если мы применяем несколько раз операции f_1 и f_2 к числу k, неважен порядок, а важно только количество операций.

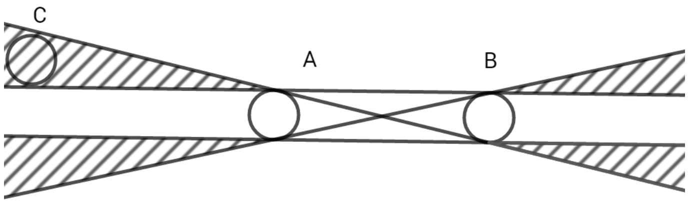
Допустим, числа k_1 и k_2 эквивалентны. Тогда применением операций к одному и другому числам несколько раз можно получить одно и то же число, то есть $k_1^{2^{l_1} 3^{m_1}} = k_2^{2^{l_2} 3^{m_2}}$. Таким образом, все натуральные числа, эквивалентные заданному k, имеют вид $k^{2^{q_1} 3^{q_2}}$ для рациональных q_1, q_2. Соответственно, для $n = 2018$ все совместимые с ним числа будут иметь вид $2019^{2^{q_1} 3^{q_2}} - 1$. Число $2019 = 3 \cdot 673$ не является степенью натурального числа выше первой. Таким образом, рациональные числа q_1 и q_2 должны быть целыми, для любых целых q_1 и q_2 мы получаем совместимые с 2018.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности. Или не сказано, почему 2018 не получается с помощью данных операций из других чисел	$+.$	19
Верно указано, какие числа можно получить из 2018, но не доказано, что других совместимых нет.	$\mp$	4
Присутствует идея замены $k=n+1$ и далее итерирования операций возведения в степень.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

10-6 На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.

Решение. Начнем со следующего **наблюдения**: *если даны два непересекающихся круга одинакового радиуса, то всевозможные прямые, пересекающие оба круга, заметают область, заштрихованную на рисунке слева.* Эта область — объединение полосы между двумя внешними касательными к кругам и пары вертикальных углов между двумя внутренними касательными. Поэтому два данных круга A и B и некоторый третий круг C можно пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда C имеет общие точки с заштрихованной областью. Будем называть эту область *тенью* кругов A и B.





Перейдем к решению задачи. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1: любые 3 круга из заданного набора можно пересечь одной прямой. Тогда рассмотрим два круга A и B из набора, расстояние между центрами которых наибольшее. Если это расстояние меньше диаметра кругов, то прямая, проходящая через 2 общих точки граничных окружностей кругов A и B — искомая (любой круг C из набора обязан ее пересекать, иначе расстояние между центрами кругов A и C — либо B и C — окажется больше расстояния между центрами кругов A и B, что противоречило бы выбору кругов A и B). Поэтому будем считать, что расстояние между центрами кругов A и B больше диаметра, то есть эти круги не пересекаются.

Докажем, что тогда 4 общих касательных к A и B — искомые прямые, т.е. пересекают любой круг C из набора. Действительно, по предположению случая 1, круги A, B, C можно пересечь одной прямой. Тогда C должен пересекать тень A и B. Если бы C не пересекал ни одну из 4 общих касательных к A и B, то C целиком лежал бы в одном из 4 углов, заштрихованных на рисунке справа. Но тогда расстояние между центрами кругов A и C (либо B и C) было бы больше расстояния между центрами кругов A и B, так как центры трех кругов образуют тупоугольный треугольник. А это противоречило бы выбору кругов A и B. Значит, все круги набора можно пересечь 4 прямыми.

Случай 2: найдутся 3 круга из заданного набора, которые нельзя пересечь одной прямой. Тогда рассмотрим три таких круга A, B, C, центры которых образуют треугольник наибольшей площади. Докажем, что тогда 12 прямых — 4 общих касательных к A и B, 4 общих касательных к B и C, 4 общих касательных к C и A — искомые.

Предположим, что нашелся круг D из набора, не пересекающий ни одну из 12 касательных. По условию задачи, какие-то 3 из кругов A, B, C, D можно пересечь прямой. Пусть, без ограничения общности, это круги A, B, D. Тогда согласно наблюдению выше, D целиком лежит в одном из углов, заштрихованных на рисунке справа. Пусть, без ограничения общности, это "верхний" из углов, примыкающих к кругу A. С другой стороны, A, B, C нельзя пересечь прямой, значит, C целиком лежит вне тени A и B. Рассмотрим различные варианты расположения круга C.

Случай 2a: центры кругов C и D лежат в разных полуплоскостях относительно линии центров кругов A и B. Тогда центр круга A оказывается внутри треугольника с вершинами в центрах кругов B, C, D. При этом круги B, C, D также нельзя пересечь одной прямой: тень B и D расположена целиком "выше" нижней границы тени A и B, и не может пересечь круг C. Итак, мы получили 3 круга B, C, D, которые нельзя пересечь прямой, центры которых образуют треугольник большей площади, чем A, B, C. Это противоречит выбору кругов A, B, C.

Случай 2b: центры кругов C и D лежат в одной полуплоскости относительно линии центров кругов A и B, причем B и D лежат в одной полуплоскости относительно одной из общих внутренних касательных к B и C. Докажем, что в этом случае круги B, C, D нельзя пересечь прямой, а их центры снова образуют треугольник большей площади, чем A, B, C — тем самым снова придем к противоречию. Так как B и D лежат в одной полуплоскости относительно одной из общих внутренних касательных к B и C, то D не пересекает тень B и C, значит, B, C, D нельзя пересечь прямой. Треугольники с вершинами в центрах кругов A, B, C и B, C, D имеют общее основание BC, а высота больше у второго треугольника. Значит, последний имеет большую площадь. И в случае 2b мы пришли к противоречию.

Случай 2c: центры кругов C и D лежат в одной полуплоскости относительно линии центров кругов A и B, причем B и D лежат в разных полуплоскостях относительно обеих общих внутренних касательных к B и C. Докажем, что на этот раз круги A, C, D

нельзя пересечь прямой, и уже их центры образуют треугольник большей площади, чем A, B, C. Первое утверждение следует из того, что D лежит вне тени A и C. Для доказательства второго утверждения проведем внутренюю касательную к A и B, которая разделяет C и D, а также внутренюю касательную к B и C, которая разделяет D и A. Будем катить круги A и C по своим касательным в сторону круга D до тех пор, пока они не коснутся обеих проведенных прямых одновременно. Будем двигать D в сторону B, пока он также не коснется обеих проведенных прямых. Ясно, что в процессе движение площадь треугольника A, B, C увеличивается, а A, C, D — уменьшается. А в конечном положении эти площади становятся равными, из симметрии. Значит, в исходном расположении центры кругов A, C, D образуют треугольник большей площади, чем A, B, C.

Итак, во всех случаях 2a–2c мы пришли к противоречию. Значит, любой круг D из набора пересекает хотя бы одну из указанных 12 прямых.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Разобран случай, когда любые три можно пересечь прямой.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

Решения и критерии оценивания заданий олимпиады

11-1 От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

Решение. Двое выбирают одну из 6 дорог случайно, равновероятно и независимо, поэтому вероятность выборы заданной упорядоченной пары дорог равна 1/36. Возможные расстояние через час равны 0, 5км, $5\sqrt{3}$км и 10км соответственно для выбора одной дороги, двух соседних, двух, расходящихся под углом 120° и противоположных. Превышают 7 расстояния 10 и $5\sqrt{3}$ ($5\sqrt{3} > 5\sqrt{2.25} = 7.5 > 7$). Расстояние 10 получается в 6 случаях, расстояние $5\sqrt{3}$ — в 12 случаях. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{6+12}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущена арифметическая ошибка, не влияющая на суть решения и ответ.	$+.$	18
Считается, что пути обязательно различны, в остальном решение верно.	$\pm$	16
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-2 Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей, так что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению).

Решение. Докажем, что дорасставить требуемым образом фонари можно.

Разделим синие фонари на два вида — освещённые другими и нет. Пусть неосвещённые имеют координаты (x_1, y_1), …, (x_n, y_n). Все x-координаты различны, так как иначе бы какой-то из фонарей освещал бы какой-то другой. Тогда можно считать, что $x_1 < \ldots < x_n$. Тогда $y_1 > \ldots > y_n$, так как иначе бы какой-то из этих фонарей освещал бы какой-то другой.

Расставим красные фонари в точки $(x_1, y_2), (x_2, y_3), \ldots, (x_{n-1}, y_n)$, а также во все точки, где стоят освещённые другими синими фонарями синие фонари.

Рассмотрим производную точку плоскости. Если она не освещалась ни одним синим фонарём, то не будет освещаться ни одним красным. Если она освещается хотя бы одним синим, то освещается хотя бы одним синим, который не освещается другими синими. Тогда для выбранной точки

- количество синих, освещённых другими синими и освещающих данную точку, сохранится;
- количество синих, не освещённых другими синими и освещающих данную точку, уменьшится на 1.

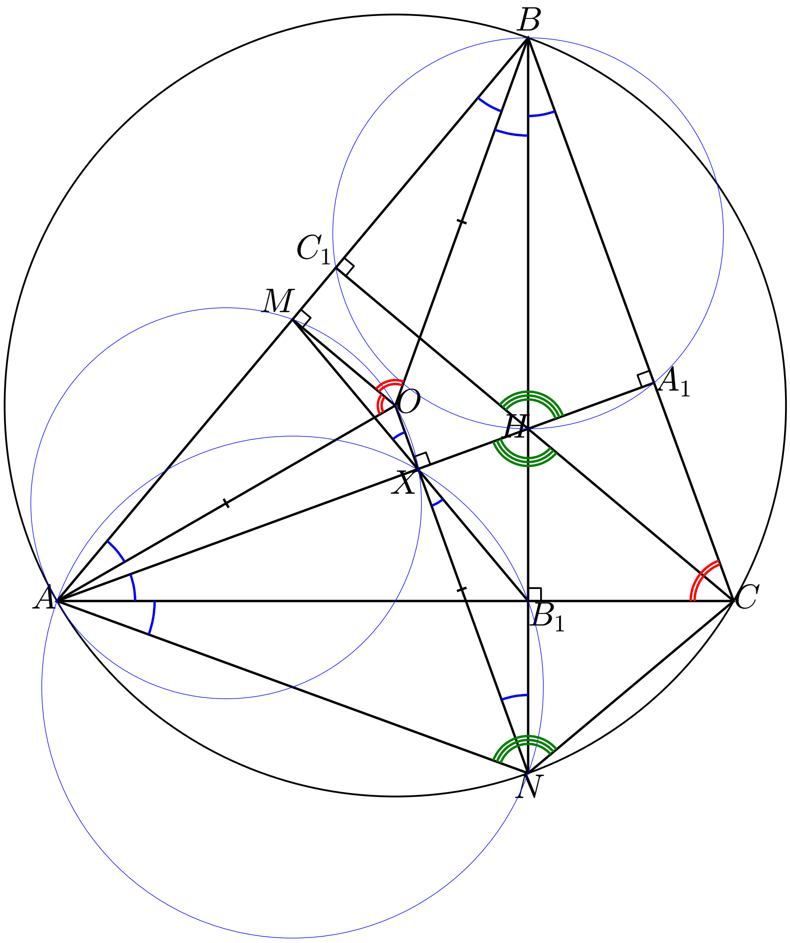
Таким образом, найденная нами расстановка является требуемой. *На самом деле данная расстановка является единственной.*

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	19
Приведён правильный алгоритм расстановки, но не доказано, почему он работает.	$\pm$	17
Присутствует идея деления синих на освещённые и нет.	$\mp$	3
Рассмотрено несколько (>1) частных случаев, для которых решение построено.	$-.$	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-3 Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку дано равенство углов $\angle OBN = \angle NBC$, имеет место один из двух случаев:

- они равны как ориентированные углы, то есть N и C по разные стороны от OB,
- они противоположны как ориентированные углы, то есть N и C по одну сторону от OB. Тогда O лежит на BC, откуда угол $\angle A$ прямой. В этом случае $A = B' = N$, и пересечение прямых AA', MB', ON тривиально. Далее этот случай мы рассматривать не будем.



Имеем $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = \angle CBN = \angle NBO =: \alpha$. Поскольку O — центр окружности, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, откуда $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$, аналогично $\angle ONB = \alpha$ (равнобедренный треугольник $\triangle OBN$). Как легко убедиться, H и N симметричны относительно AC ($HN \perp AC$ и $\angle ANC = 180^\circ - \angle B = \angle A_1HC_1 = \angle AHC$, так как BA_1HC_1 вписанный), так что $\angle CAN = \alpha$. Обозначим через X точку пересечения ON и AA_1. Докажем, что через неё проходит также и MB_1. Поскольку $\angle XAB_1 = \angle XNB_1$, четырёхугольник AXB_1N вписанный, а тогда $\angle AXN$ прямой и $\angle NXB_1 = \alpha$. Поскольку $\angle AMO = \angle AXO = 90^\circ$, четырёхугольник $AMOX$ вписанный, а тогда $\angle MAO = \angle MXO = \alpha$. Это означает, что точки M, X, B_1 лежат на одной прямой.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
В доказательстве упущен нетривиальный существенный факт.	$\pm$	14
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-4 В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

Ответ: n.

Решение. Докажем, что можно обойтись n неправильными попаданиями в очередь. Допустим, мудрецы не меняются вообще, и тогда в неправильную очередь попадает k гномиков. Если мудрецы поменялись бы колпаками в самом начале, то в неправильной очереди оказались бы в точности все остальные, то есть $2n-k$. Минимум из $2n-k$ и k не превосходит n.

Покажем, что существует изначальная расстановка, при которой получится не меньше n попаданий в неправильную очередь. Допустим, все гномики выстроились в очередь к белому мудрецу, при этом сначала все чёрные. Если белый мудрец не перенаправит всех чёрных, он будет вынужден до этого поменяться колпаками с коллегой, после чего ему придётся перенаправить всех белых, то есть в любом случае минимум n.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	18
Приведён и обоснован пример, когда n переходов обязательны.	$\pm$	14
Приведён пример с неточностями в обосновании либо с неточным ответом. Или доказано, что можно за n, рассмотрены «наихудшие» случаи для n (верные, но не обоснованные).	$+/2$	7
Доказано, что можно обойтись не более чем n переходами (например, возможность поменяться сначала или не меняться вовсе).	$\mp$	4
Только ответ.	$-$	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-5 Из натурального числа n разрешается получить либо число n^2+2n, либо число n^3+3n^2+3n. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

Ответ: числа вида $2019^{2^n3^k}-1$ для неотрицательных целых k и n.

Решение. Сделаем замену $k=n+1$ и будем считать, что мы преобразуем число k, которое может принимать значения натуральных чисел, кроме единицы. Замена $n\mapsto n^2+2n$ для k соответствует замене $f_1\colon k=n+1\mapsto n^2+2n+1=k^2$. Вторая замена соответствует $f_2\colon k\mapsto k^3$. Заметим, что для любого k верно $f_1(f_2(k))=f_2(f_1(k))$. Таким образом, если мы применяем несколько раз операции f_1 и f_2 к числу k, неважен порядок, а важно только количество операций.

Допустим, числа k_1 и k_2 эквивалентны. Тогда применением операций к одному и другому числам несколько раз можно получить одно и то же число, то есть $k_1^{2^{l_1}3^{m_1}} = k_2^{2^{l_2}3^{m_2}}$. Таким образом, все натуральные числа, эквивалентные заданному k, имеют вид $k^{2^{q_1}3^{q_2}}$ для рациональных q_1, q_2. Соответственно, для $n = 2018$ все совместимые с ним числа будут иметь вид $2019^{2^{q_1}3^{q_2}} - 1$. Число $2019 = 3 \cdot 673$ не является степенью натурального числа выше первой. Таким образом, рациональные числа q_1 и q_2 должны быть целыми, для любых целых q_1 и q_2 мы получаем совместимые с 2018.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности. Или не сказано, почему 2018 не получается с помощью данных операций из других чисел	$+.$	19
Верно указано, какие числа можно получить из 2018, но не доказано, что других совместимых нет.	$\mp$	4
Присутствует идея замены $k = n + 1$ и далее итерирования операций возведения в степень.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	

11-6 В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка *лежит внутри выпуклой оболочки* других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)

Ответ: нет, так оказаться не могло.

Решение. Всего у нас три координаты, по каждой есть минимум и максимум, которые различны, так как проекции не лежат на одной прямой. Тогда по принципу Дирихле для некоторой из точек какие-то две координаты принимают значения минимума или максимума. Тогда проекция этой точки на любую координатную плоскость имеет как минимум одну из координат минимальной или максимальной, откуда точка не может быть внутри выпуклой оболочки других точек.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Приведено полное доказательство	$+$	20
Допущены мелкие неточности.	$+.$	18
Доказано, что существует точка, у которой пара координат максимальна/минимальна, сказано (не обосновано), что отсюда проекция точки не может быть внутри выпуклой оболочки прочих.	$\pm$	12
Доказано, что существует точка, у которой пара координат максимальна/минимальна.	$\mp$	8
Рассмотрены комбинаторные конфигурации проекций, разобрано, какие из них подходят.	$-.$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	$-/0$	0
Максимальный балл	20	