

Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
6 класс, 19 марта 2017 г.

+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

6 класс

1. Замените звездочки цифрами так, чтобы пример на умножение в столбик стал верным. (Достаточно указать один способ это сделать.)

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 * * \\ \quad * * \\ \hline * 6 1 \\ * * * \\ \hline * * 0 1 \end{array}$$

Пример:

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 8 7 \\ \quad 2 3 \\ \hline 8 6 1 \\ 5 7 4 \\ \hline 6 6 0 1 \end{array}$$

Замечание. Других решений не существует. □

+ Правильный пример. 7 баллов

– Отсутствие правильного примера. 0 баллов

2. Зайчик, ежик и белочка дарят друг другу орехи. Сначала ежик и белочка подарили ровно половину своих орехов зайчику. Затем белочка и зайчик отдали ровно половину того, что имеют, ежику. Наконец, зайчик и ежик отдали ровно половину имеющихся у них орехов белочке. Известно, что у белочки и в начале, и в конце было 44 ореха. Сколько всего орехов у зверят? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: 77. Белочка подарила в первый раз 22 ореха, а во второй раз 11 орехов. Значит в третий раз она получила 33 ореха, и это составило половину орехов зайчика и ежика. Следовательно, в конце у зайчика и ежика осталось 33 ореха. □

± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 5 баллов

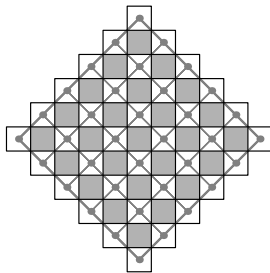
– Правильный ответ без обоснования (пример обоснованием не считается). 1 балл

3. В одной из клеток бесконечного клетчатого листа бумаги сидит лягушонок. За один прыжок он смещается в соседнюю по стороне клетку. Назовем клетку

прекрасной, если лягушонок может в ней оказаться ровно через 2017 прыжков. Сколько всего прекрасных клеток?

Ответ: $4\,072\,324 = 2018^2$.

Покрасим клетки листа в шахматном порядке. Предположим, что изначально лягушонок сидит на черной клетке. Тогда, поскольку каждым прыжком лягушонок меняет цвет клетки, на которой он расположен, после 2017 прыжков он окажется на белой клетке. Далее, заметим, что если он припрыгал в какую-то белую клетку менее чем за 2017 прыжков, то эта клетка всё равно прекрасная: оставшиеся прыжки он может разбить на пары, прыгая в соседнюю клетку и обратно. Белые клетки, до которых лягушонок может допрыгать за 2017 прыжков, выстраиваются в квадрат со стороной 2018, если смотреть по диагонали (рис. для 5 прыжков).



Следовательно, искомым клеток всего $2018 \cdot 2018$. □

- + Правильное решение с ответом, записанным в виде 2018^2 . 7 баллов
 - + Правильное решение с правильным ответом, записанным в виде суммы с многоточием. 5 баллов
 - ± В правильном решении замечено, что клетки выстраиваются в квадрат, но неправильно посчитана сторона квадрата. В результате ответ выражен в виде квадрата с основанием, отличным от 2018. 5 баллов
 - ∓ Присутствует идея шахматной раскраски. 3 балла
 - Правильный ответ без обоснования. 1 балл
4. Алексей написал на доске несколько последовательных натуральных чисел. Оказалось, что лишь у двух из написанных чисел сумма цифр делится на 8: у наименьшего и у наибольшего. Какое максимальное количество чисел могло быть написано на доске?

Ответ: 16.

Пример: числа от 9 999 991 до 10 000 007.

Оценка. Докажем, что более 16 чисел быть не может. Назовем число *хорошим*, если его сумма цифр делится на 8. Среди выписанных чисел обя-

зательно есть число x , заканчивающееся на 0, иначе чисел слишком мало. Число x не первое, поскольку тогда оно и $x + 8$ хорошие, и чисел не более 9. Среди чисел $x, x + 1, \dots, x + 7$ обязательно есть хорошее — наибольшее с указанным свойством. Число $x - 1$ заканчивается на 9, поэтому среди чисел $x - 1, x - 2, \dots, x - 8$ обязательно есть хорошее — наименьшее с указанным свойством. Таким образом, все выбранные числа укладываются в промежуток от $x - 8$ до $x + 7$ включительно. Следовательно, количество выписанных на доску чисел не превосходит 16. \square

± Оценка правильная, пример с незначительной ошибкой. 5–6 баллов

∓ Оценка без примера. 3 балла

∓ Пример без оценки. 3 балла

5. В клубе любителей чая состоят 20 джентльменов. У каждого джентльмена ровно 13 друзей среди остальных членов клуба. Совет клуба состоит из 10 наиболее выдающихся любителей чая, которые дружат каждый с каждым. Докажите, что весь клуб можно разделить на две группы так, чтобы в каждой из групп любые двое были друзьями.

Достаточно доказать, что 10 «невыдающихся» членов клуба также дружат каждый с каждым.

Посчитаем количество пар джентльменов, которые не дружат. С одной стороны, их ровно $20 \cdot 6 / 2 = 60$, так как каждый не дружит с 6 другими, и каждую такую пару недрузей мы считаем по два раза.

С другой стороны, каждый выдающийся любитель чая дружит с 4 и не дружит с 6 невыдающимися джентльменами. Значит, пар недрузей выдающийся–невыдающийся ровно $10 \cdot 6 = 60$.

Следовательно, никаких других пар джентльменов, не дружащих между собой, быть не может, то есть среди невыдающихся членов клуба все дружат со всеми. \square

± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, не повлиявшей на ход решения. 6 баллов

∓ В решении присутствует утверждение о том, что невыдающиеся любители чая дружат каждый с каждым, но это не обосновано формально, либо приведен пример, когда это так. 2 балла

+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

7 класс

1. Автобусы из Москвы в Орёл выходят в начале каждого часа (в 00 минут). Автобусы из Орла в Москву выходят в середине каждого часа (в 30 минут). Поездка между городами занимает 5 часов. Сколько автобусов из Орла встретит автобус, вышедший из Москвы, на своем пути?

Ответ: 10.

Ясно, что все автобусы из Москвы встретят одинаковое число автобусов из Орла, и можно считать, что в автобус из Москвы отправился в 12:00. Легко понять, что он встретится с автобусами, выехавшими из Орла в 7:30, 8:30, ..., 15:30, 16:30 и только с ними. Таких автобусов 10. \square

- ± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов
 - ∓ Вычислена частота встреч (раз в полчаса), но ответ неправильный. 3 балла
 - Правильный ответ без объяснения. 1 балл
2. Три щедрых друга, у каждого из которых есть конфеты, перераспределяют их следующим образом: Вася отдает часть своих конфет Пете и Коле, отчего количества конфет у них удваиваются. После этого Петя отдает часть своих конфет Коле и Васе, отчего количества конфет у них тоже удваиваются. Наконец, Коля отдает часть своих конфет Васе и Пете, у которых опять же количества удваиваются. Оказалось, что у Коли и в начале, и в конце было 36 конфет. Сколько всего конфет у мальчиков?

Ответ: 252.

Проследим за количеством конфет у Коли. После первого перераспределения у него их 72, после второго — 144. Следовательно, он раздал $144 - 36 = 108$ конфет и при этом количество конфет у Васи и Пети удвоилось. То есть всего конфет у Васи, Пети и Коли вместе $2 \cdot 108 + 36 = 252$. \square

- ± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 5 баллов
 - Правильный ответ без обоснования (пример обоснованием не считается). 1 балл
3. В популярной интеллектуальной игре «Столкновение умов» принимает участие 10 человек. К концу игры каждый игрок набирает целое число очков.

Оказалось, что в полуфинале все количества набранных игроками очков имеют разные последние цифры. Докажите что в финале игры (где игроки суммарно наберут вдвое больше очков, чем в полуфинале) такой ситуации произойти не может.

Предположим противное — по итогам финала игроки набрали такие количества очков, что их последние цифры различны, то есть равны $0, 1, 2, \dots, 9$ в некотором порядке. Тогда последняя цифра суммы всех очков совпадает с последней цифрой суммы $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. С другой стороны, по условию эта сумма — число четное. Противоречие. \square

- В решении присутствует идея вычисления последней цифры суммы без дальнейших продвижений. 2 балла
- Задача решена в предположении, что каждый участник в финале наберет вдвое больше очков, чем в полуфинале. 0 баллов

4. На конференцию по вопросам применения магии в народном хозяйстве прибыли 30 волшебников, каждый из которых знаком ровно с 19 участниками конференции. Оказалось, что 15 самых могущественных волшебников знакомы друг с другом, каждый с каждым. Докажите, что всех волшебников можно рассадить за два стола так, чтобы любые два волшебника, сидящие за одним столом, были знакомы друг с другом.

Достаточно доказать, что 15 «немогущественных» волшебников также знакомы друг с другом.

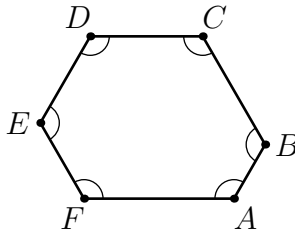
Посчитаем количество пар волшебников, которые не знакомы друг с другом. С одной стороны, их ровно $30 \cdot 10 / 2 = 150$, так как каждый не знаком с 10 другими, и каждую такую пару незнакомых мы считаем по два раза.

С другой стороны, каждый могущественный волшебник знаком с 5 и не знаком с 10 немогущественными. Следовательно, пар незнакомых могущественных немогущественных ровно $15 \cdot 10 = 150$.

Получается, никаких других пар незнакомых волшебников быть не может, то есть среди немогущественных волшебников также все знакомы друг с другом. \square

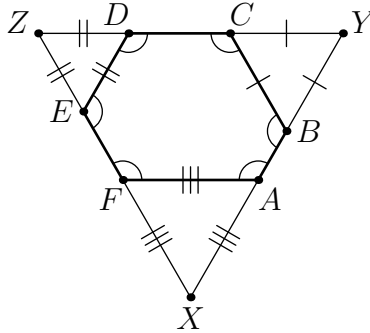
- + Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, не повлиявшей на ход решения. 6 баллов
- В решении присутствует утверждение о том, что немогущественные волшебники дружат каждый с каждым, но это не обосновано формально, либо приведен пример, когда это так. 2 балла

5. Все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны.



Докажите, что

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$



Проведем прямые AB , CD , EF до пересечения друг с другом, точки пересечения обозначим X , Y , Z (рис.). Треугольники AXF , BYC , DZE равнобедренные, так как углы при их основаниях AF , BC , DE равны как смежные с равными углами. Из сумм углов этих треугольников следует, что равны также углы AXF , BYC , DZE . Значит, треугольник XYZ — равносторонний, и все его углы равны 60° . Но тогда треугольники AXF , BYC , DZE тоже равносторонние. Посчитаем отрезки:

$$\begin{aligned} XY = XZ &\implies XA + AB + BY = XF + FE + EZ \implies \\ &\implies AB + BC = EF + DE \implies AB - DE = EF - BC. \end{aligned}$$

Третье равенство получается аналогичным образом. \square

- ✦ В решении есть случаи, опирающиеся на картинку, но в целом рассуждение правильное. 6 баллов
- ✦ Присутствует картинка с правильным дополнительным построением, но задача не решена. 2 балла

+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

8 класс

1. Автобусы из Москвы в Воронеж выходят каждый час, в 00 минут. Автобусы из Воронежа в Москву выходят каждый час, в 30 минут. Поездка между городами занимает 8 часов. Сколько автобусов из Воронежа встретит автобус, вышедший из Москвы, на своем пути?

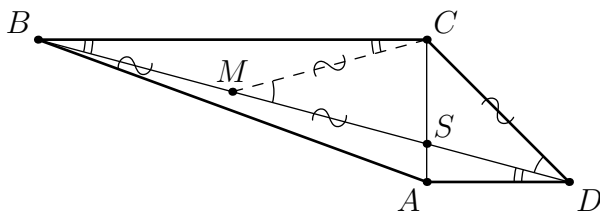
Ответ: 16.

Ясно, что все автобусы из Москвы встретят одинаковое число автобусов из Воронежа, и можно считать, что в автобус из Москвы отправился в 12:00. Легко понять, что он встретится с автобусами, выехавшими из Орла в 4:30, 5:30, ..., 18:30, 19:30 и только с ними. Таких автобусов 16. \square

- ± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов
- ∓ Вычислена частота встреч (раз в полчаса), но ответ неправильный. 3 балла
- Правильный ответ без объяснения. 1 балл

2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке S . Известно, что $AD \perp AC$ и $BS = 2CD$. Докажите, что $\angle CDB = 2\angle ADB$.

Отметим точку M — середину отрезка BS (рис.).



Так как треугольник BCS прямоугольный, медиана CM равна половине гипотенузы BS , то есть равна CD . Получается, что треугольник MCD равнобедренный; отсюда $\angle CDM = \angle CMD$. В равнобедренном треугольнике BCM углы $\angle MBC$ и $\angle MCB$ равны, и равны половине внешнего угла $\angle CMD$. Кроме того, углы $\angle CBM$ и $\angle ADB$ равны как накрест лежащие. Это завершает цепочку равенств

$$\angle CDM = \angle CMD = 2\angle CBM = 2\angle BDA. \quad \square$$

- ± Правильное рассуждение имеет несколько случаев, но разобран лишь один. 6 баллов

⊖ Построена медиана треугольника BCS , но задача не решена. 2 балла

3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$(2x + y)(2y + x) = 2017^{2017} ?$$

Ответ: 0.

Заметим, что сумма чисел $A = 2x + y$ и $B = 2y + x$ делится на 3. Так как число в правой части не кратно 3, то ни A , ни B также не кратны 3. Следовательно, одно из этих двух чисел дает остаток 2 при делении на 3, а другое дает остаток 1. Но тогда их произведение дает остаток 2. Однако, число 2017 дает остаток 1, а значит и 2017^{2017} тоже. \square

± Установлено, что системы уравнений не получается решить в целых числах из-за делимости на 3, но отсутствует строгое обоснование, почему так будет происходить для всех случаев. 5 баллов

⊖ В решении разобрано несколько различных разложений на множители, для каждого из которых установлено, что соответствующая система уравнений не имеет решений. 3 балла

⊖ Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Учительница дала Васе и Пете два одинаковых картонных n -угольника. Вася разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 33-угольники, а Петя разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 67-угольники. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 2017.

Сумма углов n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Если он разрезан на k 33-угольников, то $(n - 2) \cdot 180^\circ = k \cdot (33 - 2) \cdot 180^\circ$, следовательно, $n - 2 : 31$. Аналогично из второго условия следует, что $n - 2 : 65$. Поскольку 31 и 65 взаимно просты, наименьшее возможное значение $n = 31 \cdot 65 + 2 = 2017$. \square

± Правильное решение с незначительной ошибкой, приводящей к неправильному ответу. 5 баллов

⊖ В решении есть идея подсчета суммы углов, но нет выводов о делимости. 2 балла

⊖ Дан правильный ответ, но не обоснован. В частности, приведена некоторая пара разрезов для которых «все сходится». 1 балл

5. В математическом конкурсе участвуют 14 школьников. Участникам конкурса было предложено 6 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины школьников. Докажите, что обязательно найдется пара участников, которые в объединении правильно решили все задачи.

Представим школьников как точки, и будем соединять их линиями одного из шести цветов. А именно, двух школьников будем соединять линией

цвета 1, если *они оба не решили задачу 1*. Аналогично, линии цвета 2 будем проводить между школьниками, которые не решили задачу 2, и т. д. (Между некоторыми школьниками может получиться несколько линий.) Заметим, что для каждой задачи не более 6 школьников её не решило. Это означает, что линий соответствующего цвета не более $6 \cdot 5/2 = 15$. Значит, всего линий всех цветов не более $6 \cdot 15 = 90$.

С другой стороны, пар школьников больше, $14 \cdot 13/2 = 91$. Следовательно, между какими-то двумя школьниками не проведено ни одной линии. Это означает, что любую задачу хотя бы один из этой пары решил. \square

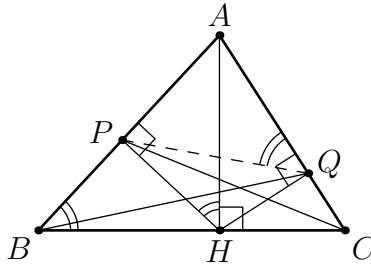
- \mp Присутствие в решении идеи подсчета числа пар участников, не решивших конкретную задачу. Не менее 3 баллов
- Разобраны нескольких частных случаев. 0 баллов

марно наберут вдвое больше очков, чем в полуфинале, такой ситуации произойти не может.

Предположим противное — по итогам финала игроки набрали такие количества очков, что их последние цифры различны, то есть равны $0, 1, 2, \dots, 9$ в некотором порядке. Тогда последняя цифра суммы всех очков совпадает с последней цифрой суммы $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. С другой стороны, по условию эта сумма — число четное. Противоречие. \square

- В решении присутствует идея вычисления последней цифры суммы без дальнейших продвижений. 2 балла
- Задача решена в предположении, что каждый участник в финале наберет вдвое больше очков, чем в полуфинале. 0 баллов

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $\angle BQH = \angle CPH$.



Так как точки P и Q лежат на окружности, построенной на AH как на диаметре, равны углы $\angle PQA = \angle PHA$ как вписанные. С другой стороны, углы $\angle PHA$ и $\angle HBA$ равны, так как они оба дополняют угол BAH до прямого. Углы $\angle AQP$ и $\angle ABC$ равны, а значит, четырехугольник $BPQC$ можно вписать в окружность. Тогда равны и углы $\angle BPC$ и $\angle BQC$ как вписанные. Искомое равенство получается, если из каждого из них вычесть 90° . \square

- Доказана вписанность четырехугольника $BPQC$, но решение не закончено. 3 балла
- Доказана вписанность четырехугольника $APHQ$. 1 балл

4. Найдите все пары натуральных чисел x и y , таких что отношение $\frac{xy^3}{x+y}$ является простым числом.

Ответ: $x = 14, y = 2$.

Пусть $xy^3 = p(x + y)$, где p — простое число. Это означает, что одно из чисел x и y делится на p . Разберем оба случая.

Предположим для начала, что $y = mp$. Тогда $xt^3p^2 = x + mp$. Но, поскольку $p \geq 2$, мы можем написать цепочку неравенств $xt^3p^2 \geq 2xt^3p \geq$

$$xp + mp > x + mp.$$

Перейдем к случаю $x = kp$. После преобразований получаем равенство $k(y^3 - p) = y$. Если $y^3 - p : d$ для какого-то натурального числа d , то $y : d$ и, следовательно, $p : d$, то есть $d = 1$ или $d = p$. В качестве d можно взять само число $y^3 - p$. Получаем, что либо $y^3 - p = p$, что, очевидно, невозможно, так как в y^3 все простые сомножители входят хотя бы в третьей степени; либо $y^3 - p = 1$. В последнем случае получаем, что $p = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ и в силу простоты p необходимо $y = 2$. Тогда $p = 7$ и $x = 14$. \square

± Ход решения в целом верный, но ответ потерян. 5 баллов

± Разобран случай $x : p$. 4 балла

– Разобран случай $y : p$. 2 балла

5. В конкурсе по физике участвуют 17 школьников. Участникам конкурса было предложено 12 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины участников. Докажите, что обязательно найдутся три школьника, в объединении решившие все задачи.

Оценим количество троек школьников, не справившихся с первой задачей. Эту задачу не смогли решить 8 школьников или меньше, а значит число таких троек не превосходит $8 \cdot 7 \cdot 6/6 = 56$. Раз задач всего 12, то число троек школьников, не осиливших какую-то задачу, не превосходит $12 \times 56 = 672$. С другой стороны, всего существует $17 \cdot 16 \cdot 15/6 = 680$ троек школьников, что больше. Значит, найдутся три школьника, решивших в объединении все задачи. \square

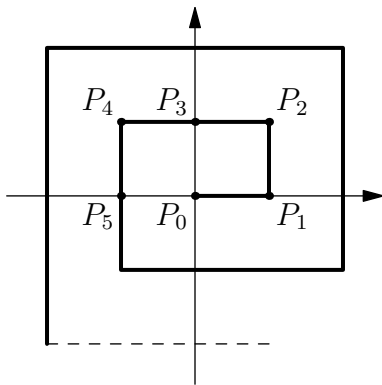
∓ В решении присутствует идея подсчета числа троек участников, не решивших конкретную задачу. Не менее 3 баллов

– Разобраны нескольких частных случаев. 0 баллов

+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

10 класс

1. Муравей Андрюша двигается по координатной плоскости, стартуя из точки $P_0 = (0, 0)$, двигаясь к точке $P_1 = (1, 0)$, и далее по спирали против часовой стрелки (рис.).



Точки с целочисленными координатами, в которые он попадает, образуют последовательность P_n . Найдите координаты точки P_{2017} .

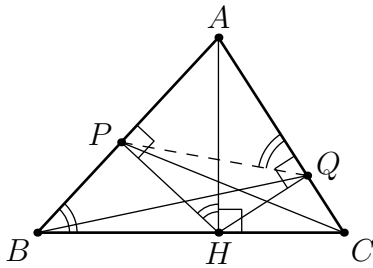
Ответ: $(15, -22)$. Рассмотрим точки, которые являются правыми нижними и левыми верхними углами ломаной, то есть точки вида $(k, 1 - k)$ и $(-k, k)$. Легко видеть, что это точки P_1, P_4, P_9 , и т. д. Действительно, расстояние от точки $(k, 1 - k)$ до $(-k, k)$ по ломаной составляет $4k - 1$, что есть разность между $(2k)^2$ и $(2k - 1)^2$. Аналогично, расстояние от $(-k, k)$ до $(k + 1, -k)$ равно $4k + 1$, что есть разность между $(2k + 1)^2$ и $(2k)^2$. По индукции получаем, что $P_{(2k-1)^2} = (k, 1 - k)$ и $P_{(2k)^2} = (-k, k)$.

Заметим, что $(2 \cdot 23 - 1)^2 = 2025$. Значит, точка P_{2025} имеет координаты $(23, -22)$. Точка P_{2017} на 8 правее ее, то есть имеет координаты $(15, -22)$. \square

± Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов

– Правильный ответ без объяснения. 1 балл

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $\angle BQH = \angle CPH$.



Так как точки P и Q лежат на окружности, построенной на AH как на диаметре, равны углы $\angle PQA = \angle PHA$ как вписанные. С другой стороны, углы $\angle PHA$ и $\angle HBA$ равны, так как они оба дополняют угол $\angle BAN$ до прямого. Углы $\angle AQP$ и $\angle ABC$ равны, а значит, четырехугольник $BPQC$ можно вписать в окружность. Тогда равны и углы $\angle BPC$ и $\angle BQC$ как вписанные. Искомое равенство получается, если из каждого из них вычесть 90° . \square

± Доказана вписанность четырехугольника $BPQC$, решение не закончено. 3 балла

– Доказана вписанность четырехугольника $APHQ$. 1 балл

3. Найдите наименьшее возможное число k такое, что при выборе любых k различных чисел от 1 до 20, среди выбранных чисел гарантированно можно выделить пару различных с простой суммой.

Ответ: $k = 11$.

Очевидно, что 10 чисел недостаточно — можно выбрать все четные числа и сумма любых двух будет четной, большей двух. Покажем, что при выборе любых 11 чисел найдется пара с простой суммой. Для этого разобьем все числа на пары

$$\{1, 2\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{9, 14\}, \{10, 13\}, \\ \{11, 12\}, \{15, 16\}, \{17, 20\}, \{18, 19\}.$$

В каждой паре сумма чисел простая. При выборе 11 чисел какая-то из пар будет выбрана целиком. \square

± Доказано, что 10 чисел недостаточно и что среди 12–13 чисел есть нужная пара. 5 баллов

± Доказано, что среди 11 чисел такая пара найдется. 4 балла

± Доказано, что 10 чисел не достаточно. 3 балла

– Доказано, что среди 12–13 чисел есть нужная пара. 2 балла

– Правильный ответ без обоснования. 1 балл

4. Найдите все натуральные n такие, что число $8^n + n$ делится на $2^n + n$.

Ответ: $n = 1, 2, 4, 6$.

По формуле сокращенного умножения число $8^n + n^3$ делится на $2^n + n$, поэтому условие задачи равносильно условию $n^3 - n : 2^n + n$. Но при $n \geq 10$ верно неравенство $n^3 < 2^n$. Осталось перебрать 9 вариантов и получить ответ. \square

- + За использование неравенства $n^3 < 2^n$ при $n \geq 10$ без доказательства баллы не снижаются.
- ± Правильный ход решения, но потеряны ответы. Снимать по одному баллу за каждый потерянный ответ.
- ∓ Установлено, что $n^3 - n : 2^n + n$ или аналогичная делимость, где делимое обычно меньше делителя. 3 балла
- Найдены все ответы без обоснования. 1 балл

5. Куб со стороной 5 сложен из 125 кубиков со стороной 1. Сколько маленьких кубиков пересекает плоскость, перпендикулярная одной из диагоналей куба и проходящая через ее середину?

Ответ: 55.

Введем систему координат так, чтоб куб располагался в первом октанте (множестве точек с неотрицательными координатами) и упомянутая в условии диагональ выходила из начала координат O . Середина диагонали куба имеет координаты $(5/2, 5/2, 5/2)$, следовательно, указанная плоскость задается уравнением $x + y + z = 15/2$. Рассмотрим один из 125 кубиков. Пусть ближняя к точке O вершина имеет координаты (k, m, n) , где целые числа k, m, n удовлетворяют неравенствам $0 \leq k, m, n \leq 4$. Дальняя от точки O вершина имеет координаты $(k + 1, m + 1, n + 1)$. Таким образом, кубик пересекает плоскость в том и только в том случае, если $k + m + n \leq 15/2 \leq k + 1 + m + 1 + n + 1$, что эквивалентно условию $k + m + n \in (9/2; 15/2)$. Принимая во внимание целочисленность суммы $k + m + n$, получаем лишь три варианта: $k + m + n = 5$, $k + m + n = 6$ или $k + m + n = 7$. Вычислим количество кубиков каждого из трех типов.

(i) $k + m + n = 5$. Перечислим способы разбить 5 на три слагаемых, и укажем количество различных перестановок этих слагаемых: $0 + 1 + 4$ (6 решений), $0 + 2 + 3$ (6 решений), $1 + 1 + 3$ (3 решения), $1 + 2 + 2$ (3 решения) — всего 18.

(ii) $k + m + n = 6$. $0 + 2 + 4$ (6 решений), $0 + 3 + 3$ (3 решения), $1 + 1 + 4$ (3 решения), $1 + 2 + 3$ (6 решений), $2 + 2 + 2$ (1 решение) — всего 19.

(iii) $k + m + n = 7$. Все такие кубики симметричны аналогичным с условием $k + m + n = 5$ относительно центра куба — всего 18.

Итого: $18 + 19 + 18 = 55$. \square

- ✦ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в двух из слоев правильно вычислено с обоснованием количество кубиков. 6 баллов
- ± Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в одном из слоев правильно вычислено с обоснованием количество кубиков. 5 баллов
- ± Пересекаемые кубики разбиты на три слоя и хотя бы в одном из слоев правильно вычислено количество кубиков, но обоснование не строгое или отсутствует. 4 балла
- ∓ Пересекаемые кубики разбиты на три слоя, но дальнейших продвижений нет. 3 балла
- Приведен правильный ответ без обоснования. 2 балла
- Выписано уравнение плоскости. 1 балл

Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике

11 класс, 19 марта 2017 г.

+ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

1. На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M . К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое выросло до $M + 2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M + 1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 4.

Пусть в изначальном списке было k чисел с суммой S . Тогда по условию

$$\frac{S + 15}{k + 1} - \frac{S}{k} = 2, \quad \frac{S + 15}{k + 1} - \frac{S + 16}{k + 2} = 1.$$

Приводя к общему знаменателю и преобразуя очевидным образом, получаем, что эти равенства равносильны следующим двум:

$$15k - S = 2k(k + 1), \quad S - k + 14 = (k + 1)(k + 2).$$

Складывая их, приходим к уравнению на k :

$$14(k + 1) = (k + 1)(2k + k + 2),$$

откуда $k = 4$. □

- ⊖ Выписана правильная система уравнений, но решена неправильно. 3 балла
- ⊖ Одно из уравнений получено правильно, второе неправильно. 2 балла
- ⊖ Правильный ответ без обоснования. (Пример списка из четырех чисел, удовлетворяющих условию, обоснованием не считается.) 1 балл

2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}?$$

Ответ: 6.

Сделаем замену $x/(1+x+x^2) = t$.

Сначала исследуем выражение $x/(1+x+x^2)$. Найдем количество решений уравнения

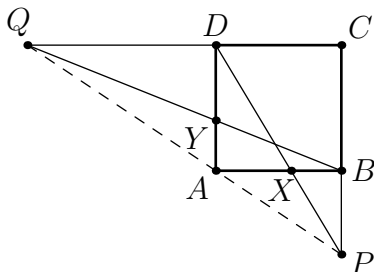
$$\frac{x}{1+x+x^2} = t$$

при различных значениях параметра t . Так как знаменатель всегда положителен, на него можно домножить и получить уравнение $tx^2 + (t-1)x + 1 = 0$. При $t = 0$ единственное решение $x = 0$; при остальных t это уравнение квадратное. Дискриминант его равен $(t-1)^2 - 4t^2 = 1 - 2t - 3t^2 = (1-3t)(1+t)$. Значит, решения x существуют только при $t \in [-1; 1/3]$, причем в множестве $t \in (-1; 0) \cup (0; 1/3)$ решений ровно два, причем разным t соответствуют разные решения (t выражается через x).

Теперь вернемся к исходному уравнению $\operatorname{tg}(2\pi t) = \sqrt{3}$. Оно эквивалентно $2\pi t = \pi/3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. На отрезке $t \in [-1; 1/3]$ решений всего три: $t = -5/6, -1/3, 1/6$. Каждому из них соответствуют по два решения x . \square

- ✦ В решении есть арифметическая ошибка, не повлиявшая ни на ход решения, ни на ответ. 6 баллов
- Потерян один корень уравнения $\operatorname{tg} 2\pi t = \sqrt{3}$. 2 балла
- Потеряно два корня уравнения $\operatorname{tg} 2\pi t = \sqrt{3}$. 1 балл
- Правильный ответ без правильного обоснования. 1 балл

3. На сторонах AB , AD квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y так, что $AX = DY$. Прямые BC и DX пересекаются в точке P , прямые CD и BY — в точке Q . Докажите, что точки P , Q , A лежат на одной прямой.



Из подобия треугольников XAD и XBP получаем $BP : AD = XB : XA$, а из подобия YAB и YDQ получаем $AB : DQ = YA : YD$. Так как $YD = XA$ и $YA = XB$, то $BP : AD = AB : DQ$, что эквивалентно $BP : AB = AD : DQ$. А это означает подобие прямоугольных треугольников ABP и QDA , из которого следует

$$\angle QAP = \angle QAD + \angle DAB + \angle BAP = \angle APB + 90^\circ + \angle BAP = 180^\circ,$$

что и требовалось. □

- ⊖ Доказано подобие треугольников ABP и QDA , но решение по каким-то причинам не закончено. 3 балла
- Задача сведена к доказательству подобия треугольников ABP и QDA , но подобие не доказано. 1 балл
- Счетное решение, не увенчавшееся успехом. 0 баллов

4. Каждый день более половины жителей Цветочного города едят мороженое. Докажите, что найдется 10 жителей Цветочного города, таких что в течение каждого из последних 2017 дней хотя бы один из них ел мороженое. (В Цветочном городе живет не менее 10 жителей.)

Поскольку в каждый из 2017 дней более половины жителей Цветочного города ели мороженое, то есть человек, который ел мороженое более чем в половине из этих 2017 дней, то есть в хотя бы 1009. Возьмем его в искомую десятку. Осталось не более 1008 дней. Прделаем ту же процедуру: найдем человека, который ел мороженое более чем в половине из этих 1008 дней (хотя бы в 505), возьмем его в качестве второго человека из искомой десятки. Осталось не более 503 дней. Продолжим в том же духе. После выбора 3-го человека останется не более 251 дня, после выбора 4-го — не более 125 дней, после выбора 5-го — не более 62, после выбора 6-го — не более 30, после выбора 7-го — не более 14, после выбора 8-го — не более 6, после выбора 9-го не более 2. Для оставшихся двух дней существует человек, который ел мороженое более чем в половине из этих двух дней, то есть в оба. Возьмем его 10-м. \square

- ± В целом правильное решение из-за неаккуратности привело к тому, что реально найдено 11 человек, а не 10. 5 баллов
- ∓ Есть ключевое соображение: для любого набора дней найдется человек, евший мороженое более чем в половине из них. Не менее 3 баллов
- Доказано содержательное утверждение, которое обеспечивает больше 11 жителей, удовлетворяющих условию. 1-2 балла

5. Пусть d_1, d_2, \dots, d_n — это все натуральные делители числа $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10$.
Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{10!}} + \dots + \frac{1}{d_n + \sqrt{10!}}.$$

Ответ: $3/(16\sqrt{7})$.

Обозначим указанную сумму за S . Тогда, так как для каждого d_j число $10!/d_j$ — также делитель,

$$S = \sum_{j=1}^n \frac{1}{10!/d_j + \sqrt{10!}} = \frac{1}{\sqrt{10!}} \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{\sqrt{10!} + d_j}.$$

Следовательно, складывая исходное и последнее выражение для S , умноженные на $\sqrt{10!}$, получаем

$$\sqrt{10!}S + \sqrt{10!}S = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sqrt{10!}}{d_j + \sqrt{10!}} + \frac{d_j}{d_j + \sqrt{10!}} \right) = n.$$

При этом n — количество делителей числа $10!$ — вычисляется по формуле $n = (8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$ ($10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$, каждый из простых множителей может входить в делитель в любой степени от 0 до своей степени вхождения в число $10!$). Таким образом, $S = 270/(2\sqrt{10!})$. \square

Примечание: $d(10!)$ — это количество делителей числа $10!$.

- ± Ответ не вычислен, а выражен через $d(10!)$. 5 баллов
- ± Уравнение составлено правильно, но есть арифметическая ошибка при вычислении ответа (например, при вычислении $d(10!)$). 5 баллов
- ∓ В решении присутствует идея составления уравнения для S , но из-за арифметических ошибок уравнение составлено неправильно. 3 балла
- В решении присутствует идея разбивать слагаемые на пары (первое с последним, второе с предпоследним и т.д), но дальнейшее продвижение отсутствует. 2 балла
- В решении вычислено $d(10!)$. 1 балл

6. Пусть A и B — различные точки, принадлежащие линии пересечения перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2 . Точка C принадлежит плоскости π_2 , но не принадлежит π_1 . Обозначим через P точку пересечения биссектрисы угла ACB с прямой AB и через ω окружность с диаметром AB в плоскости π_1 . Плоскость π_3 , содержащая CP , пересекает окружность ω в точках D и E . Докажите, что CP — биссектриса угла DCE .

Рассмотрим сферу Ω , проходящую через точку C и окружность ω . Плоскость π_2 пересекает эту сферу по большой окружности ω_2 , описанной около треугольника ABC . (*Большая окружность* — это сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы.) Биссектриса CP треугольника ABC пересекает окружность ω_2 в точке F — середине дуги AB . Поскольку ω_2 является большой окружностью, точка F — центр «шапочки», отсекаемой от сферы Ω плоскостью π_1 . Плоскость π_3 проходит через точку F , и дуга DE , лежащая в плоскости π на указанной шапочке, из соображений симметрии делится точкой F пополам. Следовательно, прямая CF , а вместе с ней и CP , является биссектрисой угла DCE . \square

- \mp В работе фигурирует сфера Ω , но решение не закончено. Не менее 2 баллов
— Не доведенное до конца счетное решение. 0 баллов