Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Задание 1 (10 баллов)

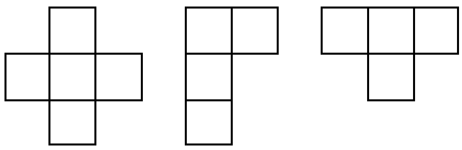
Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провёл в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу – пятидесятилетие своей супружеской жизни?

Задание 2 (15 баллов)

Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.

Задание 3 (15 баллов)

Можно ли разрезать прямоугольник 6х7 на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино (см. картинку в конце текста)? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?



Задание 4 (20 баллов)

Пара различных натуральных чисел (a,b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b. Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа – любой делитель, отличный от 1 и самого числа.

Задание 5 (20 баллов)

Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На стороне AC выбрана точка K такая, что угол CBK составляет 15°. На луче BK отмечена точка M такая, что угол ACM составляет 90°. Докажите, что AC=BM.

Задание 6 (20 баллов)

Имеется 999 палочек длин 1, 2, 3, …, 999. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Напоминаем, что «вырожденный треугольник» не является треугольником.

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Задание 1 (15 баллов)

Число $a*b$ есть произведение b последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно a (в частности, $a*1=a$). Найдите все пары натуральных чисел a, b, для которых выполнено равенство $a*b=2(b*a)$.

Задание 2 (15 баллов)

В параллелограмме ABCD отмечена точка K такая, что AB=BK=KC. Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD.

Задание 3 (15 баллов)

Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число $n_1, n_2, \ldots, n_{2021}$.Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу: p_1 получается перемножением всех делителей числа n_1 (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа n_2, p_2 получается перемножением всех делителей числа n_2 и всех делителей числа n_3 и т.д. Вася утверждает, что $n_1 = 3,\ n_{2021} = 13$, а у произведения $p_1 p_2 \cdots p_{2020}$ последние четыре цифры – 2021. Стоит ли верить Васе?

Задание 4 (15 баллов)

Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле 9×9, чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?

Задание 5 (20 баллов)

Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, …, 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Напоминаем, что «вырожденный треугольник» не является треугольником.

Задание 6 (20 баллов)

Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом $\overline{abcd}$ (то есть, $N=at^3+bt^2+ct+d,\ \ 0\leqslant a,b,c,d\leqslant t-1,\ \ a\neq 0$) таким, что $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа t.

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов – 100

Задание 1 (13 баллов).
В этой задаче запись $x \bmod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n-1$, что $x-y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2+1) \bmod 7) = (f(x)^2+1) \bmod 11?$$

Задание 2 (20 баллов).
В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины ломанных BAC, ABC, ACB соответственно (точка называется *серединой ломанной* если принадлежит ломанной и делит ее на две ломанных равной длины). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через одну точку.

Задание 3 (20 баллов).
Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\pi/10$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1<p<2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 2 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Задание 4 (28 баллов).
Напомним, что *запись числа n в t-ичной системе счисления* – это представление $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_0$, где a_i – целые числа от 0 до $t-1$, причем a_k – не ноль. Назовем четырехзначное число $\overline{abcd}$ интересным если $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Найдите количество упорядоченных пар интересных чисел, сумма которых – тоже интересное число (как функцию от t в замкнутой форме).

Задание 5 (40 баллов).
M – середина стороны BC треугольника ABC. Касательные, проведённые из M к вписанной окружности треугольника ABC, касаются этой окружности в точках P, Q. Касательные из M к вневписанной окружности ABC, касающейся стороны BC, касаются этой окружности в точках R, S. Прямые PQ, RS пересекаются в точке X. Оказалось, что $AX = AM$. Найдите угол $\angle BAC$.

Задание 6 (50 баллов).
Рассматриваются всевозможные наборы действительных чисел $x_1,\dots,x_{2021}$, не превосходящих по модулю 1, с суммой 0. Для какого наименьшего C можно любой такой набор расставить по кругу так, что сумма любых нескольких стоящих подряд чисел будет по модулю не больше C?

Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов – 100

Задание 1 (12 баллов).
В этой задаче запись $x \mod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n - 1$, что $x - y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2 + 1) \mod 7) = (f(x)^2 + 1) \mod 11?$$

Задание 2 (17 баллов).
Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\pi/10$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1<p<2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 3 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Задание 3 (23 балла).
Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC касается вписанной и соответствующей вневписанной окружностей в точках T_1, T_2 соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках S_1, S_2 соответственно. Докажите, что $\angle S_1CT_1=\angle S_2CT_2$.

Задание 4 (32 балла).
Найдите все действительные числа d, для которых существуют многочлены от одной переменной P и Q, такие что равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

выполняется при всех значениях x кроме конечного числа.

Задание 5 (42 балла).
Через $X(\alpha)$ будем обозначать точку с координатами $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ (все такие лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Выбрали произвольный угол ϕ и провели хорды $P(\phi)P(2022\phi)$, $P(2022\phi)P(2022^2\phi)$,… (на шаге номер n проводится хорда $P(2022^{n-1}\phi)P(2022^n\phi)$). Если хорда уже была проведена – она не проводится второй раз. Оказалось, что все проведенные хорды не пересекаются иначе чем по концам. Докажите, что всего проведено конечное число хорд.

Задание 6 (50 баллов).

Фокусник и его Ассистент готовятся показать следующий фокус. Фокуснику завяжут глаза, после чего один из зрителей напишет на доске 60-битное слово (последовательность из 60 нулей и единиц). Ассистент уверен, что сможет незаметно передать фокуснику записку, содержащую 44 бита (не обязательно биты загаданного слова, может написать какие хочет). После чего Фокусник должен будет назвать слово. Для какого наибольшего числа C Фокусник и Ассистент могут придумать стратегию, позволяющую всегда назвать слово, совпавшее хотя бы в C битах с написанным зрителем.