Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
6 класс

Задача 1. Трое путников подошли к широкой реке, у берега которой им удалось найти старый плот. Надпись на плоте гласит, что он может перевозить не более 7 пудов за раз. Как путникам переправиться через реку, если двое из них весят по 3 пуда, а третий — 5 пудов?

Решение. Сначала двое «лёгких» путников переправятся на второй берег. Потом один из них вернётся с плотом. Далее «тяжёлый» путник переправится на плоту в одиночку. После этого «лёгкий» путник, оставшийся на втором берегу, сможет вернуться на исходный берег с плотом; и это позволит обоим лёгким путникам окончательно переправиться на второй берег. □

Критерии

7 б. Любой верный алгоритм переправы.

Задача 2. Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

Ответ: 4, 5, 15, 16.

Решение. Номер последнего почтового вагона не может превышать 20; количество почтовых вагонов в четыре раза меньше этого номера и потому не превышает 5. Так как почтовых вагонов чётное число, то их всего 2 или 4.

Предположим, что их два. Тогда первый из них имеет номер 2, а последний — 8. Но они не соседние, что противоречит условию.

Значит, почтовых вагонов четыре. Первый из них имеет номер 4; ещё один почтовый вагон с ним сцеплен — он может иметь только номер 5. Последний почтовый вагон имеет номер 16; сцепленный с ним — номер 15. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Верный ответ.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 6 и больше.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 2.

Задача 3. У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы каждое их них делилось на 9?

Ответ: 36.

Решение. Сумма цифр в каждом числе делится на 9, а значит, и общая сумма использованных цифр тоже. Сумма всех данных цифр $1 + 2 + \ldots + 7$ равна 28. Если выкинуть цифру 1, то останется 27, что делится на 9; при выкидывании остальных цифр получить сумму, кратную 9, нельзя. Значит, использованы цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Заметим, что наименьшая возможная сумма трёх из этих цифр равна $2+3+4 = 9$, а наибольшая — $5+6+7 = 18$. Другие суммы, кратные 9, получить нельзя; а 9 и 18 можно получить только одним способом. Получается, одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — из 5, 6, 7.

Есть шесть чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, и шесть чисел, которые можно составить из цифр 5, 6, 7. Нам подходят всевозможные пары этих чисел. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

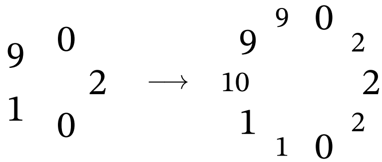
2 б. Доказано, что цифра 1 не используется.

3 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что цифра 1 не используется, доказано, что одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — 5, 6, 7.

   1 б. Предыдущее не доказано, но сформулировано.

2 б. Имеется верный ответ.

Задача 4. На доске по кругу написаны пять чисел 2, 0, 1, 9, 0 в указанном порядке по часовой стрелке (последний ноль написан рядом с первой двойкой). За ход между парами соседних чисел вписывается их сумма. Например, такое расположение чисел (справа) будет после первого хода:



Спустя 5 ходов Полина вычислила сумму всех чисел от первого нуля (того, который первоначально был между 2 и 1) до второго нуля (того, который первоначально был между 9 и 2) при обходе круга по часовой стрелке, а Алина — сумму всех остальных чисел. Чему равняется разность чисел Алины и Полины?

Ответ: $8 \cdot 3^5 = 1944$.

Решение. Посмотрим, как меняются числа, заключённые между первым и вторым нулём (которые в конце посчитает Полина). На очередном ходу каждое «старое» число входит в качестве слагаемого в два «новых» числа. Это означает, что если все «новые» числа сложить, то каждое «старое» число окажется просуммировано дважды, то есть сумма «новых» чисел в два раза больше суммы «старых». Таким образом, общая сумма чисел, заключённых между первым и вторым нулём, на каждом ходу утраивается.

То же самое происходит и с остальными числами. Осталось заметить, что их разность изначально равна 8, и будет утраиваться каждый ход. Через пять ходов она достигнет значения $8 \cdot 3^5 = 1944$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что сумма чисел на отрезке между двумя нулями утраивается на каждом ходу.

3 б. Есть верный ответ.

Задача 5. У Ивана Царевича есть 10 золотых монет. Он знает, что среди них есть 5 настоящих и 5 фальшивых, но не умеет их отличать друг от друга. Как известно, Баба Яга умеет отличать фальшивые монеты от настоящих. Иван договорился с Бабой Ягой, что он будет показывать на любые три монеты, а она будет выбирать две из них (Иван знает, какие монеты выбирает Баба Яга) и говорить, сколько из них фальшивых. Сможет ли Баба Яга, говоря только правду, сделать так, чтобы Иван не смог распознать все 5 фальшивых монет за 2020 вопросов?

Ответ: да.

Решение. Пусть Баба Яга выберет одну фальшивую монету и одну настоящую, и назовёт их *секретными*. Тогда она может добиться того, чтобы Иван не узнал, какая из них какая, следующим способом.

Если Иван спрашивает про три монеты, среди которых одна секретная, Баба Яга выберет две несекретные монеты и скажет, сколько среди них фальшивых. Если Иван спрашивает про три монеты, среди которых обе секретных, Баба Яга выберет две секретные монеты и ответит, что среди них одна фальшивая. А если Иван спросит про три монеты, среди которых секретных нет, Баба Яга выберет две произвольные из них и скажет, сколько среди них фальшивых.

Заметим, что если две секретные монеты поменять местами, то ответы Бабы Яги не изменятся. Значит, с точки зрения Ивана Царевича ситуация, в которой первая секретная монета настоящая, и ситуация, в которой она фальшивая, останутся возможны, и исключить ни одну из них ему не удастся. Получается, что угадать все фальшивые монеты он не сможет. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведён верный алгоритм действий Бабы Яги, но почему он работает, не очевидно.

0 б. Есть только ответ «да».

В случае, если в решении приводится алгоритм действий Бабы Яги, аналогичный описанному выше, баллы за следующие недочёты не снижаются:

- Указано, но не доказано, что Иван не сможет различить секретные монеты.
- Не указано, что делает Баба Яга в случае, когда среди трёх монет секретных нет.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
7 класс

Задача 1. Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

Ответ: 4, 5, 15, 16.

Решение. Номер последнего почтового вагона не может превышать 20; количество почтовых вагонов в четыре раза меньше этого номера и потому не превышает 5. Так как почтовых вагонов чётное число, то их всего 2 или 4.

Предположим, что их два. Тогда первый из них имеет номер 2, а последний — 8. Но они не соседние, что противоречит условию.

Значит, почтовых вагонов четыре. Первый из них имеет номер 4; ещё один почтовый вагон с ним сцеплен — он может иметь только номер 5. Последний почтовый вагон имеет номер 16; сцепленный с ним — номер 15. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Верный ответ.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 6 и больше.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 2.

Задача 2. У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы их произведение делилось на 81, а сумма делилась на 9?

Ответ: 36.

Решение. Если одно из чисел не делится на 9, то второе тоже, так как их сумма делится на 9. Но тогда произведение не может делиться на 81, противоречие. Следовательно, оба числа делятся на 9.

Тогда сумма цифр в каждом числе делится на 9, а значит, и общая сумма использованных цифр тоже. Сумма всех данных цифр $1+2+\ldots+7$ равна 28. Если выкинуть цифру 1, то останется 27, что делится на 9; при выкидывании остальных цифр получить сумму, кратную 9, нельзя. Значит, использованы цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Заметим, что наименьшая возможная сумма трёх из этих цифр равна $2+3+4=9$, а наибольшая — $5+6+7=18$. Другие суммы, кратные 9, получить нельзя; а 9 и 18 можно получить только одним способом. Получается, одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — из 5, 6, 7.

Есть шесть чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, и шесть чисел, которые можно составить из цифр 5, 6, 7. Нам подходят всевозможные пары этих чисел. $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Доказано, что оба числа должны делится на 9.

2 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9, доказано, что цифра 1 не используется.

3 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9 и цифра 1 не используется, доказано, что одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — 5, 6, 7.

  1 б. Предыдущее не доказано, но сформулировано.

1 б. Имеется верный ответ.

Задача 3. У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

Решение. Будем называть строку, столбец или диагональ, вдоль которой Андрей суммировал числа, *линией.* Заметим, что всего есть 20 линий, состоящих из нечётного числа клеток (по 5 линий каждого направления). Так как все числа в таблице нечётны, то и все суммы в этих линиях нечётны. При этом они не могут превышать $5\cdot7=35$. Нечётных чисел от 1 до 35 всего $(35-1)/2+1=18$. Значит, по принципу Дирихле в каких-то двух линиях окажется одно и то же число. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Идея рассмотрения только линий с нечётным количеством клеток или только нечётных сумм или сумм с нечётным количеством слагаемых, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что линий с нечётным количеством клеток ровно 20, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что возможных нечётных сумм всего 18, но дальнейших продвижений нет.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. На отрезке BC выбрана точка E, а на отрезке CL — точка D так, что $\angle LDE = 90°$, $AL = DE$. Докажите, что $AB = LD + BE$.

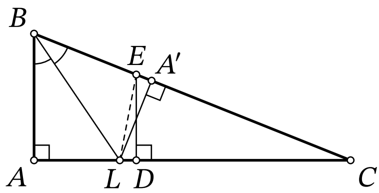


Рис. 1: к решению задачи 4

Решение. Отметим на стороне BC точку A' такую, что $BA' = BA$, как на рис. 1. Заметим, что мы свели задачу к $A'B = LD + BE$, что, как легко видеть, эквивалентно $EA' = LD$ (то, что точка A' не может оказаться между B и E, будет следовать из дальнейших рассуждений).

Треугольники BAL и $BA'L$ равны по двум сторонам и углу между ними ($BL = BL$, $BA = BA'$, $\angle ABL = \angle A'BL$). Отсюда получаем $A'L = AL = ED$ (это, в частности, означает, что расстояние от A' до AC меньше ED, и A' не может оказаться на отрезке BE) и $\angle LA'B = 90°$.

Теперь заметим, что треугольники $EA'L$ и LDE прямоугольные и равные, так как у них общая гипотенуза LD и равные катеты ED и $A'L$. Это дает требуемое равенство $EA' = LD$. □

Замечание. В последней части решения можно было вместо этого воспользоваться равенством треугольников $LA'C$ и EDC по катету и острому углу. Тогда можно записать цепочку равенств $AB = A'B = BC - A'C = (BC - EC) + (EC - A'C) = BE + (LC - DC) = BE + LD$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 2 б. Есть идея построения точки A' (сделано отражение относительно биссектрисы или отложен отрезок BA на гипотенузе).

Задача 5. Шесть мальчиков и шесть девочек встали в круг, чередуясь. Каждый из них написал в своем блокноте ненулевое число. Известно, что каждое число, написанное мальчиком, равно сумме чисел, написанных рядом стоящими девочками, а каждое число, написанное девочкой, равно произведению чисел, написанных рядом стоящими мальчиками. Чему может равняться сумма всех двенадцати чисел?

Ответ: 4,5

Решение. Выберем произвольных пятерых человек, стоящих по кругу подряд, крайние из которых — мальчики. Пусть их числа равны x, xy, y, yz, z. Тогда $y = xy + yz$. Так как $y \neq 0$, на него можно сократить, получив $x + z = 1$. Таким образом, сумма любых двух чисел, сказанных мальчиками, стоящими через троих, равна 1.

Пусть мальчики сказали числа a_1, a_2, ..., a_6 (в этом порядке по кругу). Тогда

$$1 = a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = \ldots = a_5 + a_1 = a_6 + a_2\,.$$

Можно заметить, что

$$6 = (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + \ldots + (a_5 + a_1) + (a_6 + a_2) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_6)\,,$$

откуда сумма всех чисел мальчиков равна 3.

С другой стороны, сумма чисел мальчиков в два раза больше суммы чисел всех девочек, ведь число каждой девочки является слагаемым для двух мальчиков. Значит, сумма чисел девочек равна 1,5. Общая сумма тогда равна 4,5.

Осталось заметить, что такая ситуация действительно возможна: все мальчики могут написать число $\frac{1}{2}$, а все девочки — число $\frac{1}{4}$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 7 б. Доказано, что сумма может быть равна только 4,5, но не приведён пример допустимой расстановки чисел.
- 1 б. Указано, что сумма чисел девочек в два раза меньше суммы чисел мальчиков.

3 б. Доказано, что сумма чисел мальчиков, стоящих «через три», равна 1.

0 б. Верный ответ.

1 б. Верный пример расстановки чисел.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
8 класс

Задача 1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}\,.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

Ответ: нет

Решение. Равенство выполняется при $a = -b$, например, при $a = 1$ и $b = -1$. □

Замечание. На самом деле, равенство выполняется только при $a = b$ или $a = -b$. Действительно, домножив его на a/b^3 и обозначив $a/b = \lambda$, получим $\lambda^3 + 1 = \lambda + \lambda^4$. Это эквивалентно равенству $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$, где левая часть раскладывается на множители: $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. Нетрудно понять, что $\lambda = \pm 1$ являются единственными корнями этого уравнения, что соответствует $a = \pm b$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи. В частности, достаточно привести пример различных a и b, при которых достигается равенство, или указать, что это происходит при $a = -b$.

0 б. Есть только ответ «нет».

Задача 2. У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

Решение. Будем называть строку, столбец или диагональ, вдоль которой Андрей суммировал числа, *линией.* Заметим, что всего есть 20 линий, состоящих из нечётного числа клеток (по 5 линий каждого направления). Так как все числа в таблице нечётны, то и все суммы в этих линиях нечётны. При этом они не могут превышать $5 \cdot 7 = 35$. Нечётных чисел от 1 до 35 всего $(35-1)/2+1 = 18$. Значит, по принципу Дирихле в каких-то двух линиях окажется одно и то же число. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 1 б. Идея рассмотрения только линий с нечётным количеством клеток или только нечётных сумм или сумм с нечётным количеством слагаемых, но дальнейших продвижений нет.
- 3 б. Указано, что линий с нечётным количеством клеток ровно 20, но дальнейших продвижений нет.
- 3 б. Указано, что возможных нечётных сумм всего 18, но дальнейших продвижений нет.

Задача 3. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Боливаре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

Ответ: у 12-го, считая от А.

Решение. Примем расстояние от А до Б за единицу, а время будем измерять в минутах. Тогда скорость Додсона равна $1/9$, скорость Уильямса — $1/11$, а скорость Боливара — $1/3$.

Пусть искомый столб имеет номер k (то есть расстояние от города А равно $k/28$). Тогда Додсон доберется за время

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{3} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{9} = 9 - \frac{6k}{28},$$

а Уильямс за

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{11} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{3} = 3 + \frac{8k}{28}.$$

Найдём k, при котором эти значения совпадают:

$$9 - \frac{6k}{28} = 3 + \frac{8k}{28} \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot 28 = 14k \quad \Leftrightarrow \quad k = 12.$$

Осталось понять, почему $k = 12$ даёт наилучшее время. Действительно, при меньших k увеличится время Додсона, а при бо́льших — время Уильямса. Таким образом, при всех остальных k время хотя бы одного из персонажей будет больше, чем при $k = 12$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Найдено положение столба, при котором время персонажей совпадает, но не доказано, что это наилучшее время.

2 б. Имеется идея приравнять время персонажей, но допущена ошибка при составлении или решении уравнения.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На продолжении гипотенузы BC за точку C нашлась точка X такая, что

$$HX = \frac{BH + CX}{3}\,.$$

Докажите, что $2\angle ABC = \angle AXC$.

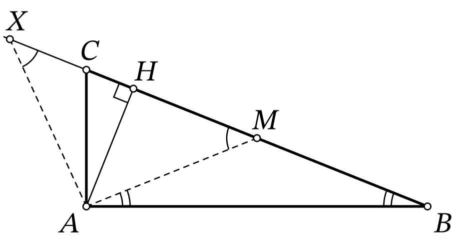


Рис. 2: к решению задачи 4

Решение. Заметив, что $CX = HX - CH$, данное равенство можно переписать как $3HX = BH + (HX - CH)$, или $HX = \frac{1}{2}(BH - CH)$.

Ясно, что величина $HX = \frac{1}{2}(BH - CH)$ положительна. Оказывается, она равна расстоянию от H до середины BC, которую мы обозначим за M. Действительно,

$$HM = |CM - CH| = \left|\tfrac{1}{2}(BH + CH) - CH\right| = \left|\tfrac{1}{2}(BH - CH)\right| = \tfrac{1}{2}(BH - CH)\,.$$

Теперь понятно, как построить точку X другим способом: просто отложим отрезок HM в другую сторону от точки H (рис. 2). Отсюда следует, что треугольник

MAX равнобедренный (его высота AH является и медианой). Воспользовавшись тем, что треугольник AMB также равнобедренный (по свойству медианы, проведённой к гипотенузе), получаем

$$\angle AXC = \angle AMH = \angle ABM + \angle BAM = 2\angle ABM\,. \qquad \square$$

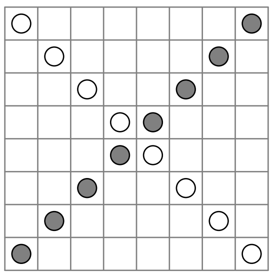
Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов.

Задача 5. В клетках шахматной доски 8×8 стоят 8 белых и 8 чёрных фишек так, что никакие две фишки не стоят в одной клетке. Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке не стоят одноцветные фишки. Для каждой белой фишки посчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих расстояний? Расстоянием между фишками будем считать расстояние между центрами клеток, которые они занимают.

Ответ: 32

Решение. Пример расположения фишек, при котором сумма расстояний равна 32, приведён на рисунке:



Докажем, что больше 32 сумма расстояний быть не может. Для этого рассмотрим произвольную расстановку фишек, удовлетворяющую условию. Пусть S — это сумма расстояний, указанных в условии.

Пусть в i-м столбце белая и чёрная фишка находятся соответственно в строках a_i и b_i. Оценим расстояние между ними:

$$|a_i - b_i| = |(a_i - 4{,}5) - (b_i - 4{,}5)| \leqslant |a_i - 4{,}5| + |b_i - 4{,}5|$$

(по сути это неравенство треугольника для точек a_i, b_i и 4,5 на прямой).

Просуммировав эту оценку для всех разностей $|a_i - b_i|$, получим

$$S \leqslant |a_1 - 4{,}5| + |a_2 - 4{,}5| + \ldots + |a_8 - 4{,}5| + |b_1 - 4{,}5| + |b_2 - 4{,}5| + \ldots + |b_8 - 4{,}5|\,.$$

Заметим, что правая часть не зависит от расположения фишек, так как числа a_i, $0 \leqslant i \leqslant 8$, являются некоторой перестановкой чисел от 1 до 8. Аналогично с b_i. Имеем

$$S \leqslant |1-4{,}5|+|2-4{,}5|+\ldots+|8-4{,}5|+|1-4{,}5|+|2-4{,}5|+\ldots+|8-4{,}5| = \\ = 2\cdot(3{,}5+2{,}5+1{,}5+0{,}5+0{,}5+1{,}5+2{,}5+3{,}5) = 32\,. \qquad \square$$

Замечание. Из доказательства оценки нетрудно понять, как устроен любой пример с нужной суммой расстояний: в каждом столбце фишка одного цвета находится в верхней половине, а фишка другого цвета — в нижней. В ином случае равенство в неравенстве треугольника не будет достигаться.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

6 б. Доказано, что сумма расстояний не может превышать 32.

Если решение необоснованно сводится к некоторому «оптимальному» случаю или классу случаев (например, бездоказательно утверждается, что в каждом столбце чёрная и белая фишки должны располагаться в разных половинах столбца), то баллы за эту часть не ставятся.

1 б. Приведён пример расположения фишек, сумма расстояний в котором равна 32.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
9 класс

Задача 1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}\,.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

Ответ: нет

Решение. Равенство выполняется при $a = -b$, например, при $a = 1$ и $b = -1$. $\square$

Замечание. На самом деле, равенство выполняется только при $a = b$ или $a = -b$. Действительно, домножив его на a/b^3 и обозначив $a/b = \lambda$, получим $\lambda^3 + 1 = \lambda + \lambda^4$. Это эквивалентно равенству $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$, где левая часть раскладывается на множители: $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. Нетрудно понять, что $\lambda = \pm 1$ являются единственными корнями этого уравнения, что соответствует $a = \pm b$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи. В частности, достаточно привести пример различных a и b, при которых достигается равенство, или указать, что это происходит при $a = -b$.

0 б. Есть только ответ «нет».

Задача 2. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Боливаре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

Ответ: у 12-го, считая от А.

Решение. Примем расстояние от А до Б за единицу, а время будет измерять в минутах. Тогда скорость Додсона равна 1/9, скорость Уильямса — 1/11, а скорость Боливара — 1/3.

Пусть искомый столб имеет номер k (то есть расстояние от города А равно $k/28$). Тогда Додсон доберется за время

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{3} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{9} = 9 - \frac{6k}{28}\,,$$

а Уильямс за

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{11} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{3} = 3 + \frac{8k}{28}\,.$$

Найдём k, при котором эти значения совпадают:

$$9 - \frac{6k}{28} = 3 + \frac{8k}{28} \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot 28 = 14k \quad \Leftrightarrow \quad k = 12\,.$$

Осталось понять, почему $k = 12$ даёт наилучшее время. Действительно, при меньших k увеличится время Додсона, а при бóльших — время Уильямса. Таким образом, при всех остальных k время хотя бы одного из персонажей будет больше, чем при $k = 12$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Найдено положение столба, при котором время персонажей совпадает, но не доказано, что это наилучшее время.

2 б. Имеется идея приравнять время персонажей, но допущена ошибка при составлении или решении уравнения.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 3. В треугольнике ABC с углами $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 20^\circ$ и $\angle C = 125^\circ$ отмечен центр описанной окружности — точка O. Докажите, что точки O, A, B, C являются вершинами трапеции.

Решение. Ясно, что раз угол C треугольника тупой, то точки C и O лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 3). Центральный угол BOA, соответствующий вписанному углу BCA, равен 250°; внутренний угол BOA интересующего нас четырёхугольника дополняет его до 360° и равен 110°.

Так как треугольник BOA равнобедренный, углы ABO и BAO равны по $90^\circ - \frac{110^\circ}{2} = 35^\circ$. Теперь можно заметить, что углы CAB и ABO равны по 35° и

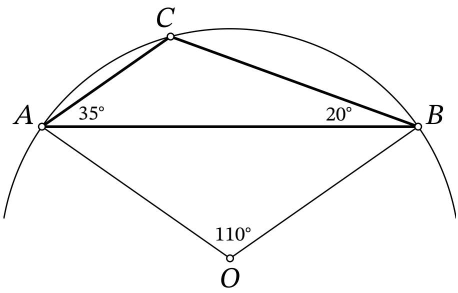


Рис. 3: к решению задачи 3

являются накрест лежащими при прямых CA и BO и секущей AB, то есть прямые CA и BO параллельны.

С другой стороны, углы CBA и BAO не равны, откуда следует, что прямые CB и AO не параллельны. Это означает, что $OACB$ — трапеция (и не параллелограмм). $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов.

За отсутствие доказательства того, что $OACB$ не является параллелограммом, баллы не снижаются.

Задача 4. В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

Ответ: 61.

Решение. Обозначим числа в вершинах за $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$. Так как сумма любых девяти подряд идущих чисел одинаковая, то числа, стоящие через 8 других, равны. Отсюда $x_1 = x_{10} = x_{19} = \ldots = x_{1+9k} = \ldots$. Так как 2019 не делится на 9, но делится на 3, то при продолжении этой цепочки по циклу в неё войдут все числа вида x_{3k+1}. Аналогичные цепочки можно построить от чисел x_2 и x_3. Получается, что числа, стоящие в вершинах, имеющих одинаковые остатки при делении на 3, равны.

Так как каждая девятка подряд идущих чисел содержит три набора вершин с разными остатками от деления на 3, то сумма чисел в каждом таком наборе равна 100. Заметим, что 19 даёт остаток 1 при делении на 3, 20 даёт остаток 2, а 2019 даёт остаток 0, поэтому число, записанное в вершине 2019, равно $100 - 19 - 20 = 61$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что числа, идущие через 2, равны.

1 б. Замечено, что числа, идущие через 8, равны.

Задача 5. При дворе служат 50 мушкетёров. Каждый день они разбиваются на пары и проводят тренировочные поединки. Верно ли, что спустя 24 дня найдутся три мушкетёра, которые не участвовали в тренировочных поединках друг с другом?

Ответ: да, найдутся.

Решение. Предположим противное — пусть такой тройки мушкетёров не найдется.

Выделим одного мушкетёра, пусть его зовут Петя. Согласно условию, он вступал в поединки не более чем с 24 другими. Рассмотрим множество из 25 мушкетёров, с которыми он не вступал в поединки (если их больше, часть уберём из рассмотрения), и покрасим их в синий цвет.

Среди синих мушкетёров любые два должны были встречаться в поединке, иначе вместе с Петей они образуют искомую тройку. Получается, каждый из синих мушкетёров провёл по поединку с каждым из остальных синих, а с другими мушкетёрами не проводил, ведь всего поединков у него только 24.

Теперь рассмотрим произвольный день, в который проходили поединки. Синие мушкетёры в этот день должны разбиться на пары между собой, ведь ни с кем больше они в поединки не вступали. Но это противоречит тому, что их нечётное число. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Рассмотрено множество мушкетёров, с которыми некоторый фиксированный мушкетёр не вступал в поединки, и указано, что в этом множестве все вступали друг с другом в поединки.

0 б. Есть только ответ «да».

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
10 класс

Задача 1. Найдите такие два числа a и b, что b получается из a перестановкой цифр, причём $a - b$ состоит только из цифр 1.

Ответ: например, 234567809 и 345678920.

Критерии

Любой верный пример оценивается в 7 баллов.

Задача 2. В таблице 3×3 расставили натуральные числа (не обязательно различные) так, что суммы во всех строках и столбцах получились различными. Какое минимальное значение может принимать сумма чисел в таблице?

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что в каждой строке и столбце сумма чисел не меньше 3. Тогда удвоенная сумма чисел во всей таблице, равная сумме сумм чисел в строках и столбцах, не меньше $3 + 4 + \ldots + 8 = 33$, поэтому просто сумма чисел в таблице не меньше 17.

Пример таблицы с суммой 17:

1	1	1
1	2	2
2	3	4

$\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что сумма чисел в таблице не меньше 17.

3 б. Приведён пример таблицы с суммой 17.

Задача 3. В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

Ответ: 61.

Решение. Обозначим числа в вершинах за x_1, x_2, ..., x_{2019}. Так как сумма любых девяти подряд идущих чисел одинаковая, то числа, стоящие через 8 других, равны. Отсюда $x_1 = x_{10} = x_{19} = \ldots = x_{1+9k} = \ldots$. Так как 2019 не делится на 9, но делится на 3, то при продолжении этой цепочки по циклу в неё войдут все числа вида x_{3k+1}. Аналогичные цепочки можно построить от чисел x_2 и x_3. Получается, что числа, стоящие в вершинах, имеющих одинаковые остатки при делении на 3, равны.

Так как каждая девятка подряд идущих чисел содержит три набора вершин с разными остатками от деления на 3, то сумма чисел в каждом таком наборе равна 100. Заметим, что 19 даёт остаток 1 при делении на 3, 20 даёт остаток 2, а 2019 даёт остаток 0, поэтому число, записанное в вершине 2019, равно $100 - 19 - 20 = 61$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Доказано, что числа, идущие через 2, равны.
- 1 б. Замечено, что числа, идущие через 8, равны.

Задача 4. У Поликарпа есть 2 коробки, в первой из которых лежит n монет, а вторая пустая. За один ход он может либо переложить одну монету из первой коробки во вторую, либо убрать из первой коробки ровно k монет, где k — количество монет во второй коробке. При каких n Поликарп может сделать первую коробку пустой не более чем за 10 ходов?

Ответ: при n от 0 до 30 включительно.

Решение. Назовём ход, при котором перекладывается одна монета из первой коробки во вторую, ходом *первого типа,* а ход, при котором монеты убираются из первой коробки — ходом *второго типа.* Пусть всего было сделано x ходов первого типа и y ходов второго типа. Тогда во второй коробке не больше x монет. Поэтому при выполнении ходов второго типа мы заберём из первой коробки не более xy монет, значит, в сумме заберём не более $x + xy$ монет. Так как $x + y \leqslant 10$, то

$$x + xy \leqslant x + x(10 - x) = -x^2 + 11x\,.$$

При целочисленных значениях x максимум этого выражения достигается в точках $x = 5$ и $x = 6$ и равен $5 \cdot 6 = 30$. Таким образом, $n \leqslant 30$. Докажем, что любое $n \leqslant 30$ подходит.

Если сделать 5 ходов первого типа, а после этого 5 ходов второго типа, то мы уберём из первой коробки ровно 30 монет. Выпишем последовательность из 1 и 2, где 1 обозначает ход первого типа, а 2 — ход второго типа. Заметим, что если в этой последовательности поменять соседнюю пару 12 на пару 21, то итоговое количество монет, извлечённых из первой коробки, уменьшится на 1. Так мы можем делать, пока все 2 не окажутся слева, а все 1 — справа. Теперь будем заменять 1 на 2, и на каждом шаге количество извлечённых монет с помощью такой последовательности операций тоже будет уменьшаться на 1. Таким образом, для любого n от 0 до 30 мы можем предъявить нужную последовательность операций. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

Если в решении n считается натуральным, и в ответе не упомянуто число 0, то балл не снижается.

4 б. Доказано, что n не превышает 30, но не объяснено, почему все меньшие n тоже подходят.

3 б. Описаны все примеры для n от 1 до 30.

За следующую ошибку в решении, которое в остальном подходит под один из критериев выше, снижается балл:

-1 б. Максимальное значение выражения $-x^2+11x$ при целых x найдено неверно из-за арифметической ошибки.

Задача 5. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Точка G такова, что четырёхугольник $ABGH$ — параллелограмм. Пусть I — такая точка на прямой GH, что AC делит HI пополам. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника GCI в точках C и J. Докажите, что $IJ = AH$.

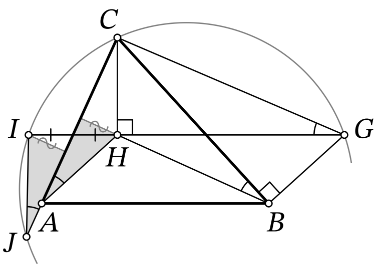


Рис. 4: к решению задачи 5

Решение. Заметим, что нам достаточно доказать $\angle IJC = \angle CAH$. Действительно, если мы это установим, то можно будет опустить перпендикуляры II_1 и HH_1

на AC — они окажутся равны, так как IH делится прямой AC пополам — и получить равенство прямоугольных треугольников JI_1I и AH_1H по углу и катету (рис. 4).

Так как $JICG$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle IJC = \angle IGC$. Далее, $CH \perp AB \parallel HG$ и $CB \perp AH \parallel BG$, откуда $\angle CHG = \angle CBG = 90°$, то есть четырёхугольник $CHBG$ также вписанный. Отсюда имеем $\angle IGC = \angle HGC = \angle HBC$.

Наконец, углы HBC и CAH равны, так как это углы между сторонами и высотами, и оба они дополняют угол C треугольника до $90°$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Задача *сведена к* доказательству того, что углы IJC и CAH равны, но равенство этих углов не доказано.

1 б. Доказана вписанность четырёхугольника $CHBG$.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап.

11 класс

Задача 1. В Курчатовской школе за каждой партой сидит ровно 2 человека. Известно, что ровно у 70% мальчиков сосед по парте — мальчик, а ровно у 40% девочек — девочка. Во сколько раз мальчиков больше чем девочек?

Ответ: в 2 раза.

Решение. Пусть количество мальчиков x, а девочек — y. Заметим, что 30% мальчиков сидит за партами с девочками и 60% девочек сидят за партами с мальчиками. Так как за каждой партой сидит ровно 2 человека, то $0{,}3x = 0{,}6y$, откуда $x = 2y$. Таким образом, мальчиков в 2 раза больше, чем девочек. □

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Приведен частный случай.

1 б. Только верный ответ.

Задача 2. Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 20 в синий и красный цвета так, чтобы оба цвета встречались и произведение всех красных чисел было взаимно просто с произведением всех синих чисел.

Ответ: $2^6 - 2 = 62$ способа.

Решение. Заметим, что все чётные числа должны быть одного цвета. Так как среди них содержатся числа 6, 10 и 14, то числа, кратные 3, 5 и 7 должны быть того же цвета. Остались числа 1, 11, 13, 17 и 19. Заметим, что их можно распределить как угодно по двум цветам. Таким образом, у нас есть 6 групп, каждая из которых может быть любого цвета, т. е. всего 2^6 способов раскраски.

Заметим, что из них не подходят 2 варианта, в которых все числа одного цвета. Итого получается $2^6 - 2 = 62$ способа. $\square$

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Замечено, что чётные числа, а также числа, кратные 3, 5 и 7, должны быть одного цвета.

1 б. Есть верный ответ.

За следующие ошибки во в целом верном решении снижаются баллы:

−1 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться.

−2 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться, и не учтено, что “1” не взаимно простое число.

−2 б. Не учтена альтернативная раскраска, т.е. возможны две пары групп: 1 группа - красная, 2 группа - синяя и 1 группа - синяя, 2 группа - красная.

−1 б. При рассмотрении одноцветных групп пропущено число 1 или одно из простых чисел, больших 10. Если упущено больше одноцветных групп, решение не считается в целом верным.

−3 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться, и не учтена альтернативная раскраска.

Задача 3. На доске написаны числа $2, 3, 5, \ldots, 2003, 2011, 2017$, т.е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

Ответ: Максимальное значение равно 2011.

Решение. Заметим, что если $a < b$, то $a < \sqrt{a^2 - ab + b^2} < b$. Действительно, $a^2 < a^2 - ab + b^2$, так как $ab < b^2$ и $a^2 - ab + b^2 < b^2$, так как $a^2 < ab$.

Таким образом, число 2017 или какое-то большее него не может появиться после какой-то операции. Но последнее число появилось после какой-то операции, поэтому оно не больше 2011.

Отложим число 2017 и будем применять операцию к двум наибольшим оставшимся числам x и y, где $x < y$. Заметим, что так как x и y — это два соседних простых числа, то наибольшее число, не превосходящее $\sqrt{x^2 - xy + y^2}$ — это x. Таким образом, мы каждый раз будем откидывать самое большое из наших чисел, пока на доске не останутся числа 2 и 2017.

Теперь применим операцию к числам 2 и 2017. Заметим, что $2017^2 - 2 \cdot 2017 + 2^2 > 2011^2$, поэтому в результате этой операции на доске окажется число 2011. $\square$

Замечание. Неравенство $a < \sqrt{a^2 - ab + b^2} < b$ при $a < b$ можно доказать геометрически. Дело в том, что в треугольнике со сторонами a и b и углом 60° между ними длина третьей стороны равна как раз $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. А так как угол 60° всегда средний по величине в своем треугольнике, то и лежащая напротив него сторона также средняя по величине.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Показано, как получить 2011, но не доказано, что нельзя получить большее число.

4 б. Доказано, что число, большее 2011, получить нельзя.

Задача 4. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. На отрезке AC нашлась точка M такая, что $SM = MB$ и плоскости SBM и SAB перпендикулярны. Найдите отношение $AM : AC$.

Ответ: $3 : 4$.

Решение. Обозначим центр основания $ABCD$ за O. Тогда $SO \perp AC$ и $BD \perp AC$, откуда $SB \perp AC$. Это означает, что серединный перпендикуляр к отрезку SB (это плоскость, обозначим её за α) параллелен AC. С другой стороны, из $SM = MB$ следует, что точка M лежит в α. Тогда и вся прямая AC должна содержаться в α. Отсюда получаем $SO = OB$.

Середину SB обозначим за R. Заметим, что RM лежит сразу в двух плоскостях, перпендикулярных SAB — α и SMB. Это означает, что RM и сам перпендикулярен плоскости SAB, а также отрезку RA.

Примем длину $OS = OA = OB = OC = OD$ за 1. Тогда OR является медианой в прямоугольном равнобедренном треугольнике SOB; так как катеты этого треугольника равны по 1, имеем $OR = 1/\sqrt{2}$.

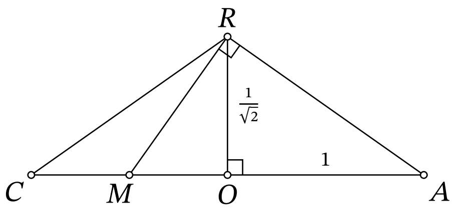


Рис. 1: к решению задачи 4

Наконец, рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью α (рис. 1). Треугольник MRA прямоугольный, причём RO в нём — высота к гипотенузе. Имеем $RO^2 = MO \cdot AO$, то есть $(1/\sqrt{2})^2 = MO \cdot 1$, откуда $MO = 1/2$. Получаем $AM = 3/2$ и $AM : AC = 3 : 4$. □

Критерии

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Решение с верными геометрическими построениями и доказательствами, но с вычислительной ошибкой в конце решения.
- 5 б. Приведено в целом верное геометрическое решение с верным ответом, в котором доказательство равенства ребер пирамиды содержит неточности.
- 3 б. Приведено геометрическое решение с верным ответом, в котором равенство ребер пирамиды используется, но не доказывается.
- 6 б. Приведено в целом верное координатно-векторное решение с неверным ответом из-за несущественной арифметической ошибки на последнем этапе вычислений.
- 3 б. Приведено идейно верное координатно-векторное решение с неверным ответом из-за вычислительной ошибки в начале или середине решения.
- 1 б. Доказано, что высота, опущенная из точки M в треугольник SBM на BS, является перпендикуляром к плоскости ABS, но в остальном решение неверное.
- 3 б. Доказано, что высота пирамиды равна половине диагонали основания пирамиды, но в остальном решение неверное.
- 4 б. Доказано, что все ребра пирамиды равны, но в остальном решение неверное, либо продвижение несущественно.

Утверждение о том, что боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали, считается очевидным; за отсутствие его доказательства баллы не снижаются.

Задача 5. Докажите, что при натуральном $n > 2$ числа от 1 до n можно разбить на два множества так, чтобы произведения чисел в множествах отличались не более чем в $\frac{n-1}{n-2}$ раз.

Решение. Докажем это утверждение индукцией по n.

База при $n = 3, 4, 5$.
При $n = 3$ разобьём на множества $\{1, 2\}$ и $\{3\}$, отношение равно $\frac{3}{2}$, что меньше $\frac{2}{1}$.
При $n = 4$ разобьём на множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{4\}$. Отношение будет $\frac{6}{4}$, что как раз равно $\frac{3}{2}$.

При $n = 5$ разобьём на множества $\{1, 2, 5\}$ и $\{3, 4\}$. Отношение равно $\frac{12}{10}$, что меньше $\frac{4}{3}$.

Переход индукции от n к $n+2$ при $n \geqslant 4$. Пусть у нас есть разбиение чисел от 1 до n, удовлетворяющее условию. Добавим в множество с меньшим произведением P_1 число $n+2$, а в множество с бóльшим произведением P_2 число $n+1$. Докажем, что произведения отличаются не более чем в $\frac{n+2-1}{n+2-2} = \frac{n+1}{n}$ раз. Так как $P_1 \leqslant P_2$, то

$$\frac{P_1 \cdot (n+2)}{P_2 \cdot (n+1)} \leqslant \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}\,.$$

С другой стороны, так как $P_2 \leqslant P_1 \frac{(n-1)}{n-2}$, то

$$\frac{P_2 \cdot (n+1)}{P_1 \cdot (n+2)} \leqslant \frac{(n-1)(n+1)}{(n-2)(n+2)} = \frac{n^2-1}{n^2-4} = 1 + \frac{3}{n^2-4}\,.$$

Докажем, что это не больше $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Это равносильно

$$\frac{3}{n^2-4} \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 3n \leqslant n^2 - 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant n^2 - 3n - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (n-4)(n+1)\,,$$

что верно при $n \geqslant 4$. Таким образом, переход доказан. □

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. В целом верное решение, но в индукционном переходе не доказывается, что для $P_1 \leqslant P_2$ будет верно $\frac{P_1(n+2)}{P_2(n+1)} < \frac{n+1}{n}$ (то есть из двух неравенств доказано «сложное»).

2 б. Есть идея шага через 2 с домножением меньшего произведения на большее число, а большего произведения на меньшее число.

0 б. Приведены подходящие разбиения для конечного числа конкретных значений n.

Задача 6. Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n, что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ и $B_n = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;

- последовательность $C_n = \dfrac{1}{\max(a_1, b_1)} + \dfrac{1}{\max(a_2, b_2)} + \ldots + \dfrac{1}{\max(a_n, b_n)}$ ограничена.

Решение. Рассмотрим последовательность $c_k = 2^k$. Ясно, что все суммы

$$C_n = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}$$

ограничены. Будем строить исходные последовательности a_n и b_n так, чтобы $\max(a_n, b_n) = c_n$. Последовательно разобьём натуральный ряд на отрезки подряд идущих чисел так, что если отрезок начинается с числа k, то его длина равна c_k. После этого раскрасим все эти отрезки поочередно в красный и синий цвета.

Теперь зададим последовательность a_n следующим образом:

- если n — красное число, то положим a_n равным числу c_n;
- если n — синее число, то положим a_n равным c_k, где k — первое число отрезка, содержащего n.

Последовательность b_n зададим аналогично, но инвертируя цвета:

- если n — синее число, то положим b_n равным числу c_n;
- если n — красное число, то положим b_n равным c_k, где k — первое число отрезка, содержащего n.

Заметим, что для каждого синего отрезка сумма обратных значений последовательности a_n на нём равна 1, поэтому последовательность сумм $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ не ограничена сверху. Аналогично, для последовательности b_n сумма обратных значений на каждом красном отрезке равна 1, поэтому последовательность сумм $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}$ не ограничена сверху. □

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Предъявлены подходящие последовательности, но не доказано, почему они подходят.