Математика **7 класс**

Время выполнения задания – 240 минут.

Максимальное количество баллов – 100.

Задание 1 (10 баллов)

Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провёл в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу – пятидесятилетие своей супружеской жизни?

Ответ. 76 и 70. **Решение**. Обозначим через x возраст, в котором Сидоров производил свои подсчёты. Тогда возраст Сидоровой в этот момент составлял x–6 лет, а в момент заключения брака им было $\frac{x}{2}$ и $\left(\frac{x}{2}-6\right)$ лет соответственно. Последнее условие позволяет сопоставить уравнение $x+8-\left(\frac{x}{2}-6\right)=\frac{2}{3}(x+8)\Rightarrow\frac{x}{6}=14-\frac{16}{3}\Rightarrow x=52$. Итак, к моменту бракосочетания супругам было 26 лет и 20 лет. Из этого немедленно следует ответ.

Критерии:

Правильный ответ, полученный после угадывания одного из возрастов: $\mp$ (3 балла)

Составлено правильное уравнение, затем арифметическая ошибка: от $\pm$ (7 баллов)

Задание 2 (15 баллов)

Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.

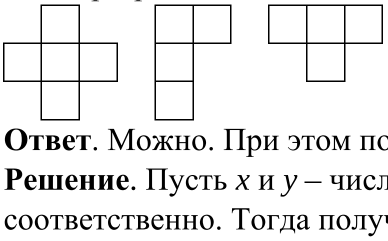
Ответ. 1011 положительных и 1010 отрицательных. **Решение**. Будем двигаться вдоль исходного ряда и фиксировать знаки чисел. Из условия следует, что знак при этом менялся 1010 раз – чётное число. Поэтому знаки первого и последнего числа совпадают. Значит, добавленное произведение будет положительным.

Критерии:

Только ответ и/или замечание что для нахождения искомого количества нужно понять только знак произведения крайних чисел: - (0 баллов)

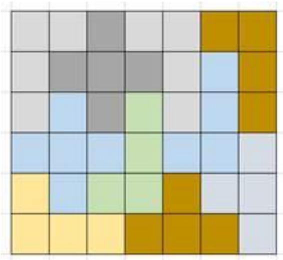
Задание 3 (15 баллов)

Можно ли разрезать прямоугольник 6x7 на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?



Ответ. Можно. При этом получится два креста и восемь четырёхклеточных фигурок.

Решение. Пусть x и y – число четырёхклеточных и пятиклеточных фигурок соответственно. Тогда получаем уравнение $4x+5y=42$, из которого видно, что y – чётное число, не кратное 4 и не превосходящее 8. То есть, либо 2, либо 6. Но случай $x=3$, $y=6$ невозможен, поскольку угловые клетки нельзя покрыть пятиклеточными крестами и четырёхклеточных фигур должно быть хотя бы четыре. Случай x=8, y=2 изображён на рисунке.



Критерии:
Только доказано, что крестов либо 2 либо 6:
Только приведён пример такого разрезания: $\frac{+}{2}$ (10 баллов)
Приведён пример такого разрезания и доказано, что крестов 2 или 6: от $\pm$ (11 баллов)

Задание 4 (20 баллов)
Пара различных натуральных чисел (a,b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b. Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа – любой делитель, отличный от 1 и самого числа.
Решение. Да, существует. Их существует даже бесконечно много. Например, годится и любая пара чисел вида $a = 4n, b = 6n+3$, поскольку у первого числа наибольший и наименьший 2 и 2n, а у второго 3 и 2n+1. Также подходят пары вида p^2 и q^2, где p и q- различные простые числа.
Критерии:
Решение опирается на неверное утверждение вида «наименьший собственный делитель $3(n+1)$ это 3» - не более $\frac{+}{2}$ (10 баллов)

Задание 5 (20 баллов)
Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На стороне AC выбрана точка K такая, что $\angle CBK$=15°. На луче ВК отмечена точка M такая, что $\angle ACM$ = 90°. Докажите, что AC=BM.
Доказательство. Опустим из вершины прямого угла B перпендикуляр BE на гипотенузу. При этом точка E совпадёт с серединой гипотенузы, т.е. AC=2CE. В треугольнике BEK $\angle EBK = 45^\circ = 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow BK = 2EK$. В то же время в треугольнике CMK $\angle MKC = 60^\circ \Rightarrow \angle MKC = 30^\circ \Rightarrow MK = 2CK$. Значит, BM=2EC=AC, что и требовалось.

Задание 6 (20 баллов)
Имеется 999 палочек длин 1, 2, 3, …, 999. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?
Решение. Не обязательно. Условие означает, что среди любых трёх подряд лежащих палочек наименьшая будет больше разности двух других. Приведём конструкцию, для которой это выполняться не будет. Будем брать не 999 палочек, а любое их количество, кратное трём. При этом вместо палочек будем работать с набором чисел 1, 2, 3, …, 3k. Сперва выложим круг из 2k чисел от k+1 до 3k: 2k, 2k+1, 2k-1, 2k+2, 2k-2, 2k+3, …, k+2, 3k-1, k+1, 3k. Разницы между соседями будут таковы: 1, 2, 3, …, 2k-2, 2k-1, k. Затем вставим числа 1, 2, …, k в промежутки с разностями 1, 3, 5, …, 2k-1 соответственно. При

этом во все промежутки, кроме первого, вставляется число меньшее разности. Для первой тройки 2k, 2k+1, 1 неравенство треугольника также не выполняется.
Критерии:
Приведён правильный пример, но не доказано, что он работает: ± (14 баллов)

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба» 2 этап, 2021

Математика **8 класс**

Время выполнения задания – 240 минут.

Максимальное количество баллов – 100.

Задание 1 (15 баллов)

Число a*b есть произведение b последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно a (в частности, a*1= a). Найдите все пары натуральных чисел a, b, для которых выполнено равенство a*b=2(b*a).

Ответ. (1;3) и (2;3). **Решение**. Число a*b есть произведение натуральных чисел от a до a+b-1, а число b*a есть произведение натуральных чисел от b до a+b-1. Поэтому данное равенство означает, что $a\ldots(b-1)=2, b-1\geq a$. Это означает, что либо $a=1, b-1=2$, либо $a=b-1=2$

Критерии:

Только правильный ответ: -. (2 балла)

Замечено, что при $a<b$ в $a*b$ есть «новые» множители $a,\ldots,b-1$: от $\pm$ (11 баллов)

Задание 2 (15 баллов)

В параллелограмме ABCD отмечена точка K такая, что AB=BK=KC. Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения диагоналей, E – середина отрезка AK, F – середина отрезка KD, M – середина отрезка AD. Тогда, рассматривая средние линии в треугольниках ACK, BDF и ACD, приходим к равенствам OF=BK/2=CK/2=OE=CD/2=OM. Что и требовалось.

Критерии:

Доказано, что расстояние от центра параллелограмма до середины AD равно расстоянию до середины другой стороны, но не рассмотрена третья: $\frac{+}{2}$ (8 баллов)

Задание 3 (15 баллов)

Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число $n_1, n_2, \ldots, n_{2021}$. Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу: p_1 получается перемножением всех делителей числа n_1 (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа n_2, p_2 получается перемножением всех делителей числа n_2 и всех делителей числа n_3 и т.д. Вася утверждает, что $n_1=3$, $n_{2021}=13$, а у произведения $p_1p_2\ldots p_{2020}$ последние четыре цифры – 2021. Стоит ли верить Васе?

Решение. Нет, не стоит. Рассмотрим остаток от деления произведения $p_1p_2\ldots p_{2020}$ на 4. Все делители чисел $n_2,\ldots,n_{2020}$ входят в это произведение дважды, а квадрат любого нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1. Поэтому рассматриваемое произведение по модулю 4 будет сравнимо с 3·13=39, то есть будет давать остаток 3. Но число 2021 при делении на 4 даёт остаток 1.

Критерии:

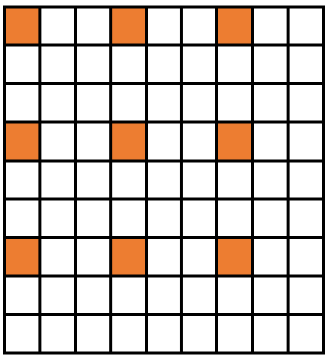
Бездоказательно утверждается, что $\frac{p_1p_2\dots p_{2020}}{n_1n_{2021}}$ не может иметь остаток 3 от деления на 4: ∓ (5 баллов)

Бездоказательно утверждается, что число вида $39x^2$ не может иметь остаток 2021 от деления на 10000 (иметь последние цифры 2021): ∓ (5 баллов)

Задание 4 (15 баллов)

Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле 9×9, чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?

Решение. Нет, не может. Пусть такой обход существует. Выделим множество клеток, указанное на рисунке. Ясно, что банальный ход ведёт из любой клетки этой области в другую её клетку, а не банальный из неё выводит. Поэтому при обходе отмеченные клетки посещаются парами, если обход не начинается и не кончается одной из них. Но мы всегда можем решить эту проблему, сдвинув закрашенную область на одну или две клетки по горизонтали. Значит, можно считать, что все закрашенные клетки посещаются парами. Но их нечётное число.



Критерии:

Присутствует правильное разбиение на зоны и получено противоречие из нечетного количества клеток в зоне, но не учитывается, что в какой то зоне мы могли начать или закончить: ± (11 баллов)

Задание 5 (20 баллов)

Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, …, 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Решение. Не обязательно. Условие означает, что среди любых трёх подряд лежащих палочек наименьшая будет больше разности двух других. Приведём конструкцию, для которой это выполняться не будет. Будем брать не 111 палочек, а любое их количество, кратное трём. При этом вместо палочек будем работать с набором чисел 1, 2, 3, …, 3k. Сперва выложим круг из 2k чисел от k+1 до 3k: 2k, 2k+1, 2k-1, 2k+2, 2k-2, 2k+3, …, k+2, 3k-1, k+1, 3k. Разницы между соседями будут таковы: 1, 2, 3, …, 2k-2, 2k-1, k. Затем вставим числа 1, 2, …, k в промежутки с разностями 1, 3, 5, …, 2k-1 соответственно. При этом во все промежутки, кроме первого, вставляется число меньшее разности. Для первой тройки 2k, 2k+1, 1 неравенство треугольника также не выполняется.

Критерии:

Приведён правильный пример, но не доказано, что он работает: $\pm$ (14 баллов)

Задание 6 (20 баллов)

Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом $\overline{abcd}$ (то есть, $N = at^3 + bt^2 + ct + d,\ 0 \le a,b,c,d \le t-1, a \ne 0$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа t.

Ответ: $\binom{t-1}{4}$

Критерии:

Получен общий вид интересного числа: от -. (3 балла)

Доказано, что таких пар интересных чисел столько же, сколько и четвёрок (b_1, c_1, b_2, c_2), для которых $b_1 - c_1 \ge 2, b_2 - c_2 \ge 2, c_1 + c_2 \ge t - 1$: от $\mp$ (6 баллов)

Решения и критерии, 9-10 класс.

Во всех критериях пропущено в виду самоочевидности, что полное решение стоит полный балл.

№1

Условие. В этой задаче запись $x \mod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n-1$, что $x-y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f\big((x^2+1) \mod 7\big) = \big(f(x)^2+1\big) \mod 11\,?$$

Автор: В.Тиморин

Решение. См. решение и критерии задачи 11.1.

№2

В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины ломанных BAC, ABC, ACB соответветсвенно (точка называется серединой ломанной если принадлежит ломанной и делит ее на две ломанных равной длины). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через одну точку.

Автор: Из материалов тренировочного лагеря сборной Израиля на международну олимпиаду

Общая преамбула ко всем трем решениям. Пусть стороны треугольника $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Не умаляя общности, $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда A_2 лежит на отрезке AB, причём $AA_2 = \frac{c-b}{2}$. Точка B_2 лежит на отрезке AB, причём $BB_2 = \frac{c-a}{2}$. Точка C_2 лежит на отрезке AC, причём $CC_2 = \frac{b-a}{2}$.

Решение 1. Заметим, что условие задачи не симметрично. Исправим это. Найдем, где на прямой CA лежит точка A_3 – пересечение с прямых CA и A_1A_2. Обозначим отрезок $AA_3 = x$, положительное направление в сторону, противоположную точке C. Тогда т. Менелая для точек A_1, A_2, A_3 в треугольнике ABC гласит:

$$\frac{AA_2}{A_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CA_3}{A_3A} = \frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{c+b}{2}}\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{\quad}{-x} = -1.$$

после стандартных преобразований получаем $x = \frac{c-b}{2}$. Поскольку $AA_2 = AA_3$, прямая A_3A_2 перпендикулярная внешней биссектрисе угла , то есть параллельна внутренней. Следовательно, она является биссектрисой угла $B_1A_1C_1$. Аналогично, прямые B_1B_2 и C_1C_2 – биссектрисы углов треугольника $B_1A_1C_1$ и значит все три прямые пересекаются в центре вписанной окружности треугольника $B_1A_1C_1$.

Решение 2. Назовём вневписанные окружности, касающиеся отрезков BC, CA, и AB, W_A, W_B, W_C соответственно. Заметим, что точка A_2 - середина $b+x$ отрезка между точками касания W_C с отрезком AB и W_B с продолжением луча BA за точку A. Точка A_1 – середина отрезка между точками касания W_C с продолжением луча за и W_B с продолжением луча BC за C. Значит, A_1A_2 - радикальная ось окружностей W_B и W_C. Аналогично, получаем, что прямые B_1B_2 - радикальная ось W_A, W_C, C_1C_2 - радикальная ось W_A, W_B. Значит прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке - радикальном центре окружностей W_A, W_B, W_C.

Решение 3. Посчитаем, в каком отношении отрезки A_1A_2 и C_1C_2 делят отрезок B_1B_2. Применим теорему Менелая для треугольника AB_1B_2 и секущей C_1C_2. Получим

$$\frac{AC_1}{C_1B_2}\cdot\frac{B_2X}{XB_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_2A}=\frac{c/2}{a/2}\cdot\frac{B_2X}{XB_1}\cdot\frac{-a/2}{(a+b)/2}=-1,$$

где X - точка пересечения B_1B_2 и C_1C_2, здесь и далее длины всех отрезков на промях AB, BC, AC считаются комбинированием формул из преамбулы. Итак, $\frac{B_2X}{XB_1}=\frac{a+b}{c}$ Теперь пусть X' – точка пересечения B_1B_2 и A_1A_2. Треугольники A_1B_1X' и A_2B_2X' подобны (A_1B_1 – средняя линия в треугольнике ABC), $\frac{B_2X'}{X'B_1}=\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=\frac{(a+b)/2}{c/2}$. Значит, $X=X'$, ч.т.д.

Критерии. А0 решение задачи в частном случае (например, если ABC – равнобедренный): $-$ и 0 баллов. Недоведенный счет в координатах (или любым другим стандартным методом): 0 баллов.

№3

Условие. Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\frac{\pi}{10}$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1<p<2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 2 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Автор: Г.Челноков

Решение. См. решение задачи 11.2.

Критерии. Внимание! хотя задача та же, что в 11 классе, критерии отличаются.

А0 Правильный ответ без доказательства $-$ и 0 баллов. Любые стратегии без доказательства оптимальности (или с неверным доказательством оптимальности) $-$ и 0 баллов. Верно доказанная лемма, что не выгодно ставить одновременно на оба цвета – 0 баллов (однако и решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно, приравнивается к полному).

А2 Верно разобран случай, когда остались два шара одного цвета и один – другого: $\mp$ и 5 баллов.

А5 Есть процедура заполнения таблички, аналогичная приведеной в решении: $+/2$ и 10 баллов.

А7 Арифметическая ошибка при наличии всех этапов решения и верной логике: $\pm$ и 15 баллов.

А8 Решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно: $+$. и 20 баллов.

№4

Условие. Напомним, что *запись числа n в t-ичной системе счисления* это представление $n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_0}=a_kt^k+a_{k-1}t^{k-1}+\cdots+a_0$, где a_i – целые числа от 0 до $t-1$, причем a_k – не ноль. Назовем четырехзначное число $\overline{abcd}$ интересным если $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$. Найдите количество пар интересных чисел, сумма которых – тоже интересное число (как функцию от t).

Авторы: А.Горбунов, Г.Челноков

Решение. На протяжении этого решения число сочетаний из n по k обозначается $\binom{n}{k}$, читателей, более привыкших к нотации C_n^k просим обращать внимание на “перевернутый” порядок индексов: $\binom{n}{k}=C_n^k$.

Итак, нам требуется найти число пар $N_1=\overline{a_1b_1c_1d_1}$ и $N_2=\overline{a_2b_2c_2d_2}$, таких что $N_1+N_2=\overline{a_3b_3c_3d_3}$, причем выполняются три соотношения $\overline{b_ic_i}=\overline{a_ib_i}+\overline{c_id_i}$ при $i\in\{1,2,3\}$.

Наше решение задачи состоит из двух этапов:

Утверждение 1. Пары (N_1, N_2) биективно соответствуют четверкам (b_1, c_1, b_2, c_2), таким что $b_1 - c_1 \geqslant 2$, $b_2 - c_2 \geqslant 2$ и $c_1 + c_2 \geqslant t-1$.

Комментарий 1. Говоря более развернуто, в Утверждении 1 сказано следующее: у каждой удовлетворяющей условию задачи пары (N_1, N_2) их цифры (b_1, c_1, b_2, c_2) таковы, как сказано в Утверждении 1, и обратно, каждая четверка (b_1, c_1, b_2, c_2), удовлетворяющая условию Утверждения 1, ровно одним способом достраивается до пары $(N_1 = \overline{a_1b_1c_1d_1},\ N_2 = \overline{a_2b_2c_2d_2})$, удовлетворяющей условию задачи.

Утверждение 2. Количество четверок (b_1, c_1, b_2, c_2), удовлетворяющих условиям Утверждения 1, есть в точности $\binom{t-1}{4}$.

План решения намечен, осталось его осуществить.

Лемма 1. Всякое интересное число имеет вид:

$$N = \overline{(b-c-1)bc(t-b+c)}$$

где $0 \leqslant b, c \leqslant t-1$ и $b - c \geqslant 2$. И обратно, всякая запись такого вида является корректной записью в t-ичной системе счисления интересного числа.

Доказательство. Условие, что число $N = \overline{abcd}$ является интересным есть $\overline{bc} = \overline{ab} + \overline{cd}$, или эквивалентно

$$(t-1)(b-c) - ta - d = 0 \quad (*).$$

Значит, по заданному значению $b-c$ пара (a, d) восстанавливается не более чем одним способом, иначе число $(t-1)(b-c)$ имело бы больше одной записи в t-ичной системе счисления. Но заметим, что при подстановке $a = b-c-1,\ d = t-b+c$ равенство верно тождественно, кроме того, $a \geqslant 1$ (за это отвечает условие $b - c \geqslant 2$), неравенства $a \geqslant t-1$ и $0 \geqslant d \geqslant t-1$ очевидно следуют из $0 \geqslant b, c \geqslant t-1$. □

Доказательство утверждения 1. Пусть $N_1 = \overline{a_1b_1c_1d_1}$ и $N_2 = \overline{a_2b_2c_2d_2}$ – два интересных числа. Рассмотрим "t-ичную запись без переносов" $\overline{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)(d_1+d_2)}$, она конечно же может и не быть правильной t-ичной записью, поскольку некоторые из "цифр" могут быть больше t; но она удовлетворяет равенству (*), поскольку ему удовлетворяют $\overline{a_1b_1c_1d_1}$ и $\overline{a_2b_2c_2d_2}$. Посмотрим, что происходит, когда мы "вспоминаем", что надо сделать перенос. Если перенос из разряда единиц, то d уменьшается на t, а c увеличивается на 1, значит всего левая часть (*) увеличивается на 1. Аналогично если перенос из разряда t — то c уменьшается на t и b увеличивается на 1, всего левая часть (*) увеличивается на $t^2 - 1$. Аналогично при переносе из разряда t^2 левая часть (*) уменьшается на t^2. Заметим, что из одного разряда не может быть сделано больше одного переноса: то что стоит в разряде есть сумма двух цифр, плюс возможно единичка, пришедшая из переноса – это точно меньше $2t$. Значит, если соотношение (*) выполнялось до всех переносов и выполняется после всех – то либо не было сделано ни одного переноса, либо были сделаны все три. Докажем, что первый вариант невозможен.

В самом деле, $a_1 + d_1 = t-1$ по Лемме 1, аналогично $a_2 + d_2 = t - 1$. Но если из разряда единиц не было переносов, из разряда t^3 его тоже не было (число осталось четырехзначным), тогда сумма цифр в этих разрядах сейчас равна $a_1 + d_1 + a_2 + d_2 = 2(t-1)$. Но такую сумму двумя цифрами можно набрать единственным образом: $(t-1) + (t-1)$. То есть $a_1 + a_2 = t-1$. По Лемме 1 это означает $b_1 - c_1 + b_2 - c_2 = t+1$, то есть $b_1 + b_2 \geqslant t+1$ – тогда из разряда t^2 есть перенос – противоречие!

Итак, должны осуществиться ровно три переноса. Докажем, что это эквивалентно условию $c_1 + c_2 \geqslant t-1$. В разряде единиц стоит $2t - b_1 - b_2 + c_1 + c_2 \geqslant 2 + c_1 + c_2$ – при $c_1 + c_2 \geqslant t-1$ перенос есть; в разряде t стоит $c_1 + c_2 + 1$ (единичка пришла от переноса) – перенос есть тогда и только тогда, когда $c_1 + c_2 \geqslant t-1$; в разряде t^2 стоит $b_1 + b_2 + 1 \geqslant c_1 + c_2 + 5$ – при $c_1 + c_2 \geqslant t-1$ перенос есть, наконец из разряда t^3 переноса нет когда он есть из разряда единиц. □

Для Утверждения 2 мы приведем комбинаторное доказательство.

Комбинаторное доказательство Утверждения 2 с наводящими соображениями. Напомним, что выражение $\binom{n+k}{k}$ считает способы расставить в ряд n белых и k черных шаров. Научимся через такие функции выражать ответы в задачах типа нашей, начнем с более простой.

Поучительный пример 1. Пусть мы хотим перечислить пары (c_1, c_2), такие что $0 \leqslant c_1, c_2 \leqslant t-1$ и $c_1 + c_2 \geqslant t-1$. Построим для этого биекцию между такими парами, и расстановками в ряд двух черных и $t-1$ белого шарика следующим образом: для расстановки посчитаем число белых шариков, стоящих правее левого черного шарика (не важно до или после правого черного) – назовем это число c_1; аналогично посчитаем число белых шаров, стоящих левее правого черного – назовем это число c_2. Очевидно, оба числа лежат в заказанных пределах, притом $c_1 + c_2 \geqslant t-1$ — каждый белый шарик посчитан хотя бы один раз, те что стоят между черными посчитаны дважды. Оставляем читателю додумать, почему построена именно биекция, то есть по паре (c_1, c_2) можно построить расстановку шариков в ряд, притом ровно одну. Итак, количество таких пар (c_1, c_2) есть в точности $\binom{t+1}{2}$.

Поучительный пример 2. Отлично, усложним задачу. Пусть мы ищем число четверок (b_1, c_1, b_2, c_2), таких что $0 \leqslant b_1, c_1, b_2, c_2 \leqslant t-1$, $b_1 \geqslant c_1$, $b_2 \geqslant c_2$ и наконец $c_1 + c_2 \geqslant t-1$. Давайте смотреть на расстановки в ряд четырех черных шаров и $t-1$ белого. Первый черный шар будет отвечать за b_1, второй за c_1, для каждого из них соответствующими числами мы будем называть число белых шаров вправо от них, тогда автоматически получится, что $b_1 \geqslant c_1$ (всякий белый шар, который правее второго слева черного, также правее и первого слева черного). Аналогично третий и четвертый черные шары отвечают за числа c_2 и b_2 соответственно, причем числа равны количеству белых шаров левее соответствующего черного. Аналогично имеем $b_2 \geqslant c_2$ а также $c_1 + c_2 \geqslant t-1$ полностью аналогично прошлому примеру. Итак, количество таких четверок (b_1, c_1, b_2, c_2) есть в точности $\binom{t+3}{4}$.

А теперь собственно то, что нам нужно. Напомним: мы ищем число таких четверок (b_1, c_1, b_2, c_2), что $0 \leqslant b_1, c_1, b_2, c_2 \leqslant t-1$, $b_1 \geqslant c_1 + 2$, $b_2 \geqslant c_2 + 2$ и наконец $c_1 + c_2 \geqslant t-1$. Чтобы действовать как в примере 2 нам нужно было бы пересчитать расстановки в ряд 4 черных и $t-1$ белого шара, такие что между первым и вторым черными стоят хотя бы два белых, и между третьим и четвертым черными стоят хотя бы два белых. Сделаем это так: перечислим все расстановки в ряд четырех черных и $t-5$ белых, таких расстановок ровно $\binom{4+t-5}{4} = \binom{t-1}{4}$. Теперь в каждую из расстановок добавим два белых шара между первым и вторым черными, и два белых между третьим и четвертым черными. Оставляем читателю доказать, что построена биекция между множеством всех расстановок четырех черных и $t-5$ белых, и множеством расстановок с приведенным выше дополнительным условием четырех черных и $t-1$ белого. $\square$

Заметим, что возможно и чисто алгебраическое доказательство утверждения 2, которое мы не приводим по двум причинам: во-первых, оно ничем не хорошо по сравнению с комбинаторным, но технически существенно сложнее. Во-вторых, никто из участников, пытавшихся пройти этим путем, к завершению не подошел даже близко.

Критерии.

A0 Попытка для частных значений t решить задачу перебором: 0 баллов. Найдено количество интересных чисел вместо того, что спрашивалось в задаче: 0 баллов (но на этом пути могут быть получены промежуточные результаты, подпадающие под действие критерия A3 и оцениваемые по нему).

A3 Доказано, что интересное число задается двумя своими цифрами, получено выражение через эти цифры двух оставшихся и выписаны неравенства, которым должны удовлетворять генерирующие цифры. Например:

- для a и b выражаются как $c = b - a - 1$, $d = t - a - 1$, причем $1 \leqslant a \leqslant t-1$, $0 \leqslant b \leqslant t-1$, $b - a \geqslant 1$;
- для b и c выражаются как $a = b - c - 1$, $d = t - b - c$, причем $0 \leqslant b, c \leqslant t-1$, $b - c \geqslant 2$;
- для b и d выражаются как $a = t - 1 - d$, $c = b + d - t$, причем $0 \leqslant b$, $d \leqslant t-1$, $b + d \geqslant t$;

8 баллов. Подчеркнем, что выражения двух оставшихся цифр без неравенства на две генерирующие не стяот ничего.

B3 Доказано, что при если сложении двух интересных чисел получается интересное, то есть переносы хотя бы в двух разрядах: 8 баллов (аддитивно с A3, итого A3+B3=16). Что в этом случае есть все три переноса – не приносит дополнительных баллов.

№5

Условие. M - середина стороны BC треугольника ABC. Касательные, проведённые из M к вписанной окружности треугольника ABC, касаются этой окружности в точках P, Q. Касательные из M к вневписанной окружности ABC, касающейся стороны BC, касаются этой окружности в точках R, S. Прямые PQ, RS пересекаются в точке X. Оказалось, что $AX = AM$. Найдите угол BAC.

Авторы: А.Заславский, М.Дидин

Решение. План решения: мы докажем два ключевых факта: что биссектриса AL угла BAC также является биссектрисой угла XAM; и что AX перпендикулярна BC. Тогда в треугольнике ABC медиана AM и высота AX симметричны относителдьно биссектрисы AL – отсюда мы выведем, что угол A прямой.

Через Ω_1 и Ω_2 обозначим вписанную и вневписанную окружность из условия соответсвенно, через I_1 и I_2 – их центры. Пусть P – та из точек касания P, Q, что лежит на стороне BC, аналогично пусть R лежит на BC. Введя обозначения для длин сторон треугольника и явным образом выразив отрезки, на которые точки касания вписанной и вневписанной окружности делят стороны треугольника, можно показать что $PM = MR$ (оставляется читателю). Значит все четыре точки P, Q, R, S лежат на окружности Γ с центром M и радиусом PM.

Точка X лежит на радикальной оси (для пересекающихся окружностей – просто прямой через общие точки) окружностий Ω_1 и Γ; аналогично X лежит на радикальной оси окружностий Ω_2 и Γ; значит X лежит и на радикальной оси Ω_1 и Ω_2. Но M тоже лежит на этой радикальной оси, поскольку касательные из M равны. Значит, XM – радикальная ось Ω_1 и Ω_2, тогда она перпендикулярна биссектрисе AL угла BAC. Поскольку $AX = AM$, в равнобедренном треугольнике высота AL является биссектрисой. Первый ключевой факт доказан.

Заметим что прямая QR перпендикулярна PQ (это ясно, если вспомнить определение окружности Γ), значит QR проходит через точку P', симметричную точке P отнисительно I_1.

Лемма 1. Пусть в треугольнике вписанная окружность W с центром I и вневписанная окружность W_A с центром I_A касаются стороны в точках P, R соответственно. Точка P' симметрична P относительно I. Точка R' симметрична R относительно I_A. Тогда точки A, P, R' лежат на одной прямой, а также точки A, P', R лежат на одной прямой.

Доказательство. Но другое описание точки P' таково: если рассмотреть гомотетию с центром в A, переводящую Ω_2 в Ω_1, то образом точки R будет точка P'. Значит, при этой гомотетии прямая QR (она же $P'R$) остается на месте, значит эта прямая проходит через точку A. □

Итак, PQ - высота треугольника APR. Аналогично и RS – высота треугольника APR, значит – его ортоцентр, то есть прямая AX перпендикулярна прямой PR, она же BC. Второй ключевой факт доказан.

Итак, в треугольнике ABC высота и медиана из вершины A симметричны относительно биссектрисы из этой вершины. Тогда угол A прямой. Это следует из

Лемма 2. В произвольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O прямая, содержащая высоту AH и прямая AO симметричны относительно биссектрисы угла A.

Доказательство оставляем читателю в качестве полезного упражнения. Указание: посчитайте углы через дуги.

Критерии.

А0 Недоведенный счет в координатах, решение задачи при дополнительных предположениях: 0 баллов.

А1 Отмечено, что четырехугольник $PQRS$ – вписанный: 2 балла.

А2 К предыдущему добавлено, что точка X – радикальный центр трех одружностей: вписанной, вневписанной и описанной около $PQRS$: 5 баллов.

А3 X – ортоцентр APR: 10 баллов.

А5 Доказано, что биссектриса угла BAC также является биссектриссой угла XAM: 15 баллов.

Баллы за разные пункты не скалдывается, меньшие уже включены в большие.

№6

Условие. Рассматриваются всевозможные наборы действительных чисел $x_1, \ldots, x_{2021}$, не превосходящих по модулю 1, с суммой 0. Для какого наименьшего C можно любой такой набор расставить по кругу так, что сумма чисел на любой дуге будет по модулю не больше C?

Автор: фолклор

Решение. Ответ: $2 - \frac{2}{1011}$.

Докажем что $C \geqslant 2 - \frac{2}{1011}$. Рассмотрим набор из 1010 чисел -1, и 1011 чисел $\frac{1010}{1011}$. Ясно что при любой расстановке по кругу два положительных окажутся рядом, значит найдется дуга с суммой $\frac{2020}{1011}$.

Покажем, что при любом количестве чисел n верна оценка $C(n) \leqslant 2 - \frac{2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}$. Доказывать это будем, как ни странно, индукцией по n.

База при $n = 1, 2, 3$ проверяется непосредственно.

Так же заметим, что для расстановки чисел по кругу условие, что сумма на любой дуге по модулю не больше C, эквивалентно условию, что для произвольной позиции на круге множество сумм по всем дугам, имеющим левый конец в этой позиции, умещается на отрезке длины C. Этой переформулировкой мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма. Определим операцию преобразования набора: заменим в наборе два числа разных знаков a и $-b$ (пусть $a, b \geqslant 0$) на одно число $a - b$. Тогда если полученный набор допускает расстановку для некоторого числа C и выполняется $a + b \leqslant C$, то исходный допускал расстановку для C.

Доказательство. Расставим по кругу преобразованный набор, и воспользуемся переформулированным условием, начиная от позиции, на которой стоит добавленное число $a - b$. Тогда по переформулированному условию все суммы дуг, начинающихся в этой позиции (включая сумму, равную нулю) покрываются отрезком длины C. Тогда в этот отрезок попало и одно из чисел a и $-b$, поскольку они не могут лежать с разных сторон от отрезка – расстояни между ними равно $a + b$, то есть не превосходит длинны отрезка. Если попало число a – заменим $a - b$ на числа $a, -b$ (в таком порядке), у полученной расстановки те же суммы, что у исходной, и еще сумма a, лежащая где нужно. Аналогично заменим $a - b$ на числа $-b, a$ если попало $-b$. □

Теперь докажем индукционный переход. Рассмотрим набор из n чисел не больших 1 по модулю с суммой 0. Рассмотрим наименьшие по модулю положительное и отрицательное число. Если их сумма модулей не больше $\frac{2\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}$ – то можно воспользоваться Леммой. Пусть их сумма больше.

Тогда это возможно при четном n только если положительных и отрицательных поровну. Тогда разобьем их на пары, как при доказательстве Леммы. Тогда сумма чисел в каждой паре (то есть “новое” число) по модулю не превосходит $\frac{2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}$. Наша задача расположить их по кругу так, чтобы для некоторой позиции A сумма по любой дуге с левым концом в A лежала бы на отрезке $[0, \frac{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}]$, это очевидно можно сделать. Теперь вспомним, что каджое новое число это на самом деле два старых, и расположим эти старые в порядке положительное-отрицательное. Добавились суммы, получающиеся из старых добавлением одного из первых чисел пары, то есть не более чем единицы. Поскольку все старые суммы лежали на отрезке длины $\frac{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}$, теперь все суммы лежат на отрезке длины $1 + \frac{\lfloor (n+2)/2 \rfloor - 2}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor}$, что и требовалось.

Пусть $n = 2k - 1$, тогда сумма модулей наименьших по модулю положительного и отрицательного чисел может быть слишком большой только если количество положительных и отрицательных чисел отличается на единицу. Без ограничения общности пусть положительных k. Каждое положительное число, кроме самого маленького, объединим в пару с отрицательным. Получили набор из k чисел (оставшееся положительное и $k - 1$ сумм в парах, суммы в парах по модулю не больше $\frac{2}{k-1}$), оставшееся положительное обозначим X, естественно $\frac{k-2}{k} \geqslant X \geqslant \frac{k-1}{k}$. Мы хотим эти числа расставить по кругу с началом отсчета так, чтобы последним стояло X, а все суммы кроме суммы $k - 1$ пары лежали на отрезке $[-\frac{k-2}{k-1}X, 0]$. Для этого сначала выберем пару, которая встанет $k - 1$-й по номеру: достаточно взять ее меньше либо равной чем $-\frac{1}{k-1}X$, а такая найдется из среднего значения. Затем все остальные пары расставить как угодно, чтобы из сумма не выходила из коридоа – это возможно, потому что модуль чисел маленький.

Теперь перейдем от расстановки пар к расстановки исходных чисел, поставив числа в каждой паре в порядке отрицательное-положительное. Поскольку до этого все суммы лежали на отрезке $[-\frac{k-2}{k-1}X, 0]$, значит и на отрезке $[-\frac{k-2}{k}, 0]$, теперь они лежат на отрезке $[-1-\frac{k-2}{k}, 0]$ – победа.

Критерии.

A В направлении примера (т.е. доказательства, что $C \geqslant \frac{2020}{1011}$). Пример, показывающий что для меньшего C не работает – $\mp$ и 13 баллов. Любые меньшие значения C: 0 баллов.

B Продвижения в направлении оценки.

B0 Любае оценка не сильнее чем $|a|+|b|$ где a – Максимальное из положительных чисел, а b – минимальное (т.е. максимальное по модулю) из отрицательных: $+0$ баллов. Любой алгоритм расстановки, обеспечивающий лишь что, что сумма на дугах с одним фиксированным концом не больше C: $+0$ баллов.

Решения и критерии, 11 класс.

Во всех критериях пропущено в виду самоочевидности, что полное решение стоит полный балл.

№1

Условие. В этой задаче запись $x \mod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n-1$, что $x-y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f\big((x^2+1) \mod 7\big) = \big(f(x)^2+1\big) \mod 11\,?$$

Автор: В.Тиморин

Решение. Стандартным ходом при решении задач на функциональные уравнения является подставить какое-то значение переменной, при котором два часто возникающих и не равных друг-другу тождественно выражения оказываются равны, и посмотреть, какие следствия из этого удастся вывести. Применительно к данной задаче на роль такой подстановки просится значение x_0, для которого выполнялось бы $x_0 = x_0^2+1 \mod 7$.

Задумаемся, а существует ли такое x_0? Условие равносильно квадратному уравнению в остатках: $x_0^2 - x_0 + 1 \equiv 0$ (в этом абзаце все сравнимости по модулю 7), эквивалентно $x_0 \equiv \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \equiv \frac{1\pm\sqrt{-3+7}}{2} \equiv \{\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\} \equiv \{\frac{3+7}{2}, \frac{-1+7}{2}\} \equiv \{5,3\}$. Или можно было просто перебором остатков, благо их всего 7, убедиться, что любой из 3 и 5 подходят.

Что же нам дает равенство $3 = 3^2+1 \mod 7$? Просится от обоих частей взять функцию f, а затем воспользоваться условием задачи. Имеем: $f(3) = f\big((3^2+1) \mod 7\big) =$
$= \big(f(3)^2+1\big) \mod 11$. Чтобы подчеркнуть полученное, обозначим $f(3) = y$ и выбросим среднюю часть: $y = \big(y^2+1\big) \mod 11$. Отсюда следует $y^2 - y + 1 \equiv 0$ (в этом абзаце все сравнимости по модулю 11), отметим что это именно следствие а не равносильность. Выясним, имеет ли сравнимость решения, действуя стандартно $y \equiv \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$. А извлекается ли квадратный корень из -3 по модулю 11? Заметим что $1^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv (-4)^2 \equiv 5$ и $5^2 \equiv (-5)^2 \equiv 3$. Мы перебрали все остатки, среди квадратов не нашлось -3, значит корень не извлекается, значит уравнение $y^2 - y + 1 \equiv 0$ не имеет решений.

Итак, требуемой функции f не существует.

Критерии.

А0 Правильный ответ без доказательства -. и 0 баллов

А9 Есть все, кроме доказательства того, что нужный остаток не является квадратичным вычетом по модулю 11, или любое эквивалентное утверждение (данный квадратный трехчлен не имеет корней по модулю 11), про которое указан способ проверить его конечной последовательностью вычислений: +. и полный балл.

Обратите внимание: под данный критерий не попадают утверждения, не имеющия явной отсылки к модулю, по которому могут быть доказаны конечным перебором. Типичный пример – утверждение “число вида $44k-3$ при целом k не может быть квадратом целого числа” не подпадает под данный критерий.

№2

Условие. Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\frac{\pi}{10}$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1 < p < 2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 3 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Автор: Г.Челноков

Решение. Заполним табличку: в клетке (i, j) запишем, на какое максимальное число Вася может гарантированно к концу игры умножить имеющуюся у него сейчас сумму, если сейчас в ящике осталось i черных и j красных шаров. Легко понять, что стоит с краю: если уже не осталось черных шаров, то Вася может смело ставить все деньги на красный шар, соответственно увеличивая капитал в p раз за каждый из оставшихся красных шаров. Аналогично если не осталось красных. Это и отмечено в таблице ниже.

3	p^3			
2	p^2			
1	p			
0	1	p	p^2	p^3
Черных шаров / Красных шаров	0	1	2	3

Теперь поймем, что должно стоять в клетке (i, j) если мы уже знаем, что в клетках $(i-1, j)$ и $(i, j-1)$ стоят числа x и y соответственно. Пусть для определенности $x \leqslant y$.

Во-первых, в оптимальной стратегии Вася не должен делать положительные ставки на оба исхода. В самом деле, пусть по своей стратегии он должен сейчас поставить суммы a и b, причем $a \geqslant b > 0$. Тогда пусть вместо этого он поставит $a - b$ денег на тот исход, на который должен был ставить a, и на $2b$ больше денег оставит не поставленными. Тогда при любом исходе он будет иметь на $(2 - p)b$ денег больше, чем имел бы, если бы ставил a и b.

Теперь поймем, сколько же Вася должен ставить. Ставить он должен на тот цвет, выпадание которого приводит в клетку с числом x (напомним, $x \leqslant y$), в противном случае если этот цвет выпадет, Вася не сможет увеличить свой капитал более чем в x раз, а мы строим стратегию лучше. Для определенности обозначим количество васиных денег через D и пусть он поставит εD денег на цвет, выпадение которого приводит в клетку с числом x. Тогда если выпал этот цвет – Вася оказался в этой клетке имея $(1 + (p-1)\varepsilon)D$ денег, соответственно закончит игру, имея не менее $(1 + (p-1)\varepsilon)xD$ денег (и не может гарантированно иметь больше). Если же выпал цвет, приводящий в клетку с числом y, Вася попал туда, имея $(1-\varepsilon)D$ денег, значит закончит игру, имея не меньше $(1-\varepsilon)yD$ денег (и не может гарантированно иметь больше). Итак, гарантированный минимум при этой стратегии есть $\min((1 + (p-1)\varepsilon)xD, (1-\varepsilon)yD)$. Поскольку первая из функций под минимумом возрастающая по ε, а вторая – убывающая, максимум минимума достигается при значении ε, для которого функции принимают одно значение. Имеем

$$(1 + (p-1)\varepsilon)xD = (1-\varepsilon)yD;$$

откуда $\varepsilon = \frac{y-x}{y+(p-1)x}$. То есть $(1 + (p-1)\varepsilon)xD = (1-\varepsilon)yD) = \frac{pxy}{y+(p-1)x}D$. Иными словами, в интересующей нас клетке должно стоять число $\frac{pxy}{y+(p-1)x}$. Пользуясь этой формулой и значениями в клетках на краях, заполним всю табличку:

3	p^3	$\frac{p^4}{3p-2}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$
2	p^2	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$
1	p	p	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^4}{3p-2}$
0	1	p	p^2	p^3
Черных шаров / Красных шаров	0	1	2	3

Критерии.

А0 Правильный ответ без доказательства − и 0 баллов. Любые стратегии без доказательства оптимальности (или с неверным доказательством оптимальности) − и 0 баллов. Верно доказанная лемма, что не выгодно ставить одновременно на оба цвета – 0 баллов (однако и решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно, приравнивается к полному).

А3 Верно разобрана стратегия от момента, когда остались два шара одного цвета и один другого: ∓ и 8 баллов.

A7 При верной логике решения на последнем шаге допущена арифметическая ошибка, приведшая к неверному ответу: $\pm$ и 14 баллов.

A8 Решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно: +. и 17 баллов.

№3

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается вписанной и соответствующей вневписанной окружностей в точках T_1, T_2 соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках S_1, S_2 соответственно. Докажите, что $\angle S_1CT_1 = \angle S_2CT_2$.

Автор: А. Заславский

Решение. Введем обозначения для длин сторон: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Сделаем инверсию с центром и радиусом $R = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$ с симметрией относительно биссектрисы угла C. Гипотенуза и окружность Эйлера треугольника переходят друг в друга. В самом деле, середины сторон прямоугльного треугольника и вершина его прямого угла образуют лежат в вершинх прямоугольника, значит все четыре на одной окружности. Значит при онверсии образ окружности – прямая, легко посчитать, что эта прямая отсекает от лучей CA и CB отрезки длины a и b соответственно, то есть симметрична AB относительно биссектрисы угла A.

Лемма. Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC переходят друг в друга.

Доказательство. Действительно, касательная из к вписанной окружности равна её радиусу r, а касательная из к вневписанной окружности равна полупериметру p. Таким образом, их произведение $pr = S(ABC)$ – площади треугольника ABC. Итак, $pr = R^2$. □

Следовательно T_1 переходит в S_2, а T_2 переходит в S_1. Угол $\angle S_1CT_1$ переходит в угол $\angle S_2CT_2$, значит они равны.

Критерии. A7 полное решение за исключением доказательства, что при инверсимметрии вписанная окружность переходит во вневписанную: $\pm$ и 18 баллов.

№4

Найдите все действительные числа d, для которых существуют многочлены от одной переменной P и Q, такие что равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

выполняется при всех значениях x кроме конечного числа.

Автор: Г. Челноков

Первое решение. Сразу заметим, что при $d = 0$ равенство из условия невозможно, так что далее мы везде считаем, что $d \neq 0$ даже когда не напоминаем об этом явно. (это тривиальное замечание, но если его не сделать – можно потерять немного баллов)

Предположим, что такие многочлены P и Q нашлись. Тогда можно считать, что они взаимнопросты (иначе поделим оба на общий множитель – новая пара тоже удовлетворяет условию), и у Q старший коэффициент равен 1 (домножим P и Q на константу , чтобы старший коэффициент стал равен 1). Введем обозначение для разложения Q на линейные множители (естественно, воспользовавшись существованием такого разложения в комплексных числах):

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}.$$

Далее нам потребуется известное утверждение о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей.

Лемма (о разложении на простейшие дроби). *Существует и единственно представление вида*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{P_k(x)}{(x-\alpha_k)^{n_k}}; \qquad (*)$$

где степень $P_i(x)$ меньше n_i при $1 \leqslant i \leqslant k$, причем $P_i \neq 0$.

Это стандартный факт, доказательство которого можно прочесть во многих учебниках, и даже в Википедии в статье “Разложение рациональной дроби на простейшие”.

Для комплексного числа α множество чисел вида $\alpha+md$, где $m \in \mathbb{Z}$ – целое, будем называть *цепью* числа α.

Ключевое утверждение: если α – корень Q, то числа 0 и 1 принадлежат цепи α.

Доказательство. Пусть α – корень Q, тогда обозначим через m_- и m_+ такие минимальное и максимальное значения m, при которых $\alpha + md$ является корнем Q. Заметим, что m_- и m_+ определены корректно: множество значений m не пусто (поскольку 0 подходит) и конечно, поскольку у Q конечное число корней (первое место, в котором важно, что $d \neq 0$). Тогда пусть не оба числа 0 и 1 лежат в цепи α. Тогда одно из двух чисел $\alpha + (m_- - 1)d$ и $\alpha + m_+d$ не является ни 0 ни 1 (второе место: нам важно, что $\alpha + (m_- - 1)d$ и $\alpha + m_+ + d$ – два разных числа). Рассмотрим эти два случая.

Пусть $\alpha + m_+d = \alpha_i$ – не равно ни 0 ни 1. Посмотрим на равенство из условия

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

и разложим левую часть на простейшие дроби. Поскольку α_i – корень Q, в разложение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ входит член со знаменателем $(x-\alpha_i)^{n_i}$ и ненулевым числителем. Но α_i – не корень $Q(x+d)$, иначе $\alpha_i + d = \alpha + (m_+ + 1)d$ было бы корнем $Q(x)$, что противоречило бы максимальности m_+. Тогда член со знаменателем $(x-\alpha_i)^{n_i}$ не входит в разложение $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$, значит члену с таким знаменателем слева не с чем сократиться – но он не входит в правую часть – противоречие.

Аналогично пусть $\alpha + (m_- - 1)d = \alpha_i - d$ – не равно ни 0 ни 1. Посмотрим на равенство из условия

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

и разложим левую часть на простейшие дроби. Поскольку $\alpha_i - d$ – корень $Q(x+d)$, в разложение $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$ входит член со знаменателем $(x-\alpha_i+d)^{n_i}$ и ненулевым числителем. Но $\alpha_i - d = \alpha + (m_- - 1)d$ – не корень $Q(x)$, обратное противоречило бы минимальности m_-. Тогда член со знаменателем $(x-\alpha_i+d)^{n_i}$ не входит в разложение $\frac{P(x)}{Q(x)}$, значит члену с таким знаменателем слева не с чем сократиться – но он не входит в правую часть – противоречие. $\square$

Итак, мы доказали, что если у многочлена Q есть комплексные корни, то в цепь этого корня входят числа 0 и 1, то есть выполняется равенство $d = \frac{1}{m}$ для какого-то целого m. Если же у Q нет комплексных корней, то он – ненулевая константа, то есть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$ – многочлены, тогда их разность не может равняться $\frac{1}{x(x+1)}$ (это еще одно почти тривиальное замечание, не сделав которое можно потерять немного баллов).

Осталось показать, что все значения вида $d = \frac{1}{m}$ где $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$ подходят. Для $m > 0$ достаточно взять функцию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+\frac{1}{m}} + \frac{1}{x+\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{x+\frac{m-1}{m}}$$

и привести сумму к общему знаменателю, числитель взять в качестве P а знаменатель – Q. Для $m < 0$ то же самое сделать с суммой

$$\frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x+\frac{-m-1}{-m}} + \frac{-1}{x+\frac{-m-2}{-m}} + \dots + \frac{-1}{x+\frac{1}{-m}}.$$

Критерии.

A – здесь оцениваются продвижения в построении примеров для подходящих d.

A0 Примеры только для значений 1 и -1 стоят 0 баллов.

A7 Явным образом указано Q, на коэффициенты P выписана система линейных уравнений. Сказано, что она верхнетреугольная, но нет упоминания (тем более – доказательства), что на диагонали коэффициенты не нулевые – 7 баллов.

A9 Пример при всех возможных значениях d – $\mp$ и 10 баллов.

B – здесь оцениваются продвижения в доказательстве, что не подходят все не подходящие значения d. Все пункты с этой литерой аддитивны с серией А.

B3 При альтернативном пути решения доказано, что существует некоторый многочлен $R(x)$ (степень которого не зависит от d), такой что $R(x)Q(x)$ делится на $Q(x+d)$ – 10 баллов.

B4 Доказано, что $(x+1)Q(x)$ делится на $Q(x+d)$: 15 баллов.

B6 В лемме о разложении на простейшие нет упоминания, что числитель у любого корня ненулевой – 11 баллов.

B8 Лемма о разложении на простейшие дроби сформулирована но не доказывалась или доказывалась неверно – то же, что в В9

B9 Полное доказательство, что подходят только эти значения d: 22 балла (в сумме с А9 дает максимальный балл по задаче).

№5

Через $X(\alpha)$ будем обозначать точку с координатами $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (все такие лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Выбрали произвольный угол ϕ и провели хорды $P(\phi)P(2022\phi)$, $P(2022\phi)P(2022^2\phi), \ldots$ (на шаге номер n проводится хорда $P(2022^{n-1}\phi)P(2022^n\phi)$). Если хорда уже была проведена – она не проводится второй раз. Оказалось. что все проведенные хорды не пересекаются иначе чем по концам. Докажите, что всего проведено конечное число хорд.

Автор: В.Тиморин

Решение.

Нам будет полезен аналог целой части $<x>$, выражающий для двух чисел с разностью x расстояние по окружности между образами этих чисел, если намотать числовую прямую на единичную окружность: будем говорить, что $<x> = \{x\}$ при $\{x\} \leqslant \frac{1}{2}$ и $<x> = 1 - \{x\}$ при $\{x\} > \frac{1}{2}$ (здесь $\{x\}$ обозначает обычную целую часть числа x). Тогда, например, если длинна дуги между точками α и β равна ϕ, то длинна дуги между 2022α и 2022β равна $<2022\phi>$.

Предположим противное: что проведено бесконечное число хорд, но все они не пересекаются. Нам будет удобно представлять, что мы последовательно добавляем новые точки в порядке их номеров и рисуем получающиеся хорды.

Для краткости точку $P(2022^n\phi)$ будем обозначать просто P_n. Заметим, что точки не повторяются: если бы оказалось, что $P_m = P_n$ при $m > n$, то выполнялось бы $P_{m+1} = P_{n+1}$, $P_{m+2} = P_{n+2}$ и т.д., тогда число хорд было бы конечным. Итак, каждая новая точка попадает строго между ранее поставленными.

Определим по индукции понятие *активной дуги n-го шага.* Для натурального $n = 1$ будем ей считать ту из двух дуг P_0P_1, на которую попадает P_2. Заметим, что тогда все точки P_n лежат на активной дуге первого шага. В самом деле, пусть все точки от 2-й до m-й лежат на активной дуге 1-го шага, а $m+1$-я там не лежит. Тогда хорды P_0P_1 и P_mP_{m+1} пересекаются.

Теперь предположим, что мы уже индукцией по n доказали, что все точки P_m попадают на активную дугу n-го шага при $m > n$. Определим активную дугу $n+1$-го шага. P_{n+1} лежит на n-й активной дуге, значит делит ее на две части. На одну из этих частей попадает точка P_{n+2} – эту часть и будем называть активной дугой $n+1$-го шага. Тогда чтобы индукция работала нам осталось доказать, что все точки P_m лежат на этой дуге при $m \geqslant n+2$. Понятно, что концы дуги – это какие-то из предыдущих точек P, значит есть фрагмент ломанной, соединяющий их. Значит если P_m еще лежит на дуге, а P_{m+1} – уже нет, и P_{m+2} не совпадает ни с одной из предыдущих точек P (что упоминалось ранее) – значит, P_mP_{m+1} пересекается с указанным фрагментом ломанной.

Как легко видеть, каждая следующая активная дуга является подмножеством предыдущей. Более того, обозначим через ϕ_n, длину активной дуги, а через ψ_n – длину дуги $P_{n-1}P_n$ (той из двух, которая лежит внутри активной). Тогда или

$$\phi_n = \psi_n \quad \textit{или} \quad \phi_n = \phi_{n-1} - \psi_n. \quad (*)$$

Поскольку $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность положительных чисел, она имеет предел. Докажем, что этого не может быть.

Если предел равен нулю, то нулю же равен и предел последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, поскольку $\psi_n \leqslant \phi_{n-1}$. Но заметим, что $\psi_{n+1} =<2022\psi_n>$. То есть если $\psi_n \leqslant \frac{1}{4044}$, то $\psi_{n+1} = 2022\psi_n$. Кроме того, ψ_n всегда не равно нулю (иначе две точки совпали). Значит для $\varepsilon = \frac{1}{4044}$ в последовательности встречаются члены большие ε со сколm угодно большими номерами – ноль не является пределом.

Пусть пределел равен положительному числу a. Тогда по (*) последовательность ψ_n разбилась на две подпоследовательности, предел одной равен нулю, предел другой – a, причем по доказанному выше вторая содержит бесконечное число членов. Заметим, что a – неподвижная точка преобразования $\psi \to <2022\psi_n>$. Тогда аналогично $|\psi_{n+1} - a| = 2022|\psi_n - a|$ если $|\psi_n - a| \leqslant \frac{1}{4044}$.

Выберем $\varepsilon < \frac{a}{20220}$, будем говорить о числах 0 и a как о двух пределах. Начиная с какого-то номера все ψ_n должны попадать в ε-окрестность одного из двух пределов. Но тогда при переходе от ψ_n к ψ_{n+1} расстояние до предела будет расти в 2022 раза – рано или поздно ψ_n выскочит из ε-окрестности текущего предела и еще не дотянется до ε-окрестности другого предела.

Комментарии. Многие участники пытались доказывать факт, что при фиксированных α и ϕ углы вида $\alpha^n\phi$ (при всех натуральных n) всюду плотны на окружности. По-видимому, перепутав его с фактом, что для не соизмеримого с π угла α углы вида $n\alpha$ всюду плотны на окружности. Второй факт верен, первый нет.

Критерии.

A0 Утверждения вида “если $\frac{\phi}{\pi}$ рационально, то разилчных точек конечное число”, если точека повторилась то повторятся и все последующие, если точек конечное число то ихорд конечное число: 0 баллов.

A3 Четкая формулировка и доказательство леммы, что последовательность длин хорд не может иметь предел: 16 баллов.

A4 В большей общности: что последовательность длин хорд не может разбиваться на две, каждая из которых имеет предел (причем одна – нулевой): 24 балла. Либо аналогичное утверждение про последовательность точек, а не длин хордж между последовательными точками.

B3 Четкая структура решения, сводящая задачу к лемме из критерия A4, но без доказательства этой леммы: 18 баллов.

№6

Фокусник и его Ассистент готовятся показать следующий фокус. Фокуснику завяжут глаза, после чего один из зрителей напишет на доске 60-битное слово (последовательность из 60 нулей и единиц). Ассистент уверен, что сможет незаметно сообщить фокуснику 44 бита (не обязательно написанные в слове, можно вычислять любые функции). После чего Фокусник должен будет назвать слово. Для какого наибольшего числа C Фокусник и Ассистент могут придумать стратегию, позволяющую всегда назвать слово, совпавшее хотя бы в C битах с написанным зрителем.

Автор: Г. Челноков

Ответ: $C = 56$.

Докажем оценку $C \leqslant 56$. Пусть существует стратегия, позволяющая ошибаться не более чем в k битах (т.е. $C = 60 - k$). Тогда заметим, что Наблюдатель, знающий стратегию Фокусника, сообщенное Ассистентом слово, и набор бит, в которых ошибся Фокусник, может восстановить написанное Зрителем слово. В самом деле, Наблюдатель берет слово, которое должен был написать Фокусник, и меняет его в тех местах, где Фокусник ошибся. Значит количество различных пар вида “слово сообщенное Ассистентом и набор мест, в которых фокусник ошибся” не меньше, чем различных слов, которые мог написать зритель. То есть

$$2^{44}\left(\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \cdots + \binom{60}{k}\right) \geqslant 2^{60}.$$

Перепишем в виде $\left(\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \cdots + \binom{60}{k}\right) \geqslant 2^{16}$, и заметим, что при $k \leqslant 3$ неравенство неверно: $2^{16} > 64000$, но $\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \binom{60}{2} + \binom{60}{3} < 1 + 60 + \frac{60^2}{2} + \frac{60^3}{6} = 1 + 60 + 1800 + 36000$.

Теперь попробуем показать, из каких соображений строится пример. Для начала напомним конструкцию, известную как математикам так и программистам: двоичный код длины 15, позволяющий передать 11 бит полезной информации и исправить ошибку не более чем в одном бите (также известен как 15-битный код Хэмминга). Построим его.

Для начала заметим, что есть ровно 11 слов длины 4 из нулей и единиц, содержащих хотя бы две единицы (всего слов $2^4 = 16$, минус одно из одних нулей, минус четыре с одной единицей). Припишем такие слова номерам от 1 до 11 как угодно, например как в таблице:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
0011	0101	1001	0110	1010	1100	0111	1011	1101	1110	1111

Теперь построим код таким образом: в первые 11 бит запишем те биты, которые хотим передать (первые 11 позиций будем называть *информационными*). В последние 4 бита запишем следующие контрольные суммы. В 12-й запишем сумму по модулю два тех из первых 11 бит, приписанное 4-значное число которых имеет 1 в первом разряде, то есть биты №№ 3,5,6,8,9,10,11. В 13-й – сумму тех из первых 11 бит, приписанное 4-значное число которых имеет 1 во втором разряде, в 14-й – сумму бит, имеющих 1 в третьем разряде приписанного слова, в 15-й – в четвертом. Покажем, почему этот код позволяет исправить одну ошибку при передаче.

Пусть Получатель получил кодовое слово, возможно искаженное в одном бите. Получатель точно так же по первым 11 битам посчитает 4 контрольные суммы, и сравнит их с четырьмя полученными. Если совпали все четыре – то слово дошло без искажений. В самом деле, если бы исказился контрольный бит – в нем было бы расхождение, а если информационный – то расхождения были бы во всех контрольных, в которые он входит. Аналогично, если расхождение есть ровно в одном контрольном бите, то исказился именно он. В самом деле, если исказился другой контрольный – то все информационные дошли правильно, тогда в этом контрольном расхождения бы не было; а если исказился информационный, то все контрольные дошли правильно, и тогда расхождения были бы во всех контрольных, в которые входит искаженный информационный, а таких контрольных хотя бы два (именно за этим мы приписывали комбинации нулей и единиц, содержащие хотя бы две единицы). По аналогичным соображениям если получатель видит не менее двух расхождений с контрольными битами, то искажен точно информационный. Тогда достаточно из 11 информационных позиций выбрать ту, в приписанном 4-битном слове которой единицы стоят ровно на тех местах, на которых есть расхождения с контрольными суммами – это и есть искаженная позиция.

Теперь подумаем в других терминах, что же мы построили. У нас есть код из 2^{11} кодовых слов. Каждое из этих слов можно исказить 16 способами (ничего не менять, или изменить один из 15 бит). Все 16×2^{11} полученных в результате слов будут разными. В самом деле, если бы какое-то слово w получалось двумя разными способами: искажением кодового слова u_1 и искажением кодового слова u_2 (в обоих случаях – не более чем в одном бите), то код бы не исправлял одну ошибку – Получатель может получить слово w, но в этом случае не может понять, посылали ему u_1 или u_2. Итак, все 16×2^{11} слов разные, но это означает что вообще любое из слов длины 15 получается искажением какого-то из кодовых слов не более чем в одном бите.

На этом и построим стратегию Фокусника и Ассистента. Ассистент видит написанное зрителем 60-битное слово, режет его на четыре 15-битных слова w_1, w_2, w_3, w_4. Как доказано выше, для них найдутся кодовые слова u_1, u_2, u_3, u_4, такие что w_i отличается от u_i не более чем в одном символе. Тогда Ассистент выбрасывает из каждого кодового слова контрольные символы, получает четыре слова длины 11, то есть одно слово длины 44. Его он и передает Фокуснику. Фокусник восстанавливает контрольные суммы, получает слово $u_1u_2u_3u_4$, отличающееся от исходного максимум в четырех битах – победа.

Критерии.

А: эти критерии оценивают прогресс в доказательстве оценки $C \leqslant 56$.

А0 Голый ответ -. и 0 баллов. Доказательство, что $C < 60$: также 0 баллов.

А7 Получено ключевое утверждение, что если можно ошибиться не более k раз (т.е. $C = 60 - k$) то $\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \cdots + \binom{60}{k} \geqslant 2^{16}$, но не указано правильное значение k, для которого неравенство становится верным: ∓ и 18 баллов.

А9 Корректно доказанная оценка ∓ и 20 баллов.

Баллы за разные литеры складываются

B0 Построени любых алгоритмов, доказывающих $C \geqslant 52$: 0 баллов.

B3 Мечты в духе “нас бы устроил Хэминговский код с такими-то свойствами”, если требуется исправлять больше одной ошибки, и нет соображений, как его строить – 10 баллов.

B8 Пример чистый по модулю существования совершенного кода Хэминга, исправляющего одну ошибку, которое постулировано но не доказано – то же, что B9.

B9 Пример 56 — +/2 и 30 баллов (таким образом A9+B9 дает полную цену задачи)