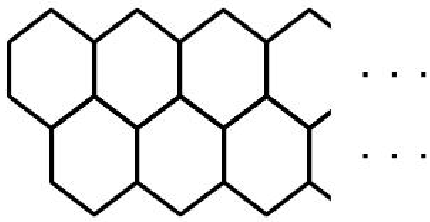
Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 7-1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу. Сколько шестиугольников у него получится?



Ответ: 504.

Решение. Будем считать, что Вася работает по следующей схеме. Сначала выкладывает крайний левый шестиугольник, а потом подклеивает пару шестиугольников к имеющимся. Тогда после выкладывания k-й пары будет потрачено $6+9+8(k-1) = 8k+7$ спичек. Таким образом, он сможет использовать 2015 спичек, сделав при этом 503 шестиугольника. А из оставшихся четырёх спичек он сделает 504-й шестиугольник. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	15	Арифметическая ошибка
+/−	10	Решение верное, но в ответе забыто, что за неизвестную взято 2 шестиугольника
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-2. Двадцать шесть целых чисел $a, b, c, \dots, z$ подобраны таким образом, что $(1+ab)(1+abc)\dots(1+abc\dots z) = 0$. Докажите, что $(a+b)(a+bc)\dots(a+bc\dots z) = 0$.

Решение. Раз первое произведение равно нулю, равен нулю один из сомножителей. Так как все числа целые, это означает, что в какой-то группе $a, b, c, \dots, x$ все числа равны ± 1, причём чисел -1 в этой группе нечетное число. Но тогда в сумме $a + bc \ldots x$ одно слагаемое равно 1, а второе -1. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	В конце доказательства рассмотрен только случай $a = 1$, $bcd... = -1$
+/2	10	Хорошее доказательство для частного случая и плохо обоснованный переход от частного к общему
−/+	6	Доказано только для частного случая
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-3. Посередине между пунктами и находится кофейня . Из пункта в пункт сначала выехал велосипедист. Когда он был на половине пути к кофейне, из выехал автомобилист. Известно, что когда автомобилист доехал до кофейни , велосипедист еще был в пути между и , причём расстояние от него до автомобилиста в этот момент было вдвое меньше, чем в тот момент, когда автомобилист только выехал из A. Какое событие произойдёт раньше: велосипедист доедет до или автомобилист — до ?

Ответ: одновременно.

Решение. Примем расстояние AC за 1. Когда автомобилист выехал из , велосипедист был в точке $1/2$, когда добрался до — в точке $3/4$. Значит, скорость автомобиля вчетверо больше скорости велосипеда. При этом, в этот момент расстояние между велосипедистом и было вчетверо меньше расстояния между автомобилистом и . Таким образом, ровно в момент, когда велосипедист окажется в , автомобилист доберется до . □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Есть значительное продвижение, но задача не доведена до ответа
+/2	10	Наличие правильного и неправильного решения
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-4. В треугольнике ABC, в котором все три стороны попарно различны, проведены биссектрисы углов A и B, делящие его на четырехугольник и три треугольника, два из которых равнобедренные. Найдите углы исходного треугольника.

Ответ: $4\pi/7, 2\pi/7, \pi/7$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы AK и BL пересекаются в точке O, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Треугольник ABO равнобедренным быть не может, так как не может выполняться ни одно из следующих условий: $\alpha = \beta, \alpha + \beta/2 = 180°, \beta + \alpha/2 = 180°$. Найдём, при каком условии будет равнобедренным треугольник ALO. Равенство $\angle LAO = \angle LOA$ невозможно, поскольку $\angle LAO = \angle BAO$, а прямые BL и AB параллельными не являются. Равенство $\angle LAO = \angle LOA$ эквивалентно равенству $\beta + 3\alpha/2 = 180°$. Аналогично равенство $\angle LAO = \angle ALO$ эквивалентно равенству $\beta + 3\alpha = 360°$. Тогда в силу условия задачи выполняется одна из следующих пар равенств:

$$\beta + 3\alpha/2 = 180°, \quad \alpha + 3\beta/2 = 180°;$$

$$\beta + 3\alpha = 360°, \quad \alpha + 3\beta = 360°;$$

$$\beta + 3\alpha/2 = 180°, \quad \alpha + 3\beta = 360°;$$

$$\beta + 3\alpha = 360°, \quad \alpha + 3\beta/2 = 180°.$$

Но первая пара равенств не может выполняться одновременно, так как $\alpha \neq \beta$. А вторая пара равенств не может выполняться, так как $\alpha + \beta \neq 180°$. Третья и четвёртая пара равенств как раз и приводит к указанному ответу. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	18	Полностью верное решение, но допущена арифметическая ошибка или мелкий недочет
+/−	15	Доказана равнобедренность, но не все уравнения составлены правильно, из-за чего не все углы найдены правильно
+/2	10	Не доказана равнобедренность, но уравнения и ответ являются правильными
−/+	6	Не доказана равнобедренность, но получены правильные уравнения
−.	4	Доказано, что центральный треугольник не равнобедренный
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-5. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

Ответ: 3.

Решение. За три вопроса можно получить ответ следующим образом. Первые два вопроса про черепах 1 и 2, про 2 и 3. Если хотя бы один из ответов 0 или 2, про соответствующую пару знаем, кто они, про оставшуюся из трёх знаем из другого вопроса, остался 1 вопрос на 4-ю черепашку. Если оба ответа 1, то черепашки 1 и 3 одного пола. Тогда спросим про 1, 3, 4. Мы услышим ответ не меньше 2, если черепашки 1 и 3 были самцами, и ответ не больше 1 иначе. При этом пол черепашки 4 также однозначно восстанавливается, и остается одним вопросом выяснить пол черепашки 2.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Прежде всего заметим, что: а) за один вопрос, не зная общего числа самцов, мы не сможем разобраться даже с двумя черепашками; б) зная общее число самцов, мы сможем разобраться с двумя, но не сможем разобраться с тремя черепашками. Поэтому в ситуации четырёх черепашек и двух вопросов задавать первый вопрос про всех черепашек сразу или про одну черепашку бессмысленно. Поскольку при вопросе про группу из трёх или двух черепашек мы можем услышать ответ 1, такой вопрос также не приведёт к успеху. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Верный ответ, но не доказано, что меньше быть не может
+/2	10	Верный ответ с мелкими недочетами в решении и не доказано, что меньше быть не может
−.	4	Попытка проанализировать случаи с 2 и 3 вопросами, но сделан неверный вывод, что минимальное число — 4
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 7-6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

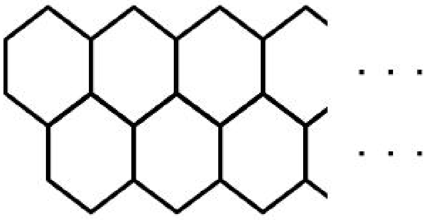
Ответ: да.

Решение. Возьмём набор монет A суммарной стоимостью 51 тугрик. Докажем, что A состоит из одной монеты стоимостью 51 тугрик. Тогда останется прибавить ее к набору в 49 тугриков. Пусть k тугриков — стоимость самой дешевой монеты набора A. Если $k < 51$, то найдется набор монет В суммарной стоимостью $k-1$ тугрик. Ясно, что все монеты набора B дешевле k тугриков, поэтому все они не входят в набор A. Уберем из набора A одну монету стоимостью k тугриков и добавим туда все монеты набора B. Таким образом, мы набрали ровно 50 тугриков, противоречие. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Догадка, что существует монета в 51 тугрик, но нестрогое обоснование ответа
+/2	8	Догадка, что существует монета в 51 тугрик, но ответ не обоснован
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 8-1. У Васи есть 2019 спичек. Он выкладывает из них в два ряда шестиугольники, примыкающие друг к другу. Сколько шестиугольников у него получится?



Ответ: 504.

Решение. Будем считать, что Вася работает по следующей схеме. Сначала выкладывает крайний левый шестиугольник, а потом подклеивает пару шестиугольников к имеющимся. Тогда после выкладывания k-й пары будет потрачено $6+9+8(k-1) = 8k+7$ спичек. Таким образом, он сможет использовать 2015 спичек, сделав при этом 503 шестиугольника. А из оставшихся четырёх спичек он сделает 504-й шестиугольник. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+.	18	Арифметическая ошибка, не влияющая на решение
+/−	14	Решение верное, но в ответе забыто, что за неизвестную взято 2 шестиугольника. Незначительная ошибка в рассуждениях
+/2	10	При правильном ответе пробелы в решении
−/+	6	Множественные арифметические ошибки
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-2. Вычислите сумму $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2$.

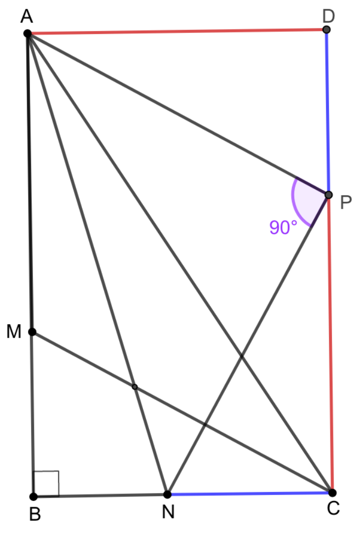
Ответ: 4074341.

Решение. Заметим, что при любом k верно равенство $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$. Поэтому вся сумма равна $1+504\cdot 4+2018^2=4074341$. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Решение верное, но присутствуют недочёты, не влияющие на решение или не досчитано до конечного числа
+/−	17	Арифметическая ошибка при правильных рассуждениях
+/2	12	Правильная идея с ошибками
−/+	8	Описание метода подстчета без самого подсчета или множественные ошибки
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM=BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN=MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

Ответ: $45°$.



Решение. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$ и выберем на его стороне CD точку P так, что AP параллельно CM. Тогда $PC=AD, DP=CN$, и прямоугольные треугольники ADP и CPN равны, причём $\angle DAP=\angle CPN$. Поэтому $\angle APD+\angle CPN=90°$ и

$\angle APN = 90^\circ$, то есть APN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle PAN = 45^\circ$ и, в силу параллельности прямых AP и CM, острый угол между прямыми AN и CM тоже составляет 45 градусов. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-4. У оракула в саду живут четыре черепашки. Посетитель может за ход выбирать любое подмножество черепашек и спрашивать оракула, сколько среди этих черепашек самцов (ответы оракула всегда правдивы). За какое наименьшее количество ходов можно узнать про всех черепах, какого они пола?

Ответ: 3.

Решение. За три вопроса можно получить ответ следующим образом. Первые два вопроса про черепах 1 и 2, про 2 и 3. Если хотя бы один из ответов 0 или 2, про соответствующую пару знаем, кто они, про оставшуюся из трёх знаем из другого вопроса, остался 1 вопрос на 4-ю черепашку. Если оба ответа 1, то черепашки 1 и 3 одного пола. Тогда спросим про 1, 3, 4. Мы услышим ответ не меньше 2, если черепашки 1 и 3 были самцами, и ответ не больше 1 иначе. При этом пол черепашки 4 также однозначно восстанавливается, и остается одним вопросом выяснить пол черепашки 2.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Прежде всего заметим, что: а) за один вопрос, не зная общего числа самцов, мы не сможем разобраться даже с двумя черепашками; б) зная общее число самцов, мы сможем разобраться с двумя, но не сможем разобраться с тремя черепашками. Поэтому в ситуации четырёх черепашек и двух вопросов задавать первый вопрос про всех черепашек сразу или про одну черепашку бессмысленно. Поскольку при вопросе про группу из трёх или двух черепашек мы можем услышать ответ 1, такой вопрос также не приведёт к успеху. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+/−	14	Верный ответ, но не доказано, что меньше быть не может
+/2	10	Верный ответ с мелкими недочетами в решении и не доказано, что меньше быть не может
−.	4	Попытка проанализировать случаи с 2 и 3 вопросами, но сделан неверный вывод, что минимальное число — 4
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-5.

8-5. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

Ответ: 12 (2, 3, 4, 6).

Решение. Имеет место один из двух случаев.

А) Пусть оба наименьших делителя p и q — простые числа. Тогда простым будет число $r = (n/p + n/q) - (p + q)$, и $pqr = (p + q)(n - pq)$. Поскольку числа $p + q$ и pq взаимно просты, получаем $r = p + q$, откуда $p = 2$ и $n = 4q$. Но тогда в силу выбора q получаем $q = 3$ и $n = 12$.

Б) Пусть наименьшие делители имеют вид p и p^2, где p простое. Этот случай разбирается аналогично. □

Замечание. Возможна ситуация, когда число имеет всего три собственных делителя. Тогда упомянутая в условии разность есть разность между наибольшим и наименьшим из собственных делителей. Но любое число с тремя собственными делителями есть степень простого p^4, а разность $p^3 - p$ простым числом быть не может.

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные ошибки
+/2	10	Значительные пробелы в решении
−.	6	Есть идея, что $pnq = (p+q)(n-pq)$
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 8-6. Имеется несколько монет, каждая стоит целое число тугриков. Известно, что этими монетами можно набрать любую другую сумму от 1 до 51 тугрика включительно, кроме суммы в 50 тугриков. Обязательно ли этими монетами можно набрать сумму ровно в 100 тугриков?

Ответ: да.

Решение. Возьмём набор монет A суммарной стоимостью 51 тугрик. Докажем, что A состоит из одной монеты стоимостью 51 тугрик. Тогда останется прибавить ее к набору в 49 тугриков. Пусть k тугриков — стоимость самой дешевой монеты набора A. Если $k < 51$, то найдется набор монет В суммарной стоимостью $k-1$ тугрик. Ясно, что все монеты набора B дешевле k тугриков, поэтому все они не входят в набор A. Уберем из набора A одну монету стоимостью k тугриков и добавим туда все монеты набора B. Таким образом, мы набрали ровно 50 тугриков, противоречие. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+/−	14	Доказано, что можно. Приведён конкретный пример, но не в общем случае или незначительные пробелы в доказательстве
−/+	10	Идея о монете в 51 тугрик
−.	6	Частный случай
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 9-1. Вычислите сумму $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2+6^2-7^2-8^2+9^2+10^2-\ldots+2017^2+2018^2$.

Ответ: 4074341.

Решение. Заметим, что при любом k верно равенство $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$. Поэтому вся сумма равна $1+504\cdot 4+2018^2=4074341$. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+/−	16	Верное решение с арифметической ошибкой
−/+	8	Верная идея решения с абсолютно неверным подсчетом и ответом
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошёл с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны).

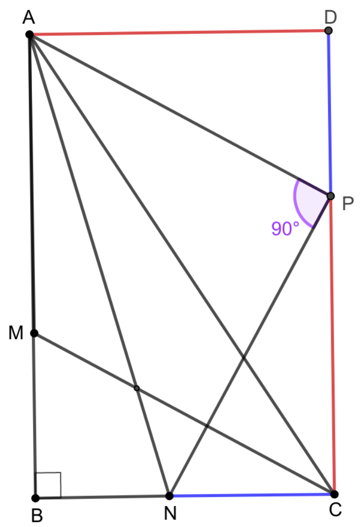
Ответ: Сколько угодно.

Решение. Каждый ученик выполняет перестановку: если он кого-то недолюбливает, то перестановку, меняющую его имя и имя того, кого он недолюбливает; иначе перестановка тривиальна. Другими словами, никакие два имени не станут одинаковыми после прохождения любого из учеников. И для каждого имени в результате есть имя, которое привело бы к такому результату. Раз это утверждение верно для любого отдельного ученика, это же требование верно и для последовательности учеников. Таким образом, зная, какое имя должно прийти в итоге и кто кого недолюбливает, для каждого ученика известна выполняемая им перестановка. Таким образом, для каждого ученика можно по результату перестановки, который он должен получить, найти, какое имя должно было ему прийти. Таким образом, в обратном направлении по цепочке восстанавливается, какое имя следует написать изначально. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные пробелы в доказательстве
+/2	10	Доказательство того, что передача конверта – перестановка, и неправильный ответ.
−.	6	Незначительные продвижения
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-3. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой. На катете AB выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC выбрана точка N так, что $CN = MB$. Найдите острый угол между прямыми AN и CM.

Ответ: $45°$.



Решение. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$ и выберем на его стороне CD точку P так, что AP параллельно CM. Тогда $PC = AD, DP = CN$, и прямоугольные треугольники ADP и CPN равны, причём $\angle DAP = \angle CPN$. Поэтому $\angle APD + \angle CPN = 90°$ и $\angle APN = 90°$, то есть APN — равнобедренный прямоугольный треугольник. Значит, $\angle PAN = 45°$ и, в силу параллельности прямых AP и CM, острый угол между прямыми AN и CM тоже составляет 45 градусов. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-4. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

Ответ: $2n+6$ при $n \geq 2$, 6 при $n = 1$.

Решение. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника — она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами — которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника — она является концом для двух или для трех сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы по $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трех сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами — которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками.

Таким образом, мы получили изображение *мультиграфа* на плоскости. Для него верна *формула Эйлера* $F - E + V = 2$, где F, E, V – коли-

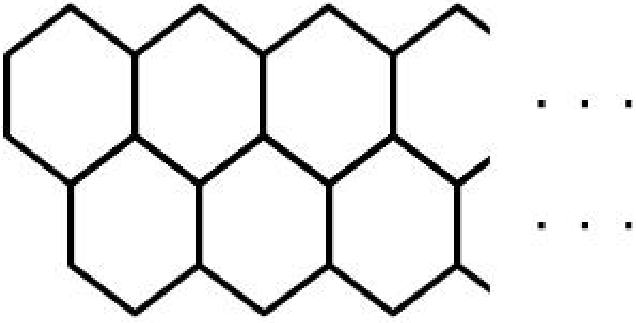


Рис. 1: Пример многоугольника, сделанного из шестиугольников.

чество граней, ребер и вершин соответственно. Поскольку все вершины имеют степень 3, $3V = 2E$. Кроме того $F = n + 1$, поскольку это все шестиугольники и внешняя грань. Из этих трех уравнений выводится $E = 3n - 3$. Пройдем по внешнему циклу. При этом мы шли по всем n шестиугольникам, значит при $n > 1$ не менее чем n раз меняли шестиугольник, по которому идем (внимание: этот утверждение не верно если $n = 1$: так и ходили по одному шестиугольнику, ни разу его не поменяв). Значит, во внешнем цикле не менее n ребер, значит в остальном графе не больше $2n - 3$ ребер. Каждое из них состоит ровно из одного отрезка, бывшего стороной для двух шестиугольников, поскольку внутри многоугольника не может быть точек, являющихся концами ровно для двух отрезков сторон. Значит, внутри не больше $4n - 6$ сторон шестиугольников, склеенных по парам, значит на границе лежит не менее $2n + 6$ сторон. $\square$

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Незначительные ошибки в доказательстве
$+/-$	14	Серьезные пробелы в доказательстве (например, не доказано существование шестиугольника, касающегося других не более чем по 2 сторонам)
$+/2$	10	Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует. Пример есть
$-/+$	6	Есть пример на $2n+6$. Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-5. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

Ответ: 12 (2, 3, 4, 6).

Решение. Имеет место один из двух случаев.

А) Пусть оба наименьших делителя p и q — простые числа. Тогда простым будет число $r = (n/p + n/q) - (p+q)$, и $pqr = (p+q)(n-pq)$. Поскольку числа $p+q$ и pq взаимно просты, получаем $r = p+q$, откуда $p = 2$ и $n = 4q$. Но тогда в силу выбора q получаем $q = 3$ и $n = 12$.

Б) Пусть наименьшие делители имеют вид p и p^2, где p простое. Этот случай разбирается аналогично. □

Замечание. Возможна ситуация, когда число имеет всего три собственных делителя. Тогда упомянутая в условии разность есть разность между наибольшим и наименьшим из собственных делителей. Но любое число с тремя собственными делителями есть степень простого p^4, а разность $p^3 - p$ простым числом быть не может.

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+.$	16	Незначительные ошибки
$+/2$	10	Значительные пробелы в решении
$-.$	6	Есть идея, что $pnq = (p+q)(n-pq)$
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 9-6. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

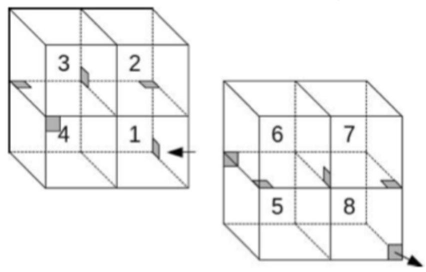
В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

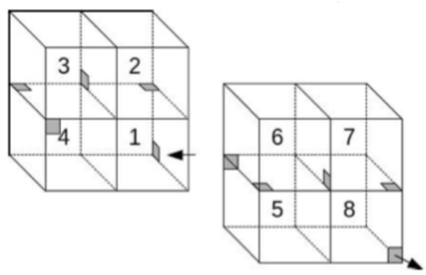
Замечание. Для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

Ответ: $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$.

Решение. Условия задачи требуют, чтобы мышь прогрызла каждую коробку как минимум в двух местах: чтобы попасть в нее и чтобы покинуть её. Таким образом, число отверстий не меньше удвоенного числа коробок, то есть $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$. Построим путь мыши с таким числом отверстий, причем вовсе без коробок с прогрызенными противоположными стенками. Мы будем составлять его из следующих кусочков:



Данный рисунок изображает способ посетить все коробки размера 1 дм внутри одной коробки размера 2 дм, прогрызя заштрихованные места. Заметим, что каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Если теперь мы обойдём все коробки размера 2 дм в данной коробке размера 4 дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2 дм описанным способом, то получим обход коробки размера 4 дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. И так далее: если обойти все коробки размера 2^k дм в данной коробке размера 2^{k+1} дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2^k дм описанным способом, то получим обход коробки размера 2^{k+1} дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Чтобы в результате получить замкнутый путь внутри сундука, коробки размера 2^{n-1} можно обойти по следующей схеме:



Теперь, в какой бы коробке этого замкнутого пути ни завелась мышь, она сможет проследовать по этому пути, побывав ровно один раз в каждой коробке, вернувшись в изначальную, и сделав ровно по одному отверстию в двух соседних стенках каждой коробки. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
+/−	16	Верное решение с нестрогими рассуждениями
−/+	10	Верная оценка и идея индуктивного перехода, доказательства нет
−.	6	Верная оценка, дальнейших продвижений нет
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 10-1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$, $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

Ответ: 1.

Решение. Приведём два решения задачи.

Первое Решение. Обозначим $a + b + c = \lambda$. Теорема Виета позволяет написать кубическое уравнение, зависящее от параметра λ, корнями которого является набор a, b, c, соответствующий данному λ:

$$t^3 - \lambda t^2 + 9t - (10 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda)) = 0.$$

Отсюда видно, при любом λ есть корень $t = 1$, то есть значение $x = 1$ подходит. Осталось доказать, что нет других значений, являющихся корнями при любом λ (хотя это и так очевидно). В самом деле, $t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda) = 0$ означает $t = \dfrac{\lambda - 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 39}}{2}$. Возьмем любую пару значений λ, при которой дискриминант принимает одно и то же положительное значение, например при $\lambda = 10$ и $\lambda = -12$ имеем $t \in \{0, 9\}$ и $t \in \{-11, -2\}$ – пересечений нет. Итак, ответ $x = 1$.

Второе решение. Вычтем из первого равенства второе, преобразовав, получим $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$. Отсюда следует, что одно из a, b, c равно единице. Другие x не подходят, так как тройки $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ и $(a, b, c) = (0, 9, 1)$ удовлетворяют условию. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Не доказано, почему нет других , кроме 1, или есть незначительная ошибка в доказательстве.
+/−	16	Значительные ошибки в доказательстве (несколько переходов с делением на, возможно, нулевые, непонимание условия (при наличии необходимых для доказательства вычислений)).
−/+	10	Рассмотрены два частных случая, которые показывают, что может быть равно только 1. Но доказательства того, что $=1$, нет.
−.	6	Найден только один случай $(1,1,4)$ или $(0,1,9)$ и утверждается, что $\in \{1,4\}$ или $\in \{0,1,9\}$.
−	0	Решение полностью неверно/только ответ.

Задача 10-2. Вовочка хочет передать Наташе на уроке записку в подписанном конверте, при этом конверт в известном порядке сначала проходит через весь остальной класс. Каждый ученик, кроме Наташи, может недолюбливать одного одноклассника, и, если передает конверт, подписанный собой, меняет на этого кого-то, если подписанный этим кем-то — на себя, иначе просто передаёт дальше по цепочке. Сколько учеников в классе могут кого-то недолюбливать, если Вовочка может так заранее подписать записку, чтобы Наташе конверт дошёл с любым именем, с каким он хочет? (Все имена в классе различны).

Ответ: Сколько угодно.

Решение. Каждый ученик выполняет перестановку: если он кого-то недолюбливает, то перестановку, меняющую его имя и имя того, кого он недолюбливает; иначе перестановка тривиальна. Другими словами, никакие два имени не станут одинаковыми после прохождения любого из учеников. И для каждого имени в результате есть имя, которое привело бы к такому результату. Раз это утверждение верно для любого отдельного ученика, это же требование верно и для последовательности учеников. Таким образом, зная, какое имя должно прийти в итоге и кто кого недолюбливает, для каждого ученика известна выполняемая им перестановка. Таким образом, для каждого ученика можно по результату перестановки, который он должен получить, найти, какое имя должно было ему прийти. Таким образом, в обратном направлении по цепочке восстанавливается, какое имя следует написать изначально. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	16	Незначительные пробелы в доказательстве
+/2	10	Доказательство того, что передача конверта – перестановка, и неправильный ответ.
−.	6	Незначительные продвижения
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-3. Гриша нарисовал на плоскости выпуклый 100-угольник и провел все его диагонали, и, о чудо, ни в какой точке кроме вершин 100-угольника не пересеклось больше двух отрезков. Сколькими способами Гриша может обвести маркером часть имеющихся на рисунке линий, чтобы получить треугольник (не обязательно состоящий из целых диагоналей и, быть может, содержащий внутри себя не обведенные линии)?

Ответ: $\binom{100}{3}+4\binom{100}{4}+5\binom{100}{5}+\binom{100}{6}$.

Решение. Найдём концы диагоналей, обведённые Гришей. Каждая диагональ имеет два конца, но некоторые концы могут совпадать, но не более двух в одной точке. Таким образом, мы получим от 3 до 6 вершин стоугольника. Найдём соответствующее количество треугольников.

Для трёх вершин количество треугольников равно количеству способов выбрать три различные вершины $\binom{100}{3}$.

Для четырёх вершин пара соседних является стороной треугольника (другие две не совпадают, а лишь их содержат). Таким образом, количество равно $4\binom{100}{4}$.

Для пяти вершин нужно выбрать пять вершин и среди них одну, которая является вершиной треугольника. Таким образом, количество равно $5\binom{100}{5}$.

Для шестиугольника способ единственный после выбора шести вершин, то есть $\binom{100}{6}$.

Итого, в сумме получаем $\binom{100}{3}+4\binom{100}{4}+5\binom{100}{5}+\binom{100}{6}$. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение (в т. ч. для n-угольника)
+.	15	Незначительные пробелы в решении (в т. ч. не доказано, что можно сопоставлять треугольники и n-угольники)
+/−	10	Серьезные пробелы в доказательстве
−.	5	Идея о разделении треугольников на 4 типа
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-4. В кубическом сундуке со стороной 2^n дм хранится 8^n различных пряностей: в него упакованы восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-1} дм, в каждую из них — восемь закрытых кубических коробок со стороной 2^{n-2} дм, и так далее вплоть до коробок со стороной 1 дм, в каждой из которых лежит своя пряность.

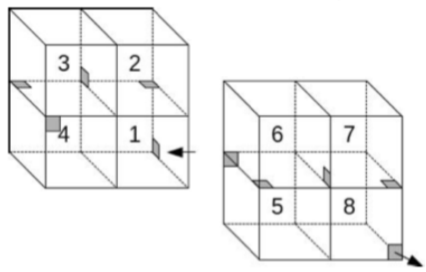
В одной из маленьких коробок оказалась мышь, которая хочет отведать всех пряностей, посетив каждую коробку ровно по одному разу и вернувшись в конце пути в родную коробку. Прогрызая стенки, мышь может попадать из данной маленькой коробки в любую граничащую с ней по грани (но не может в граничащие лишь по ребру или вершине). Какое минимальное число отверстий в стенках коробок (всех размеров) ей предстоит прогрызть для осуществления своей мечты?

Опишите какой-нибудь путь мыши с минимальным числом отверстий в стенках и вычислите, у скольких маленьких коробок при этом окажутся прогрызены две противоположные стенки.

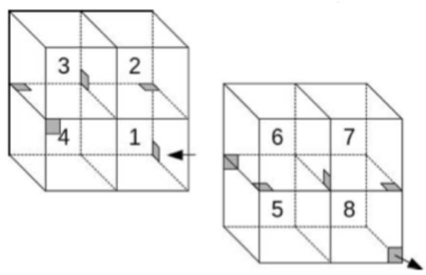
Замечание. Для разных путей, дающих верный ответ в этой задаче, может получиться разное число коробок с прогрызенными противоположными стенками. Участникам, у которых число таких коробок окажется наибольшим, будут вручены памятные призы. (Это достижение не влияет на оценку работы и присвоение званий победителя и призера олимпиады.)

Ответ: $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$.

Решение. Условия задачи требуют, чтобы мышь прогрызла каждую коробку как минимум в двух местах: чтобы попасть в нее и чтобы покинуть её. Таким образом, число отверстий не меньше удвоенного числа коробок, то есть $2 \cdot (8^{n+1} - 1)/7$. Построим путь мыши с таким числом отверстий, причем вовсе без коробок с прогрызенными противоположными стенками. Мы будем составлять его из следующих кусочков:



Данный рисунок изображает способ посетить все коробки размера 1 дм внутри одной коробки размера 2 дм, прогрызя заштрихованные места. Заметим, что каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Если теперь мы обойдём все коробки размера 2 дм в данной коробке размера 4 дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2 дм описанным способом, то получим обход коробки размера 4 дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. И так далее: если обойти все коробки размера 2^k дм в данной коробке размера 2^{k+1} дм в том же порядке и с отверстиями в тех же местах, как показано на рисунке, обходя при этом каждую коробку размера 2^k дм описанным способом, то получим обход коробки размера 2^{k+1} дм, при котором каждая из задействованных коробок прогрызается ровно в двух местах, и ни у одной не прогрызены противоположные стенки. Чтобы в результате получить замкнутый путь внутри сундука, коробки размера 2^{n-1} можно обойти по следующей схеме:



Теперь, в какой бы коробке этого замкнутого пути ни завелась мышь, она сможет проследовать по этому пути, побывав ровно один раз в каждой коробке, вернувшись в изначальную, и сделав ровно по одному отверстию в двух соседних стенках каждой коробки. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+/-$	16	Верное решение с нестрогими рассуждениями
$-/+$	10	Верная оценка и идея индуктивного перехода, доказательства нет
$-.$	6	Верная оценка, дальнейших продвижений нет
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трёхчлены x^2+px+q с целыми коэффициентами p и q. Назовём областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что замена переменной $x\to x+k$ при любом целом k не меняет области значений многочлена. Тогда, сделав замену $x\to x-\left[\frac{p}{2}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть) можем считать, что любой многочлен имеет один из двух видов: x^2+q или x^2+x+q.

Области значений любых двух многочленов разного вида пересекаются: в самом деле, значения многочленов x^2+q и x^2+x+q' совпадают при $x=q-q'$. Значит, многочлены разного вида брать нельзя.

Многочленов первого вида можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x)=x^2+q$ и $f_2(x)=x^2+q'$ не пересекаются, то $q-q'=4k+2$ при некотором $k\in\mathbb{Z}$. В самом деле, для нечетной разности свободных членов $q-q'=2k+1$ имеем $f_1(k)=f_2(k+1)$. Для делящейся на 4 разности свободных членов $q-q'=4k$ имеем $f_1(k-1)=f_2(k+1)$. Но если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна не имеет вид $4k+2$.

Многочленов второго вида тоже можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x)=x^2+x+q$ и $f_2(x)=x^2+x+q'$ не пересекаются, то $q-q'=2k+1$ при некотором $k\in\mathbb{Z}$. В самом деле, для четной разности свободных членов $q-q'=2k$ имеем $f_1(k-1)=f_2(k)$. Опять же, если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна четна.

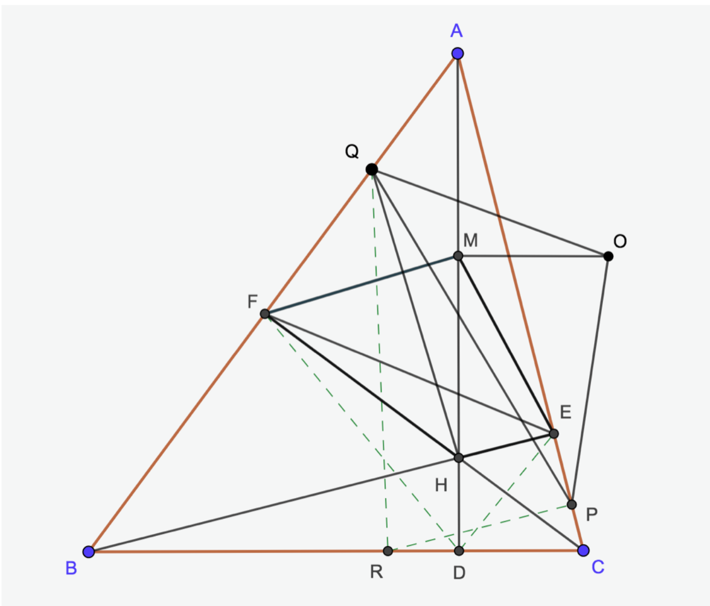
Итак, больше двух многочленов выбрать нельзя. Пример для двух: $f_1(x)=x^2$ и $f_2(x)=x^2+2$. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Решение верно по модулю небольших неточностей
+/−	14	Есть доказательство того, что для каждого типа значений (x^2+q и x^2+x+q) можно взять не более двух трёхчленов
−/+	8	Полное решение, но только для случая x^2+q
−.	4	Пример двух трёхчленов, у которых области значений не пересекаются
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 10-6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF; H — ортоцентр. Окружность с центром в точке O проходит через точки H и A, пересекая стороны AB и AC в точках Q и P, соответственно(точка O не лежит на сторонах AB и AC). Описанная окружность вокруг треугольника QOP касается стороны BC в точке R. Докажите, что $\dfrac{CR}{BR} = \dfrac{ED}{FD}$.

Решение. Пусть $\angle CAB = x, \angle ABC = y, \angle DCA = z$. Предположим, что точка Q находится между A и F, точка P находится между C и E. ($\angle FQH = \angle APH$). Приведём два решения задачи.

Первое решение.



Пусть точка M — середина HA, $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$. Следовательно, $AFHE$ — вписанный четырёхугольник с центром описанной окружности в точке M. Треугольники EFMи OQP равнобедренные; $\angle EMF = 2\angle CAB = 2x$; $\angle POQ = 2x$, отсюда $\triangle EFM$ подобен $\triangle QOP$.

Четырёхугольники $AEHF, AHPQ$ вписанные: $\angle EFH = \angle EAH = \angle PQH$; $\angle FEH = \angle FAH = \angle QPH$, откуда $\triangle HEF$ подобен $\triangle HPQ$.

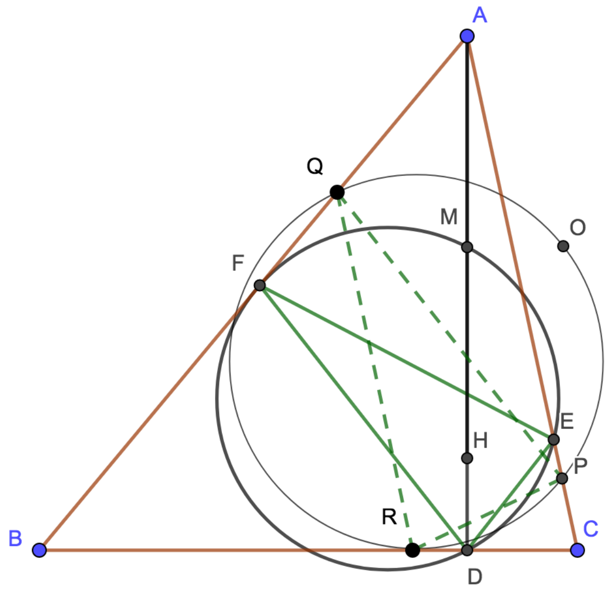
Докажем, что циклические четырёхугольники $EHFM$, $PQHO$ подобны:

Пусть $\angle QHP = \varphi$, то существует поворот с центром в точке H с углом поворота φ по часовой стрелке, отношением $\dfrac{QH}{FH}$. Этот поворот переводит $EHFM$ в $QOPH$.

Точке E, D, F, M лежат на окружности девяти точек треугольника ABC (поскольку четырёхугольники $ABDE, ACDF$ вписанные; $\angle FDB = \angle CAF = x$, $\angle EDC = \angle BAE = x$, $\angle EDF = 180 - 2x = 180 - \angle EMF$).

Пусть точка R_1 лежит между B и D так, что $\angle R_1HD = \varphi$, поэтому треугольники HQF и R_1HD подобны, поэтому четырёхугольники $DFME$ и R_1QOP также подобны.

Поскольку четырёхугольник $DFME$ вписанный, то R_1QOP также цикличен. Из этого следует, что точки R и R_1 совпадают. Треугольники DEF и RPQ подобны $\Rightarrow \dfrac{ED}{FD} = \dfrac{PR}{QR}$.



Рассмотрим два циклических четырёхугольника $ACDF$ и $ABDE$: $\angle BFD = \angle AFE = \angle ACB = z$, $\angle DFE = 180 - 2z$. Треугольники DEF

и RPQ подобны, $\angle RQP = 180 - 2z$. Поскольку CR — касательная к окружности треугольника PQR; $\angle CRP = \angle RQP = 180 - 2z$.

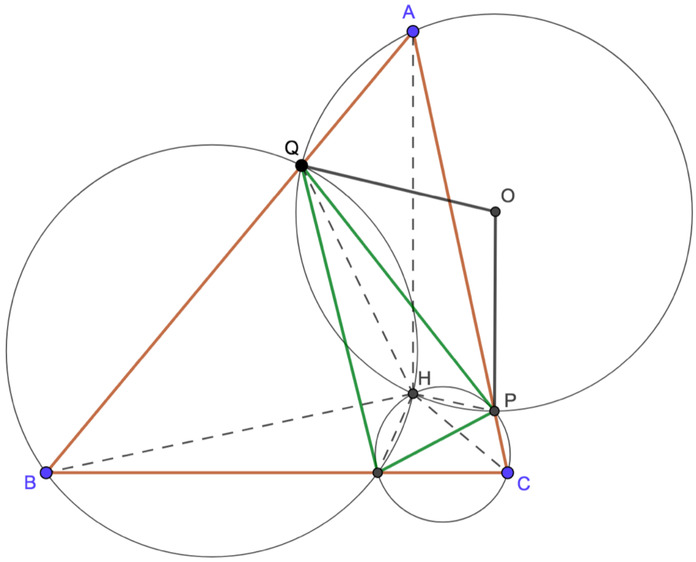
Таким образом, в треугольнике CPR имеем $\angle CPR = z$, $CR = PR$. Аналогично $BR = QR$:

$$\frac{ED}{FD} = \frac{PR}{QR} = \frac{CR}{BR}.$$

Второе решение.

Впишем треугольник BQH в окружность и эта окружность будет пересекать прямую BC в точке R_3 (точка R_3 не совпадает с точкой B).

Поскольку четырёхугольники $APHQ$ и $BQHR_3$ вписанные, то $\angle PHQ = 180 - \angle PAQ$ и $\angle QHR_3 = 180 - \angle QBR_3$. Так же подразумевается, что $\angle PHR_3 = 360 - \angle PHQ - \angle QHR_3 = 180 - \angle ACB$. Следовательно, $CPHR_3$ также вписанный. Мы только что установили частный случай теоремы Микеля.



Поскольку $BQHR_3$ и CR_3HP вписанные, получаем, что $\angle QR_3H = \angle QBH = 90 - \angle BAC$ и $\angle HR3P = \angle HCP = 90 - \angle BAC$. Следовательно, $\angle QR_3P = 180 - 2\angle BAC = 180 - 2x$. Аналогично имеем $\angle PQR = 180 - 2z$ и $\angle R_3PQ = 180 - 2y$. Как было показано в первом решении, треугольник DEF имеет такие же углы. Следовательно треугольник R_3PQ подобен треугольнику DEF. Заметим, что $\angle POQ + \angle PR_3Q = 2x + 180 - 2x = 180$, а это значит, что точка R_3 лежит на окружности треугольника $OPQ \Rightarrow R_3 = R$. Закончить доказательство как в первом решении. □

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
+	20	Полное решение
−	0	Решение полностью неверно

Решения и критерии оценки заданий олимпиады

Задача 11-1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$, $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

Ответ: 1.

Решение. Приведём два решения задачи.

Первое Решение. Обозначим $a + b + c = \lambda$. Теорема Виета позволяет написать кубическое уравнение, зависящее от параметра λ, корнями которого является набор a, b, c, соответствующий данному λ:

$$t^3 - \lambda t^2 + 9t - (10 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda)) = 0.$$

Отсюда видно, при любом λ есть корень $t = 1$, то есть значение $x = 1$ подходит. Осталось доказать, что нет других значений, являющихся корнями при любом λ (хотя это и так очевидно). В самом деле, $t^2 - (\lambda - 1)t + (10 - \lambda) = 0$ означает $t = \dfrac{\lambda - 1 \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda - 39}}{2}$. Возьмем любую пару значений λ, при которой дискриминант принимает одно и то же положительное значение, например при $\lambda = 10$ и $\lambda = -12$ имеем $t \in \{0, 9\}$ и $t \in \{-11, -2\}$ – пересечений нет. Итак, ответ $x = 1$.

Второе решение. Вычтем из первого равенства второе, преобразовав, получим $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$. Отсюда следует, что одно из a, b, c равно единице. Другие x не подходят, так как тройки $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ и $(a, b, c) = (0, 9, 1)$ удовлетворяют условию. $\square$

Оценка	Балл	Содержание критерия
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Не доказано, почему нет других , кроме 1, или есть незначительная ошибка в доказательстве.
$+/-$	16	Значительные ошибки в доказательстве (несколько переходов с делением на, возможно, нулевые, непонимание условия (при наличии необходимых для доказательства вычислений)).
$-/+$	10	Рассмотрены два частных случая, которые показывают, что может быть равно только 1. Но доказательства того, что $=1$, нет.
$-.$	6	Найден только один случай $(1,1,4)$ или $(0,1,9)$ и утверждается, что $\in \{1,4\}$ или $\in \{0,1,9\}$.
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ.

Задача 11-2. Мистер A час простоял в точке с координатами $(0,0)$. За этот же час, двигаясь равномерно и прямолинейно, мистер B дошел от точки $(22,0)$ до точки $(2,20)$. За этот же час мадемуазель C, тоже двигавшаяся равномерно и прямолинейно, прошла от точки $(30,4)$ до точки $(0,24)$. Сколько раз за указанный период наблюдения принимала целые значения площадь треугольника ABC? Начальный и конечный момент включаются.

Ответ: 53.

Решение. Неформально говоря, проблема в этой задаче не в том, чтобы найти путь вычислений, приводящий к ответу; а в том, чтобы найти путь к ответу, проходящий через не слишком большое количество промежуточных вычислений. Покажем, как это сделать.

Как известно, площадь треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{(x_1,y_1)}$ и $\overrightarrow{(x_2,y_2)}$ равна $|\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)|$. Если точка $\overrightarrow{(x,y)}$ движется равномерно и прямолинейно, то ее координаты зависят от времени t как $x = x_0 + x't$, $y = y_0 + y't$. Тогда величина $f(t) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ как функция от t является многочленом второй степени. Выберем ось времени так, чтобы ноль был в середине отрезка наблюдения, а начальный и конечный моменты имели координаты -1 и 1 соответственно. Обозначим $f(t) = ax^2 + bx + c$. Координаты точек B и C в середине отрезка наблюдения легко считаются, это $(12,10)$ и $(15,14)$ соответственно. Итак, $f(-1) = \dfrac{1}{2}(22\cdot 4 - 30\cdot 0) = 44$, $f(0) = \dfrac{1}{2}(12\cdot 14 - 15\cdot 10) = 9$, $f(1) = \dfrac{1}{2}(2\cdot 24 - 0\cdot 20) = 24$. Откуда

$c = f(0) = 9,\ b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} = -10,\ a = \dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} = 25.$

Минимум квадратного трехчлена достигается в точке $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{5};\ f\left(\dfrac{1}{5}\right) = 8.$ Итак, мы видим, что минимум выражения $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ попал на отрезок наблюдения, кроме того он положителен, то есть модуль равен выражению под модулем. Итого, искомая площадь сначала уменьшалась от 44 до 8, потом росла от 8 до 24, таким образом принимая целые значения $1 + (44 - 8) + (24 - 8) = 53$ раза. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	17	Только арифметическая ошибка. Игнорируется повторное прохождение той же целой площади.
+/2	16	Верно найдена формула для S(t) ($100t^2 - 120t + 44$ или $44 - 2t + t^2/36$ или $t^2/4 - 6t + 44$), или $2S$, дальнейшие рассуждения отсутствуют
−/+	10	Идея непрерывности, дающая только оценку снизу (найдены значения в начальный и конечный момент, посчитана разность между ними) или арифметическая ошибка при вычислении формулы для $S(t)$
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 11-3. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

Ответ: $2n + 6$ при $n \geq 2$, 6 при $n = 1$.

Решение. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника, она является концом для двух или для трёх сторон: больше, чем 3, быть не может потому что все углы равны $120°$.

Давайте немного порисуем. Представим себе, что в каждую точку, являющуюся концом для трёх сторон шестиугольника, мы поставили точку красным фломастером. А каждый путь по сторонам шестиугольников от красной точки до красной точки мы обвели синим фломастером. Таким образом, синие линии идут по сторонам шестиугольников и через вершины, из которых выходит только две стороны (иными словами, которые являются вершинами ровно для одного шестиугольника). Заметим, что синие линии не пересекаются иначе, чем в своих концах, являющихся красными точками. Легко понять, что если точка является концом для хотя бы одной стороны шестиугольника, она является концом для двух или для трёх сторон: больше чем 3 быть не может потому что все углы равны $120°$.

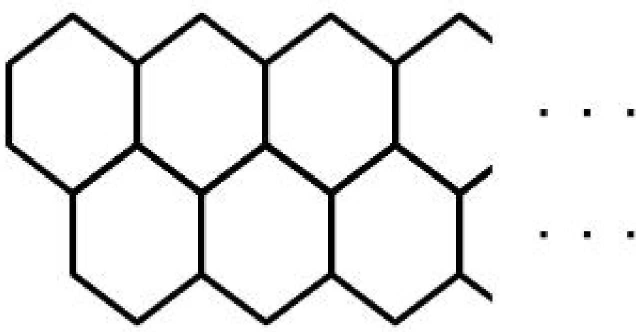


Рис. 1: Пример многоугольника, сделанного из шестиугольников.

Таким образом, мы получили изображение *мультиграфа* на плоскости. Для него верна *формула Эйлера* $F - E + V = 2$, где F, E, V — количества граней, рёбер и вершин соответственно. Поскольку все вершины имеют степень 3, $3V = 2E$. Кроме того $F = n + 1$, поскольку это все шестиугольники и внешняя грань. Из этих трёх уравнений выводится $E = 3n - 3$. Пройдём по внешнему циклу. При этом мы шли по всем n шестиугольникам, значит при $n > 1$ не менее чем n раз меняли шестиугольник, по которому идем (внимание: этот утверждение неверно, если $n = 1$: так и ходили по одному шестиугольнику, ни разу его не поменяв). Значит, во внешнем цикле не менее n ребер, значит в остальном графе не больше $2n - 3$ рёбер. Каждое из них состоит ровно из одного отрезка, бывшего стороной для двух шестиугольников, поскольку внутри многоугольника не может быть точек, являющихся концами ровно для двух отрезков сторон. Значит, внутри не больше $4n - 6$ сторон шестиугольников, склеенных по парам, значит на границе лежит не менее $2n + 6$ сторон. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
+.	18	Незначительные ошибки в доказательстве
+/−	10	Серьезные пробелы в доказательстве (например, не доказано существование шестиугольника, касающегося других не более чем по 2 сторонам)
+/2	6	Имеется утверждение о том, что минимальный периметр для n и $n+1$ отличается на 2, но доказательство отсутствует. Пример есть.
−/+	4	Есть пример на $2n+6$ или имеются идеи, как в критерии +/2, но нет внятного примера.
−	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 11-4. Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон BC, CA, AB. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Приведём тригонометрическое решение. Достаточно доказать, что

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1}\cdot\frac{C_0B_1}{A_0B_1}\cdot\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Пусть без ограничения общности прямая a пересекает внутренность треугольника ABC. Обозначим углы треугольника через α, β, γ, а угол B_0AA_1 через ϕ. Тогда углы AC_0A_1 и AB_0A_1 равны β и γ соответственно.

Применяя теорему синусов к треугольникам AB_0A_1 и AC_0A_1, получаем

$$\frac{B_0A_1}{C_0A_1}=\frac{\sin A_1AB_0}{\sin A_1AC_0}\cdot\frac{\sin AC_0A_1}{\sin AB_0A_1}=\frac{\sin\phi}{\sin(\alpha-\phi)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Аналогично, пользуясь равенством вертикальных углов, получаем

$$\frac{C_0B_1}{A_0B_1}=\frac{\sin B_1BC_0}{\sin B_1BA_0}\cdot\frac{\sin BA_0B_1}{\sin BC_0B_1}=\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha+\beta-\phi)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{A_0C_1}{B_0C_1}=\frac{\sin(\gamma+\phi)}{\sin\phi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

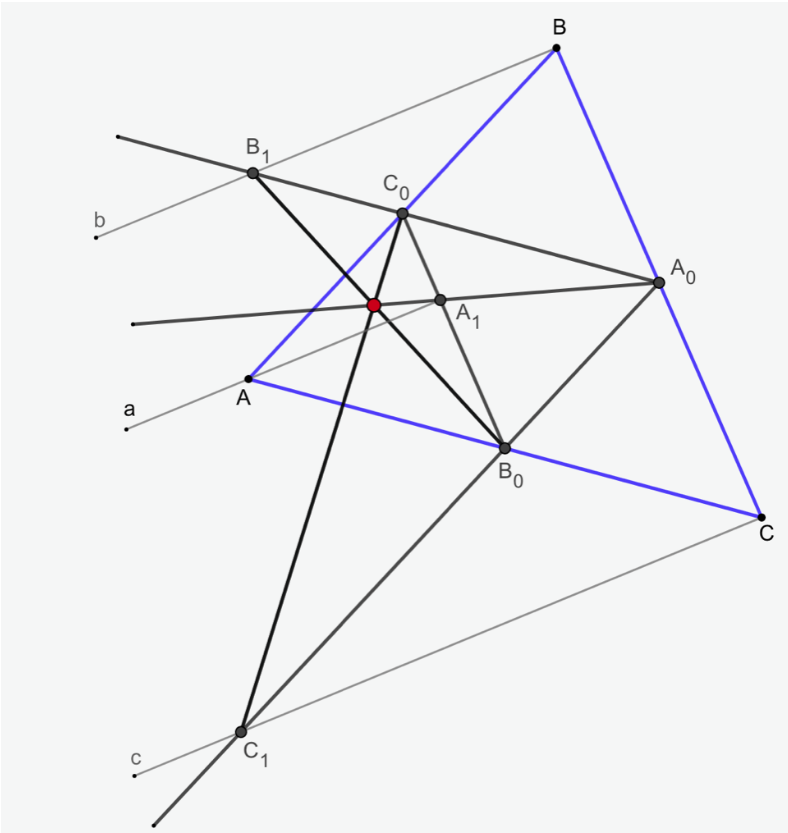


Рис. 2: Пример чертежа, если прямая a проходит внутри треугольника ABC.

Поскольку $\alpha + \beta - \phi = \pi - (\gamma + \phi)$, при перемножении трёх выписанных равенств все члены сократятся и мы получим 1.

Теперь перепишем то же решение в терминах проективной геометрии. *Простым отношением* трёх точек P, Q, R на одной прямой назовем такое число x, что $\overrightarrow{PQ} = x \cdot \overrightarrow{PR}$. Обозначим $x = \overrightarrow{PQ}/\overrightarrow{PR}$.

Достаточно доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}} = -1.$$

Тогда по теореме Чевы прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Двойным отношением прямых p, q, r, s назовем число $(p, q; r, s) = \pm \frac{\sin \angle(p,r)}{\sin \angle(p,s)} \cdot \frac{\sin \angle(q,r)}{\sin \angle(q,s)}$, где знак плюс берётся, если r и s расположены в одной паре вертикальных углов относительно p и q, а знак минус — иначе.

Проведём через вершины треугольника A, B, C прямые p, q, r, параллельные противоположным сторонам a', b', c' треугольника ABC. Тогда, как известно, $\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{C_0A_1}}$ равно двойному отношению прямых $(a, p; c', b')$. Аналогично $\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{A_0B_1}}$ и $\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{B_0C_1}}$ равны двойным отношениям $(b, q; a', c')$ и $(c, r; b', a')$. Но из параллельности

$$(a, p; c', b') = (a, a'; c', b'), \quad (b, q; a', c') = (a, b'; a', c'), \quad (c, r; b', a') = (a, c'; b', a').$$

Остаётся доказать, что

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = -1.$$

Здесь участвуют двойные отношения одной и той же четвёрки прямых, но взятых в разных порядках. Обозначим $x = (a, a'; c', b')$. Известно, что при перестановке прямых c' и b' двойное отношение x заменяется на $1/x$, а при перестановке прямых a' и b' — на $1 - x$. Значит, $(a, b'; a', c') = 1/(1 - x)$ и $(a, c'; b', a') = 1/(1 - 1/(1 - x))$. Получаем

$$(a, a'; c', b')(a, b'; a', c')(a, c'; b', a') = x \cdot 1/(1 - x) \cdot 1/(1 - 1/(1 - x)) = -1,$$

что и требовалось. □

Оценка	Балл	Содержание критерия
+	20	Полное решение
−.	4	Использование аффинного преобразования (показано, что так можно), дальше ничего
−	0	Решение полностью неверно

Задача 11-5. Рассмотрим всевозможные приведённые квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовём областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что замена переменной $x \to x + k$ при любом целом k не меняет области значений многочлена. Тогда, сделав замену $x \to x - \left[\frac{p}{2}\right]$ (квадратные скобки означают целую часть) можем считать, что любой многочлен имеет один из двух видов: $x^2 + q$ или $x^2 + x + q$.

Области значений любых двух многочленов разного вида пересекаются: в самом деле, значения многочленов $x^2 + q$ и $x^2 + x + q'$ совпадают при $x = q - q'$. Значит, многочлены разного вида брать нельзя.

Многочленов первого вида можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + q$ и $f_2(x) = x^2 + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 4k + 2$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для нечетной разности свободных членов $q - q' = 2k + 1$ имеем $f_1(k) = f_2(k + 1)$. Для делящейся на 4 разности свободных членов $q - q' = 4k$ имеем $f_1(k - 1) = f_2(k + 1)$. Но если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна не имеет вид $4k + 2$.

Многочленов второго вида тоже можно выбрать не больше двух, поскольку если области значений $f_1(x) = x^2 + x + q$ и $f_2(x) = x^2 + x + q'$ не пересекаются, то $q - q' = 2k + 1$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. В самом деле, для четной разности свободных членов $q - q' = 2k$ имеем $f_1(k - 1) = f_2(k)$. Опять же, если выбрано хотя бы три многочлена, то среди попарных разностей свободных членов хотя бы одна четна.

Итак, больше двух многочленов выбрать нельзя. Пример для двух: $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = x^2 + 2$. $\square$

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$+.$	18	Решение верно по модулю небольших неточностей
$+/-$	14	Есть доказательство того, что для каждого типа значений (x^2+q и x^2+x+q) можно взять не более двух трёхчленов
$-/+$	8	Полное решение, но только для случая x^2+q
$-.$	4	Пример двух трёхчленов, у которых области значений не пересекаются
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ

Задача 11-6. Последовательность чисел $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$ называется перестановкой длины n, если каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается в этой последовательности ровно один раз. Например, $\tau(1) = 3, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1$ — перестановка длины 3. Найдите все n, для которых найдётся перестановка $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$, удовлетворяющая четырём условиям:

- Числа $\tau(i) - i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 2i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 3i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 4i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.

Ответ: все n, не делящиеся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

Решение. Будем решать чуть обобщённую задачу, а именно: зафиксируем натуральное m и будем искать все n, для которых в любом из m множеств $\{\tau(i) - ji | \, 1 \le i \le n\}$ все остатки различны. Индекс j пробегает значения $1 \le j \le m$.

Для начала докажем, что все n, не делящиеся на простые числа меньшие либо равные $m+1$, подходят. Рассмотрим перестановку $\tau : i \to (m+1)i \mod n$ (здесь мы позволим себе вольность считать, что остатки идут от 1 до n, а не от 0 до $n-1$ как обычно). Поскольку n взаимно просто с $m+1$, остатки не повторяются. Значит, по принципу Дирихле, каждый остаток встречается ровно один раз. Аналогично, каждый остаток встречается ровно один раз и в каждом из множеств $\{\tau(i) - i| 1 \le i \le n\}, \{\tau(i) - 2i| 1 \le i \le n\}, \dots, \{\tau(i) - mi| 1 \le i \le n\}$.

Докажем, что перестановки с требуемыми свойствами не существует если $n \vdots p$, $p \le m+1$. Предположим обратное, зафиксируем наименьшее такое p и обозначим через k максимальную степень p, на которую делится n.

Сперва рассмотрим случай $p = 2$. Заметим что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, формула легко доказывается по индукции. Тогда сумма n чисел, дающих остатки $1, 2, \dots n$ по модулю n сравнима с $\frac{n(n+1)}{2}$ по модулю n. Посчитаем двумя способами остаток суммы $\sum_{i=1}^{n} \tau(i) - i$ по модулю n. С одной стороны, все слагаемые дают разные остатки, значит сумма $\frac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, по тем же соображениям у суммы отдельно $\sum_{i=1}^{n} \tau(i)$ такой остаток, и у суммы $\sum_{i=1}^{n} i$ такой же, значит их разность имеет остаток 0. Заметим, что $\frac{n(n+1)}{2} \not\equiv 0 \mod n$, поскольку $n+1$ нечетное а $\frac{n}{2}$ не делится на 2^k. Предположение приведено к противоречию.

Попробуем получить решение в том же духе для произвольного p. Небольшой догадкой, которую нужно сделать на этом этапе решения, будет то, что считать надо сумму $p-1$-х степеней. Слабой подсказкой в эту сторону является то, что $p-1 = 1$ для двойки $p = 2$, и в этом же случае сработал подсчет суммы первых степеней. Гораздо более сильной — то что $p-1$-е степени по модулю p ведут себя просто — это 1 если число не равно нулю, 0, если равно.

Итак, далее считаем что $p > 2$ обозначим

$$S(m) = \sum_{i=1}^{m} i^{p-1}$$

Лемма 1. $S(n) \vdots p^{k-1}$ и $S(n) \not\vdots p^k$. Достаточно доказать этот факт для $n = p^k$, поскольку $S(n) \equiv \frac{n}{p^k} S(p^k) \mod p^k$. Для $S(p^k)$ проведем индукцию по k. При $k = 1$ утверждение следует из Малой теоремы Ферма: среди слагаемых $p-1$ единица и один ноль. Пусть доказано для k, докажем для $k+1$.

$$S(p^{k+1}) = \sum_{i=1}^{p^{k+1}} i^{p-1} = \sum_{i=1}^{p^k} \sum_{j=0}^{p-1} (i + jp^k)^{p-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p^k} \sum_{j=0}^{p-1} \left(i^{p-1} + (p-1)jp^k i^{p-2}\right) \equiv \sum_{i=1}^{p^k} \left(i^{p-1}p + i^{p-2}p^k \frac{p(p-1)^2}{2}\right) \equiv pS(p^k). \tag{1}$$

Все сравнения по модулю p^{k+1}.

Теперь для каждого $j:\ 1 \le j \le p-1$ рассмотрим сумму

$$S_j(n) = \sum_{1\le i\le n} (\tau(i) - ij)^{p-1}.$$

Раскроем все степени по биному Ньютона, получим слагаемые вида

$$\binom{p-1}{s}(-j)^s \sum_{1\le i\le n} \tau(i)^{p-1-s} i^s.$$

С другой стороны, все члены в $S_j(n)$ – это переставленные в каком-то порядке остатки по модулю n членов суммы $S(n)$, то есть $S_j(n) \equiv S(n) \mod n$. Итак, мы хотим найти такой набор α_j, чтобы домножив на него сравнимости $S_j(n) \equiv S(n)$ и сложив мы смогли бы прийти к противоречию. Сделать это поможет лемма:

Лемма 2. Существуют такие целые числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$, что

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 2 + \cdots + \alpha_{p-1}(p-1) \equiv 0 \mod p^k$$
$$\alpha_1 1^2 + \alpha_2 2^2 + \cdots + \alpha_{p-1}(p-1)^2 \equiv 0 \mod p^k$$
$$\dots$$
$$\alpha_1 1^{p-2} + \alpha_2 2^{p-2} + \cdots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-2} \equiv 0 \mod p^k$$
$$\alpha_1 1^{p-1} + \alpha_2 2^{p-1} + \cdots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-1} \not\equiv 0 \mod p$$

Сначала покажем, как из этой леммы вывести оставшуюся часть утверждения задачи. Рассмотрим сравнимость

$$\alpha_1 S_1 n + \alpha_2 S_2 n + \cdots + \alpha_{p-1} S_{p-1}(n) \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{p-1})S \mod p^k$$

С одной стороны, если раскрыть все S_j по биному Ньютона, и собрать вместе члены вида $\tau(i)^{p-1-s} i^s$, $1 \le s \le p-2$, то по Лемме 2 перед каждым членом коэффициент, равный нулю по модулю p^k.

$$\alpha_1(\sum_{i=1}^{n} \tau(i)^{p-1} + i^{p-1}) + \alpha_2(\sum_{i=1}^{n} \tau(i)^{p-1} + (2i)^{p-1}) + \cdots + \alpha_{p-1}(\sum_{i=1}^{n} \tau(i)^{p-1} + ((p-1)i)^{p-1}) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1})S(n).$$

Вспомнив, что $\sum_{i=1}^{n} \tau(i)^{p-1} = S(n)$ видим, что все члены вида $\tau(i)^{p-1}$ сократились с правой частью, итак

$$\alpha_1 \sum_{i=0}^{n} i^{p-1} + \alpha_2 \sum_{i=0}^{n} (2i)^{p-1} + \cdots + \alpha_{p-1} \sum_{i=0}^{n} ((p-1)i)^{p-1} \equiv 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha_1 1^{p-1} + \alpha_2 2^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1}(p-1)^{p-1}\right) S(n) \equiv 0$$

Но первая скобка не делится на p по Лемме 2, а $S(n)$ не делится на p^k по Лемме 1.

Осталось доказать лемму 2. Сперва отметим, что если вместо набора целых чисел α_j удалось подобрать набор рациональных чисел β_j, таких что их знаменатели не делятся на p, все сравнимости из условия леммы заменились на равенства, а последнее выражение равно целому числу, не делящемуся на p – то лемма доказана, достаточно все β_j заменить на сравнимые с ними по модулю p^k целые числа. Сравнимость определена корректно поскольку знаменатели не делятся на p.

Теперь осталось взять $\beta_j = (-1)^j \frac{1}{j}\binom{p-2}{j-1}$. Читателю остается упражнение доказать (например, по индукции, поскольку простота p здесь уже не важна), что во всех условиях Леммы 2, кроме последнего, получается 0, а в последнем $\pm(p-2)!$. $\square$

Оценка	**Балл**	**Содержание критерия**
$+$	20	Полное решение
$-/+$	12	Найден пример, работающий для всех n, не делящихся на $2, 3$ и 5.
$-.$	8	Доказано, что n — нечётное
$-$	0	Решение полностью неверно/только ответ