Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

Задача считается решенной, если Вы не только указали правильный ответ, но и записали полное решение.

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

2. Существует ли четырехугольник, который можно разрезать на три равных треугольника двумя разными способами? Если не существует – докажите, если существует – постройте пример.

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

4. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек “вверх”, “вниз”, “влево” и “вправо”, причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с “вниз”), то убирает это первое “вниз”, ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался “вверх”, “вправо”, “влево”. Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

Задача считается решенной, если Вы не только указали правильный ответ, но и записали полное решение.

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

2. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

4. Треугольник со сторонами 2, 3 и 3 разрезали на четыре подобных ему треугольника. Каковы могут быть коэффициенты подобия?

5. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $1 + 2a + 2b + 2ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек "вверх", "вниз", "влево" и "вправо", причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с "вниз"), то убирает это первое "вниз", ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался "вверх", "вправо", "влево". Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Время выполнения заданий: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

Все решения и ответы должны быть обоснованы.

1. Дан куб, каждая грань которого – это клетчатое поле размером 2015 на 2015 клеток. В центре одной из граней стоит пешка. Данил и Максим передвигают пешку по клеткам куба. Данил может ходить только на соседнюю по стороне клетку (разрешается переходить на другую грань, если клетки соседние по стороне), а Максим может поставить пешку в любую клетку. Пешка красит за собой клетки. На закрашенную клетку пешку двигать нельзя. Изначальная клетка (центр грани) закрашена. Данил ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих?

2. Дан $\vee ABC,$ точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что три прямые, проходящие через эти точки и параллельные биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

3. В гномьем клане некоторые знакомы между собой. Каждый гном владеет некоторым количеством монет. Днём каждый гном узнаёт, сколько монет у каждого из его знакомых. Вечером он отдаёт по монете каждому из знакомых, кто днём был богаче него. Гном не может отдать больше, чем у него есть (например, нищий гном ничего не отдаёт). Если у гнома днём было меньше монет, чем количество знакомых богаче, чем он, то он сам решает, кому отдавать монеты. Докажите, что, начиная с какого-то дня, гномы прекратят передавать друг другу монеты.

4. На доске написаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них $ab+a+b,$ затем поступить так же с какими-то двумя из оставшихся, и так далее. Какое число может остаться последним?

5. На сколько частей могут делить плоскость 7 различных касательных к данной окружности? Приведите примеры для всех ответов и докажите, что других не существует.

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка – последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противонаправленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (то есть если слово начинается со стрелочки «вниз»), то убирает это первое «вниз». Ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают в начало соответственно стрелки «вниз», «влево» или «вправо», и вычёркивают первый символ, если он оказался «вверх», «вправо» или «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум 500000 слов не будет встречаться среди слов на доске.

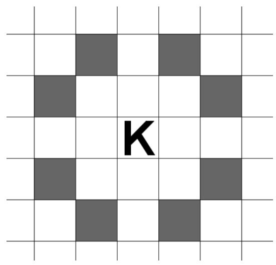
Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Эти же три числа являются тремя (не обязательно последовательными) членами некоторой геометрической прогрессии. Приведите пример трёх таких чисел.

2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

3. Каждый ход шахматного коня — перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот — одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке справа конь, отмеченный буквой К, может за один ход переместиться в любую из затемнённых клеток.)



В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму).

4. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.

б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

5. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных строках и столбцах, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например $f(1) = 10,\ f(11) = 0$.

а) Что больше, $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше, $f(5)$ или $f(6)$?

Время выполнения задания: 240 минут.

Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

3. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

4. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

5. Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т.е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 2016,\ f(2017) = 0$.
а) Что больше, $f(2015)$ или $f(2016)$?
б) Что больше, $f(1008)$ или $f(1009)$?