Время выполнения заданий — 180 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 7.1. *(15 баллов)* Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

Задача 7.2. *(15 баллов)* Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На сторонах AB, BC, AC отметили точки K, L, M соответственно так, что $\angle AKM = 90°$, $\angle BLK = 90°$ и $KM = KL$. Чему равен угол CML?

Задача 7.3. *(15 баллов)* На складе стоят несколько ящиков. Известно, что ящиков не более 60, и в каждом из них находятся либо 59 яблок, либо 60 апельсинов. После того, как на склад принесли коробку с некоторым количеством апельсинов, фруктов на складе стало поровну. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть в принесённой коробке?

Задача 7.4. *(15 баллов)* На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 100 жителей этого острова выстроились в ряд, и каждый из них сказал одну из следующих фраз:

- «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 2 больше, чем рыцарей.»

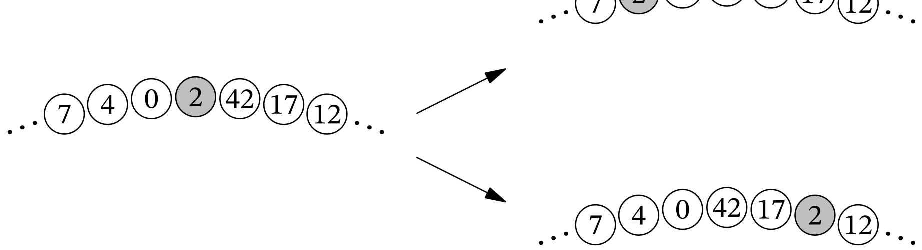
  …

- «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей.»

Известно, что каждую фразу сказал ровно один человек. Какое наименьшее количество лжецов может быть среди этих 100 жителей?

Задача 7.5. *(20 баллов)* Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

Задача 7.6. *(20 баллов)* На столе по кругу лежат n монет, пронумерованных числами от 0 до $n-1$ в некотором порядке. За одну операцию разрешается взять какую-то монету с номером k и переместить её на k позиций в произвольном направлении, сместив при этом промежуточные монеты (например, операция над монетой с номером 2 может быть выполнена одним из двух способов, показанных на рисунке ниже). Докажите, что из любого начального положения можно получить такое, в котором, начиная с некоторого места, монеты 0, 1, 2, …, $n-1$ лежат по часовой стрелке.



Время выполнения заданий — 180 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 8.1. *(15 баллов)* В клетчатом квадрате 5×5 каждую клетку покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Справа от каждой строки записали суммарное количество синих и красных клеток в этой строчке, а под каждым столбцом записали суммарное количество синих и зелёных клеток в этом столбце.

Справа от таблицы оказались числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке. Могли ли и под таблицей оказаться числа 1, 2, 3, 4, 5 в некотором порядке?

Задача 8.2. *(15 баллов)* Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12, \\ x_1 + x_3 \geqslant 13, \\ x_1 + x_4 \geqslant 14, \\ x_3 + x_4 \geqslant 22, \\ x_2 + x_3 \geqslant 23, \\ x_2 + x_4 \geqslant 24. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

Задача 8.3. *(15 баллов)* За один ход можно выбрать натуральное число x и вычеркнуть все натуральные числа y такие, что $|x - y|$ — натуральное составное число. При этом в качестве x можно выбирать уже вычеркнутые числа.

Какое наименьшее количество ходов понадобится, чтобы вычеркнуть из натурального ряда все числа?

Задача 8.4. *(15 баллов)* В классе учится поровну мальчиков и девочек. Назовём непустую группу мальчиков *популярной,* если каждая девочка в классе дружит хотя бы с одним мальчиком из этой группы (все дружбы взаимны). Оказалось, что в классе ровно 63 популярные группы. Докажите, что каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой.

Задача 8.5. *(20 баллов)* Треугольник ABC таков, что $BC < AC < AB$. Точка M — середина стороны AC. На стороне AB нашлась точка K такая, что $CK = BC$ и $BK = AC$. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle ABM$.

Задача 8.6. *(20 баллов)* На столе лежит 55 кучек конфет. В одной кучке лежит 1 конфета, в другой — две, в третьей — 3, …, в последней — 55. Петя и Вася играют в следующую игру, делая ходы по очереди; начинает Петя. За один ход игрок берёт одну конфету из любой кучки. Если игрок забрал из кучки последнюю конфету, то он её съедает, а иначе выбрасывает. Игра продолжается до тех пор, пока все конфеты из кучек не будут съедены или выброшены. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно съесть Петя?

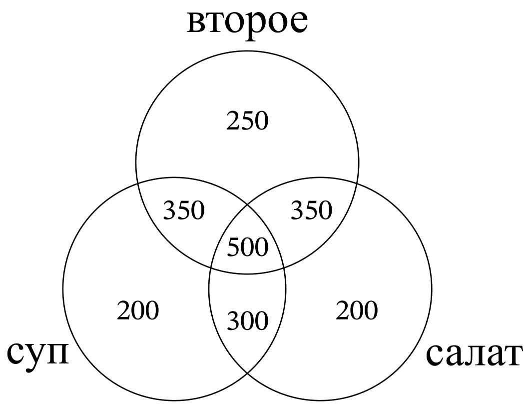
Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 9.1. *(15 баллов)* Артём, Боря, Вадим и Гриша вернулись из леса, в котором они собирали грибы. Если бы Артём собрал в 2 раза меньше, а Боря в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Вадима и Гриши вместе. А если бы Вадим собрал в 2 раза меньше, а Гриша в 2 раза больше, то у них в сумме было бы столько же, сколько у Артёма и Бори вместе. Докажите, что Вадим собрал грибов в 2 раза больше, чем Боря, а Артём собрал грибов в 2 раза больше, чем Гриша.

Задача 9.2. *(15 баллов)* Существует ли 1000-значное натуральное число, состоящее из ненулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

Задача 9.3. *(15 баллов)* В кафе цены за обед определяются в рублях согласно следующей диаграмме:



Например, только за салат надо заплатить 200 рублей, а за суп + второе — 350 рублей.

В это кафе пришла группа туристов, которым в сумме требуется 50 вторых блюд, 30 салатов и 15 супов. За какую наименьшую плату можно накормить группу?

Задача 9.4. *(15 баллов)* Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На сторонах AB и BC нашлись точки N и M соответственно такие, что $\angle BAC = \angle NOA$ и $\angle BCA = \angle MOC$. Точка K — центр описанной окружности треугольника MBN. Докажите, что $AK = CK$.

Задача 9.5. *(20 баллов)* Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a + b = \frac{9}{c-d}$ и $c + d = \frac{25}{a-b}$. Какое наименьшее значение может принимать величина $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?

Задача 9.6. *(20 баллов)* Было n внешне одинаковых монет, которые весят $x_1, x_2, \dots, x_n$ граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1, \dots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов $x_1, x_2, \dots, x_8$, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 10.1. *(15 баллов)* Существуют ли многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что многочлены $P(x) \cdot Q(x)$, $Q(x) \cdot R(x)$ и $P(x) \cdot R(x)$ имеют одинаковую степень, а многочлены $P(x) + Q(x)$, $P(x) + R(x)$ и $Q(x) + R(x)$ имеют попарно различные степени? (Считаем, что нулевой многочлен степени не имеет, то есть указанные многочлены не могут быть ему равны.)

Задача 10.2. *(15 баллов)* Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$. На стороне CD нашлась точка N такая, что $\angle DNB = 90°$. Докажите, что $AD + NC = DN$.

Задача 10.3. *(15 баллов)* Для действительных чисел $x > 2$ и $y > 2$ докажите, что

$$\frac{x^2 - x}{y^2 + y} + \frac{y^2 - y}{x^2 + x} > \frac{2}{3}.$$

Задача 10.4. *(15 баллов)* Однажды 45 друзей, живущих в разных уголках земного шара, захотели обменяться друг с другом новостями. Для этого они собираются устроить k видеовстреч, на каждой из которых каждый человек расскажет всем свои новости, а также все новости других людей, которые он узнал ранее.

Для видеовстреч было предложено 10 дней, но оказалось, что каждый из друзей может присутствовать только в какие-то 8 из них. При каком наименьшем натуральном k можно гарантированно выбрать k дней для видеовстреч из предложенных 10 так, чтобы каждый узнал новости каждого?

(Между предложенными днями у людей новых новостей не возникает, и никак иначе они друг с другом не общаются. В каждый из предложенных дней проходит одна видеовстреча, на которой собираются все, кто может в этот день присутствовать.)

Задача 10.5. *(20 баллов)* Найдите все составные натуральные числа n, обладающие следующим свойством: каждый натуральный делитель числа n (в частности, само n), уменьшенный на 1, является квадратом целого числа.

Задача 10.6. *(20 баллов)* Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH^2 = BH^2 + CH^2$. На описанной окружности треугольника ABC нашлись точки D и E такие, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Докажите, что точка H лежит на прямой DE.

Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 11.1. *(15 баллов)* Каждое натуральное число покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный, причём все 3 цвета встречаются. Может ли оказаться так, что сумма любых двух чисел разных цветов является числом оставшегося цвета?

Задача 11.2. *(15 баллов)* Различные действительные числа x, y, z таковы, что среди трёх чисел

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{y+z}{y^2+yz+z^2}, \quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2}$$

какие-то два равны. Верно ли, что все эти три числа равны?

Задача 11.3. *(15 баллов)* Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}(a,b) + \text{НОД}(b,c) + \text{НОД}(c,a).$$

Задача 11.4. *(15 баллов)* В окружность ω вписан треугольник ABC такой, что $AB < BC$. Биссектриса внешнего угла B пересекает ω в точке M. Прямая, параллельная BM, пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны CA за точку A в точках P, Q и R соответственно. Прямая MR вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что точки B, P, Q, X лежат на одной окружности.

Задача 11.5. *(20 баллов)* Дана клетчатая доска 100×100. Каждая клетка доски покрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Назовём раскраску доски *уравновешенной,* если в каждой строке и в каждом столбце 50 белых и 50 чёрных клеток. За одну операцию разрешается выбрать две строки и два столбца так, чтобы из 4 клеток на их пересечении две были чёрными, а две — белыми, и перекрасить каждую из этих 4 клеток в противоположный цвет. Докажите, что из любой уравновешенной раскраски можно получить любую другую уравновешенную раскраску с помощью указанных операций.

Задача 11.6. *(20 баллов)* Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что в совокупности они имеют 4 различных действительных корня, а также каждый из многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ имеет 4 различных действительных корня. Какое наименьшее количество различных действительных чисел может быть среди корней многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$?