Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2020

Заключительный этап. 7 класс

Задача 1. Масса металлического ведра, до краёв заполненного водой, равна 14 килограммам. В ведро поместили такой шар, что он плавает на поверхности воды, погрузившись в него ровно наполовину. Найдите массу ведра с водой и погруженным в него шаром.

Возможное решение

Поскольку в ведро погружена лишь половина шара, то из закона Архимеда следует, что плотность шара вдвое меньше плотности воды:

$$\rho_{\text{шара}} V_{\text{шара}} g = \rho_{\text{воды}} \frac{V_{\text{шара}}}{2} g$$

Тогда при погружении шара вылилась вода массой $m_1 = \rho_{\text{воды}} \frac{V_{\text{воды}}}{2}$, и добавился шар массой $m_2 = \rho_{\text{шара}} V_{\text{шара}}$. Поскольку

$$\rho_{\text{воды}} = 2\rho_{\text{шара}} \quad ,$$

то

$$m_1 = m_2$$

Значит масса вылившейся воды равна массе погруженного в неё шара.

Критерии

1. Верно записан закон Архимеда и получена связь плотностей шара и воды (+ 4 балла).
2. Найдена масса вылившейся воды (+ 3 балла).
3. Найдено, что масса вылившейся воды равна массе шара (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая прибудет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение $t_1 = 15$ минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла еще $t_2 = 8$ минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути со скоростью в два раза большей, чем шла до этого момента. Успеет ли Красная Шапочка на электричку?

Возможное решение

Поскольку Красная Шапочка движется по кратчайшему пути, то весь её маршрут представляет собой прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора:

$$(vt_1)^2 + (vt_2)^2 = (2vt_3)^2 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = 4t_3^2$$

Тогда:

$$t_3 = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{2} = 8,5 \text{ минут}$$

Значит Красная Шапочка гуляла в сумме:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 15 + 8 + 8,5 = 31,5 \text{ минуту}$$

Следовательно, Красная Шапочка не успеет на электричку.

Критерии

1. Записанно выражение для любого отрезка пути Красной Шапочки (+ 2 балла).
2. Записана траектория пути Красной Шапочки в виде теоремы Пифагора (+ 4 балла).
3. Получен верный ответ (+ 4 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Комментарий: если получен верный ответ «не успеет», но он основан на неверном подсчете времени движения Красной Шапочки, ставился неполный балл.

Задача 3. В рамках химического эксперимента по изучению смешиваемости жидкостей, Михаил смешал 10 литров воды и 20 литров этилового спирта. При смешении оказалось, что суммарный объём уменьшился на 10 процентов. Какова плотность полученного раствора, если плотность воды составляет 1 г/см^3, а плотность спирта составляет 0,8 г/см^3.

Возможное решение

Суммарная масса полученного раствора равна:

$$m = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 = 10 * 1 + 20 * 0,8 = 26 \text{ кг} \quad ,$$

где V_1 — объем воды, V_2 — объем этилового спирта, ρ_1 — плотность воды, ρ_2 — плотность этилового спирта. Суммарный объём раствора равен:

$$V = 0,9 * (V_1 + V_2) = 0,9 * (10 + 20) = 27 \text{ литров}$$

Тогда плотность полученного раствора будет равна:

$$\frac{m}{V} = \frac{26}{27} \approx 0,96 \text{ г/см}^3$$

Критерии

1. Верно найдена масса полученного (+ 4 балла).
2. Верно найден объём смеси (+ 4 балла).
3. Получен верный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 4. Два бегуна стартуют из одной точки круговой трассы в разных направлениях. Скорость первого бегуна равна 15 км/ч, второго — на 1 км/ч больше. Через определённый момент времени они одновременно оказались в точке старта, причём первый бегун на этот момент пробежал на 2 круга меньше второго. Сколько именно кругов пробежал первый бегун?

Возможное решение

Пусть до момента встречи в точке старта прошло время t, и первый спортсмен пробежал ровно k кругов. Тогда для него верно, что

$$v_1 t = kl \quad ,$$

где v_1 — скорость первого бегуна, l — длина круговой трассы. Для второго бегуна соответственно:

$$v_2 t = (k+2)l \quad ,$$

где v_1 — скорость второго бегуна. Вычитая уравнение движения первого бегуна из уравнения второго бегуна, находим, что

$$(v_2 - v_1)t = 2l \Rightarrow t = \frac{2l}{(v_2 - v_1)}$$

Подставляя полученное время t в выражение пути для первого бегуна, получаем:

$$k = v_1 \frac{2}{(v_2 - v_1)} = 30$$

Критерии

1. Получена связь для первого бегуна между проделанным путем и количеством кругов (+ 3 балла).
2. Получена связь для второго бегуна между проделанным путем и количеством кругов (+ 3 балла).
3. Найдено время до момента встречи в точке старта (+ 3 балла).
4. Получен верный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. Вова хочет найти плотность сорванной им неспелой груши, но под рукой у него имеются лишь таз с водой и динамометр. Взвесив грушу при помощи динамометра в воздухе, Вова установил растяжение пружины — 1,2 сантиметра. При погружении груши целиком в таз с водой, растяжение пружины динамометра оказалось в 4 раза меньше. Найдите плотность груши. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 Н/кг, плотность воды 1 г/см^3.

Возможное решение

Массу груши можно определить после первого взвешивания:

$$kx_1 = mg \Rightarrow m = \frac{kx_1}{g}$$

В воде же на грушу будет действовать также сила Архимеда:

$$kx_2 + \rho V g = mg = kx_1 \Rightarrow V = \frac{k(x_1 - x_2)}{\rho g}$$

Тогда плотность груши можно найти как:

$$\rho_{\text{груши}} = \frac{m}{V} = \frac{kx_1}{g} * \frac{\rho g}{k(x_1 - x_2)} = \frac{\rho x_1}{x_1 - x_2} = 1{,}33 \text{ г/см}^3$$

Критерии

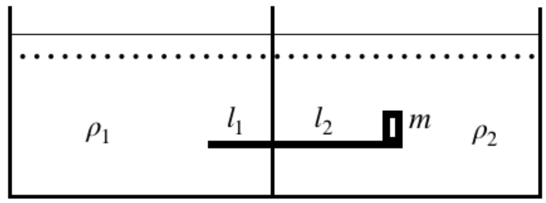
1. Верно найдена масса груши (+ 3 балла).
2. Верно найден объём груши (+ 4 балла).
3. Получен верная формула для плотности груши (+ 2 балла).
4. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2020

Заключительный этап. 8 класс

Задача 1. Сосуд разделён перегородкой на две части. В правую часть налито масло, в левую - вода. Через перегородку проходит рычаг, который может вращаться на шарнире без трения. Рычаг имеет форму цилиндра с площадью основания $S = 0.5$ см^2. Плотность дерева, из которого сделан рычаг, равна $\rho = 630$ кг/м^3. Длина левого плеча рычага равна $l_1 = 30$ см, правого — $l_2 = 70$ см. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000$ кг/м^3. Для того, чтобы рычаг оставался в равновесии, на край правого плеча рычага ставят гирьку массы $m = 50$ г с плотностью $\rho_g = 7800$ кг/м^3. Найдите плотность масла ρ_2 Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение

Запишем условие равновесия рычага:

$$\rho_1 S l_1 g \frac{l_1}{2} - \rho S l_1 g \frac{l_1}{2} = \rho_2 S l_2 \frac{l_2}{2} - \rho S l_2 g \frac{l_2}{2} - (mgl_2 - \frac{m}{\rho_g}\rho_2 l_2 g)$$

Отсюда выражаем плотность масла:

$$\rho_2 = \frac{S(\rho_1 l_1^2 - \rho l_1^2 + \rho l_2^2) + 2ml_2}{\frac{m}{\rho_g} l_2 + S l_2^2} \approx 2600 \text{ кг/м}^3$$

Критерии

1. Рассмотрено условие равновесия рычага (+ 2 балла).
2. Верно записаны моменты сил рычага в левой части сосуда (+ 2 балла).
3. Верно записаны моменты сил рычага в правой части сосуда (+ 3 балла).
4. Получен верная формула для плотности масла (+ 2 балла).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Вова хочет найти плотность сорванной им неспелой груши, но под рукой у него имеются лишь таз с водой и динамометр. Взвесив грушу при помощи динамометра в воздухе, Вова установил растяжение пружины - 1,2 сантиметра. При погружении груши целиком в таз с водой, растяжение пружины динамометра оказалось в 4 раза меньше. Найдите плотность груши. Ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2, плотность воды равна 1 г/см^3.

Возможное решение

Массу груши можно определить после первого взвешивания:

$$kx_1 = mg \Rightarrow m = \frac{kx_1}{g}$$

В воде же на грушу будет действовать также сила Архимеда:

$$kx_2 + \rho V g = mg = kx_1 \Rightarrow V = \frac{k(x_1 - x_2)}{\rho g}$$

Тогда плотность груши можно найти как:

$$\rho_{\text{груши}} = \frac{m}{V} = \frac{kx_1}{g} * \frac{\rho g}{k(x_1 - x_2)} = \frac{\rho x_1}{x_1 - x_2} = 1,33 \text{ г/см}^3$$

Критерии

1. Верно найдена масса груши (+ 3 балла).
2. Верно найден объём груши (+ 4 балла).
3. Получен верная формула для плотности груши (+ 2 балла).
4. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 3. Сотрудник лаборатории сверхпроводимости хочет изготовить немного льда для коктейльной вечеринки. Для этого он наливает в открытый сосуд 4 литра дистиллированной воды при температуре $T_0 = 25\,^\circ C$ и начинает понемногу подливать в сосуд сжиженный воздух, имеющий максимальную температуру, при которой все его компоненты еще находятся в жидком состоянии. Вода и жидкий воздух активно перемешиваются между собой в процессе приготовления смеси. По мере испарения воздуха, его доливают ещё, повторяя до получения нужного количества смеси льда с водой. Сколько понадобится жидкого воздуха, чтобы превратить в лёд ровно четверть имеющейся воды? Считать, что воздух содержит 20% кислорода и 80% азота по массе. Температура кипения жидкого азота $T_{N_2} = -195{,}8\,^\circ C$, температура кипения жидкого кислорода $T_{O_2} = -183{,}0\,^\circ C$. Удельная теплоемкость жидкого азота $C_{N_2} = 1970$ Дж/(кг $\cdot^\circ C$), удельная теплоемкость жидкого кислорода $C_{O_2} = 1670$ Дж/(кг $\cdot^\circ C$). Считать, что компоненты жидкого воздуха ведут себя как отдельные вещества. Теплоёмкостью сосуда и его теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды $C = 4200$ Дж/(кг $\cdot^\circ C$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования азота и кислорода - $L_{N_2} = 2{,}10 \cdot 10^5$ Дж/кг, $L_{O_2} = 2{,}14 \cdot 10^5$ Дж/кг соответственно.

Возможное решение

По мере доливания охлаждающей смеси вода сначала полностью остывает, отдавая количество теплоты:

$$Q_1 = Cm(T_0 - 0)$$

А затем часть воды кристализуется при постоянной температуре 0 градусов, отдавая еще количество теплоты:

$$Q_2 = \lambda \frac{m}{4}$$

Всё это тепло идёт на испарение смеси кислорода и азота. Теплота парообразования азота и теплота парообразования кислорода войдут в уравнение теплового баланса с соответствующими массовыми долями, однако, перед тем как кислород начнёт испарятся, он должен нагреться до температуры парообразования, что даёт вклад энергию:

$$Q_x = 0.2 * C_{O_2} m_* (T_{O_2} - T_{N_2}) \quad ,$$

где m_* — масса жидкого воздуха. Тогда уравнение теплового баланса примет вид:

$$Cm(T_0 - 0) + \lambda \frac{m}{4} = m_*(0.2L_{O_2} + 0.8L_{N_2} + 0.2C_{O_2}(T_{O_2} - T_{N_2}))$$

Отсюда:

$$m_* = \frac{m(CT_0 + \frac{\lambda}{4})}{0.2L_{O_2} + 0.8L_{N_2} + 0.2C_{O_2}(T_{O_2} - T_{N_2})} \approx 3.5 \text{ кг}$$

Критерии

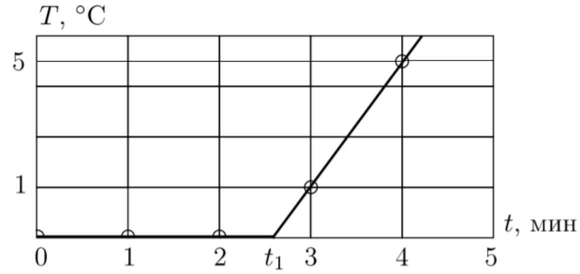
1. Верно найдена теплота, отданная дистиллированной водой при остывании (+ 2 балла).
2. Верно найдена теплота кристаллизации (+ 2 балла).
3. Верно найдена теплота нагревания кислорода (+ 3 балла).
4. Верно найдена теплота парообразования кислорода и азота (+ 2 балла).
5. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 4. Электрокалориметр наполненный некоторым количеством воды, нагревают с постоянной мощностью N = 75 Вт. В воду, имеющую температуру $0\,^{\circ}C$ опускают небольшое количество льда и начинают измерять температуру смеси. Через три минуты после помещения льда в калориметр она увеличивается на $\Delta T_1 = 1\,^{\circ}C$, а к концу четвёртой минуты ещё на $\Delta T_2 = 4\,^{\circ}C$. Найдите изначальную массу воды в электрокалориметре, а также массу добавленного льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ Дж/г, удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ Дж/(г $\cdot^{\circ} C$).

Возможное решение

Построим график зависимости температуры воды в калориметре T от времени t:



Из графика можно найти, сколько времени продолжалось таяние льда. Действительно, зависимость температуры воды от времени после того, как весь лёд растаял (переход от горизонтального участка к наклонному), даётся зависимостью:

$$T = kt + b$$

Начальных данных достаточно, чтобы установить значения коэффициентов k и b:

$$3k + b = 1, 4k + b = 5 \Rightarrow T = 4t - 11$$

Тогда время таяния льда t_1 можно найти как точку пересечения этой прямой с осью времени: $4t_1 - 11 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{11}{4}$ мин $= 2.75$ мин $= 165$ с. Из уравнения теплового баланса для таяния льда получаем массу льда:

$$\lambda m = N t_1 \rightarrow m = \frac{N t_1}{\lambda} \approx 36.4\text{г}.$$

Тогда из уравнения теплового баланса для нагрева воды массой $M + m$, где M – начальная масса воды получим:

$$C(M + m)\Delta T_1 = N t_2 \quad ,$$

где $t_2 = 15$с – время нагрева жидкости на температуру ΔT_1, следовательно:

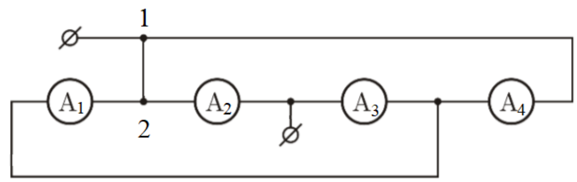
$$M = \frac{N t_2}{C \Delta T_1} - m \approx 231.5 \text{ г}.$$

Критерии

1. Найдено время таяния льда (+ 5 баллов).
2. Найдена масса льда (+ 2 балла).
3. Найдена начальная масса воды (+ 3 балла).

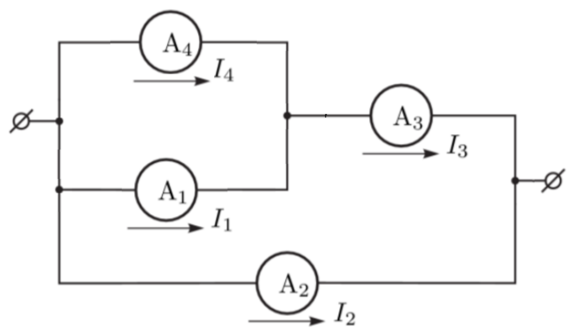
Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В электрическую цепь включено несколько амперметров так, как показано на рисунке. Найдите ток, текущий через участок провода 1-2, если показания амперметров в сумме дают 25 мА. Сопротивления амперметров A_1, A_2, A_3, A_4 относятся соответственно как 1:2:3:1.



Возможное решение

Нарисуем эквивалентную схему:



Поскольку внутренние сопротивления амперметров 1 и 4 равны между собой:

$$I_1 = I_4 = I, \Rightarrow I_3 = I_1 + I_4 = 2I$$

Пусть внутреннее сопротивления первого и четвертого резистора равно r, тогда напряжение источника равно:

$$I_1 r + 3I_3 r = 7Ir = 2I_2 r$$

Отсюда:

$$I_2 = \frac{7}{2}I = 3.5I$$

Согласно условию:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I + 3.5I + 2I + I = 7.5I = 25 \text{ мА} \Rightarrow I = \frac{10}{3} \text{ мА}$$

Тогда получаем ток, текущей через участок провода 1-2:

$$I_{1-2} = I_1 + I_2 = 4.5I = 15 \text{ мА}$$

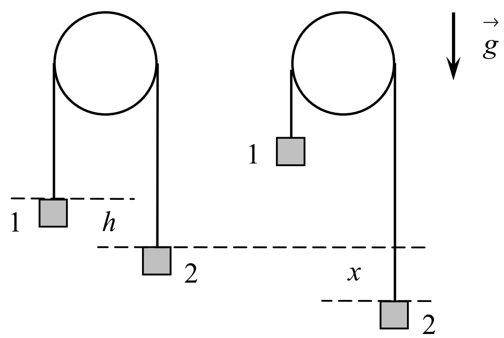
Критерии

1. Получено равенство токов на 1 и 4 амперметре (+ 2 балла).
2. Верно найдено падение напряжения в цепи (+ 4 балла).
3. Найден ток на 2 амперметре (+ 2 балла).
4. Получен верный численный ответ (+ 2 балла).

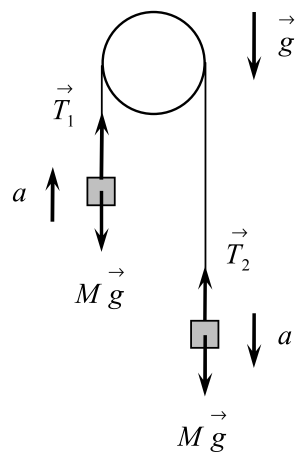
Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Заключительный этап. 9 класс

Задача 1. Через жёстко закреплённую горизонтальную трубу переброшена нерастяжимая нить массой $m = 10$ г и длиной $L = 2,5$ м. Масса нити равномерно распределена по её длине. К концам нити прикреплены два одинаковых груза 1 и 2 массой $M = 20$ г каждый. В начальном положении груз 2 расположен на высоте $h = 0,1$ м ниже груза 1. Грузы отпускают без начальной скорости. Найдите разность $\Delta T = T_1 - T_2$, где T_1 и T_2 — силы, с которыми нить действует на грузы 1 и 2 в момент, когда груз 2 опустился на высоту $x = 0,2$ м относительно своего начального положения. Числовой ответ выразите в миллиньютонах. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; трение не учитывайте.



Возможное решение



Так как нить нерастяжима, абсолютная величина ускорений грузов в конечном положении одинакова. Обозначим её через a и запишем второй закон Ньютона в проекции на направление вектора $\vec{g}$:

$$-Ma = -T_1 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_1 = Mg + Ma$$

$$Ma = -T_2 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_2 = Mg - Ma$$

Разность сил T_1 и T_2 равна:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2\,Ma$$

Для того чтобы определить ускорение, найдём сначала абсолютную величину V скорости грузов в конечном положении. В силу нерастяжимости нити эта величина одинакова как для грузов, так и для всех точек нити. Запишем закон сохранения энергии:

$$U_1 = \frac{MV^2}{2} \cdot 2 + \frac{mV^2}{2} + U_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{(\,2\,M + m\,)\,V^2}{2} = U_1 - U_2$$

Здесь U_1 и U_2 — начальное и конечное значения потенциальной энергии системы в поле тяжести. Убыль потенциальной энергии равна работе силы тяжести A:

$$U_1 - U_2 = A$$

Работу представим в виде суммы трёх слагаемых:

$$A = A_1 + A_2 + A_3\,,$$

где A_1 — работа силы тяжести при перемещении груза 1 на расстояние x вверх, A_2 — работа при перемещении груза 2 на то же расстояние вниз, A_3 — работа при перемещении нити. Для A_1 и A_2 имеем:

$$A_1 = -Mgx\,, \quad A_2 = +Mgx \quad \longrightarrow \quad A_1 + A_2 = 0$$

Работу A_3 можно вычислить, заметив, что конечное положение нити получается из начального перемещением вниз участка нити длины x. Учитывая, что вертикальная составляющая перемещения равна $(x+h)$, получаем:

$$A_3 = m'g\,(x+h)\,,$$

m' — масса рассматриваемого участка:

$$m' = m \cdot \frac{x}{L}$$

Получаем:

$$A = A_3 = \frac{m\,g\,x\,(x+h)}{L}\,,$$

$$\frac{(2M+m)\,V^2}{2} = \frac{m\,g\,x\,(x+h)}{L} \quad \longrightarrow \quad V^2 = \frac{2\,m\,g\,x\,(x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Для того чтобы найти ускорение a, представим себе, что за малое время Δt груз 2 переместился вниз на расстояние Δx и его скорость получила приращение ΔV. Тогда:

$$(V+\Delta V)^2 = \frac{2\,m\,g\,(x+\Delta x)\,(x+\Delta x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Вычтем два последних равенства друг из друга:

$$(V+\Delta V)^2 - V^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\big((x+\Delta x)\,(x+\Delta x+h) - x\,(x+h)\big)\,,$$

$$V^2 + 2\,V\Delta V + (\Delta V)^2 - V^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\left(x\,(x+h) + \Delta x\,(x+h) + x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x\,(x+h)\right)\,,$$

$$2\,V\Delta V + (\Delta V)^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\left(\Delta x\,(2\,x+h) + (\Delta x)^2\right)\,,$$

$$2\,V\Delta V\left(1+\frac{\Delta V}{2\,V}\right) = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\Delta x\,(2\,x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2\,x+h}\right)\,,$$

$$V\Delta V\left(1+\frac{\Delta V}{2\,V}\right) = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\Delta x\,(2\,x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2\,x+h}\right)\,.$$

Поделим обе части полученного соотношения на Δt:

$$V\,\frac{\Delta V}{\Delta t}\left(1+\frac{\Delta V}{2\,V}\right) = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot(2\,x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2\,x+h}\right)$$

При стремлении Δt к нулю имеем:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \to a\,, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \to V\,, \quad \frac{\Delta V}{2\,V} \to 0\,, \quad \frac{\Delta x}{2\,x+h} \to 0\,.$$

Получаем:

$$V\cdot a = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot V\,(2\,x+h) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{m\,g\,(2\,x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Используя этот результат, находим разность сил натяжения нити:

$$\Delta T = 2\,Ma = \frac{2\,mMg\,(2\,x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta T = \frac{2\cdot 0,01\cdot 0,02\cdot 10\cdot 0,5}{0,05\cdot 2,5} = \frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 5}{5\cdot 10^{-2}\cdot 2,5} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{2,5} = 1,6\cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 16\ \text{мН}$$

Критерии

1. Записан второй закон Ньютона для грузов (+2 балла).
2. Записан закон сохранения энергии и найдена скорость грузов (+3 балла).
3. Найдено ускорение грузов (+3 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ для разности сил натяжения нити (+1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Другое возможное решение

Т.к. нить нерастяжима, ускорение грузов и нити в любой момент времени равно величине $|\vec{a}|$. Запишем второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 в проекции на ось Y, сонаправленной ускорению свободного падения $\vec{g}$.

$$-Ma = -T_1 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_1 = Mg + Ma$$

$$Ma = -T_2 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_2 = Mg - Ma$$

Разность сил T_1 и T_2 равна:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2\,Ma$$

В данной системе грузов и нити вклад в изменение ускорения $|\vec{a}|$ вносит только сила тяжести, действующая на две части нити слева и справа от блока, у которых в процессе движения меняется масса в зависимости от координаты y, назовем их $m_1(y)$ и $m_2(y)$ соответственно. Запишем второй закон Ньютона в проекции на OY для частей нити:

$$m_1(y)g + T_3 = -m_1(y)a$$

$$m_2(y)g + T_4 = m_2(y)a$$

Из третьего закона Ньютона

$$|\vec{T_3}| = |-\vec{T_1}|, \quad |\vec{T_4}| = |-\vec{T_2}|$$

Подставим эти выражения в соответствующие уравнения для частей нити. Запишем комбинацию линейных уравнений для грузов 1 и 2 и частей нити так, чтобы сократились силы натяжения:

$$2Ma + (m_1(y) + m_2(y))a = (m_2(y) - m_1(y))g$$

В любой момент времени

$$m_1(y) + m_2(y) = m$$

вне зависимости от y. А в момент когда груз 2 опустился в на высоту x:

$$m_2(y) - m_1(y) = m\left(\frac{2x + h}{L}\right)$$

Тогда получим:

$$a = m\left(\frac{2x + h}{L}\right)g\frac{1}{2M + m}$$

Получив ускорение a, находим разность сил натяжения нити:

$$\Delta T = 2\,Ma = \frac{2\,mMg\,(\,2\,x + h\,)}{(\,2\,M + m\,)\,L}$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,05 \cdot 2,5} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2,5} = 1,6 \cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 16\ \text{мН}$$

Критерии для другого решения

1. Записан второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 (+ 2 балла).
2. Записан второй закон Ньютона для частей нити m_1 и m_2 в конечном положении (+ 4 балла).
3. Найдено ускорение системы (+ 2 балла).
4. Получена формула для разности сил натяжения нити (+ 1 балл).
5. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая прибудет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение $t_1 = 15$ минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла еще $t_2 = 8$ минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути, причём на каждый шаг, начиная со второго, она тратит на 0.1% времени меньше, чем на предыдущий. Успеет ли Красная Шапочка на электричку, если скорость красной шапочки 1 шаг/с?

Возможное решение

Поскольку Красная Шапочка движется по кратчайшему пути, то весь её маршрут представляет собой прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора:

$$(vt_1)^2 + (vt_2)^2 = (vt_3)^2 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = t_3^2$$

Получаем $t_3 = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = 17$ минут, тогда Красной Шапочке необходимо сделать $n = 17 \cdot 60 = 1020$ шагов. Поскольку на каждый последующий шаг, начиная со второго, Красная Шапочка тратит на десятую долю процента меньше, можно представить время обратного пути в виде геометрической прогрессии с множителем q:

$$q = 1 - 0.001 = 0.999: \quad t = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Здесь $b_1 = 1$ с – время, затраченное на первый шаг. Подставляя числа, можно получить ответ: $t \approx 10,6$ мин. Это означает, что Красная Шапочка не успеет на электричку к бабушке.

Критерии

1. Правильно найдено число шагов обратного пути (+ 1 балл).
2. Правильно найдено время обратного пути (+ 8 баллов).
3. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

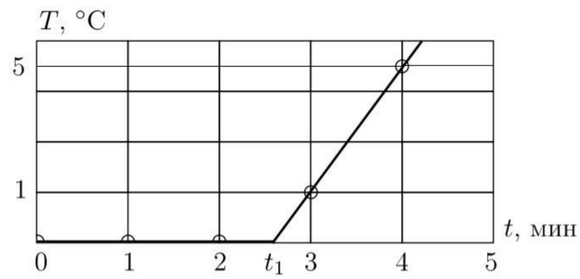
Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Комментарий: присутствует идея представления времени обратного пути в виде геометрической прогрессии — оценка 5 баллов.

Задача 3. Электрокалориметр, наполненный некоторым количеством воды, нагревают с постоянной мощностью N = 75 Вт. В воду, имеющую температуру $0\,^\circ C$, опускают небольшое количество льда и начинают измерять температуру смеси. Через три минуты после помещения льда в калориметр она увеличивается на $\Delta T_1 = 1\,^\circ C$, а к концу четвёртой минуты ещё на $\Delta T_2 = 4\,^\circ C$. Найдите изначальную массу воды в электрокалориметре, а также массу добавленного льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ Дж/г, удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ Дж/(г $\cdot^\circ C$).

Возможное решение

Построим график зависимости температуры воды в калориметре T от времени t:



Из графика можно найти, сколько времени продолжалось таяние льда. Действительно, зависимость температуры воды от времени после того, как весь лёд растаял (переход от горизонтального участка к наклонному), даётся зависимостью

$$T = kt + b$$

Начальных данных достаточно, чтобы установить значения коэффициентов k и b:

$$3k + b = 1, 4k + b = 5 \Rightarrow T = 4t - 11$$

Тогда время таяния льда t_1 можно найти как точку пересечения этой прямой с осью времени: $4t_1 - 11 = 0 \to t_1 = \frac{11}{4}$ мин $= 2.75$ мин $= 165$ с. Из уравнения теплового баланса для таяния льда получаем массу льда:

$$\lambda m = N t_1 \to m = \frac{N t_1}{\lambda} \approx 36.4\text{г}.$$

Тогда из уравнения теплового баланса для нагрева воды массой $M + m$, где M – начальная масса воды получим:

$$C(M + m)\Delta T_1 = N t_2 \quad ,$$

где $t_2 = 15$с – время нагрева жидкости на температуру ΔT_1, следовательно:

$$M = \frac{N t_2}{C \Delta T_1} - m \approx 231.5 \text{ г}.$$

Критерии

1. Найдено время таяния льда (+ 5 баллов).

2. Найдена масса льда (+ 2 балла).

3. Найдена начальная масса воды (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Комментарий: в условии задачи на олимпиаде были возможны опечатки, поэтому решение, в котором была найдена формульно масса льда, принималось как полное решение задачи.

Задача 4. Элементы с внутренними сопротивлениями $r_1 = 5$ Ом и $r_2 = 2$ Ом и с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 3$ В и $\mathcal{E}_2 = 10$ В соединены с внешним сопротивлением R, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите значения $\mathcal{E}$ и r.

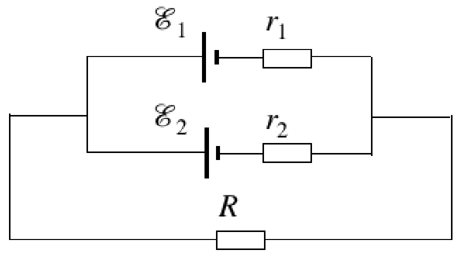


Рис. 1

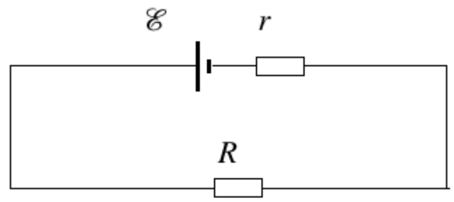


Рис. 2

Возможное решение

Запишем систему уравнений Кирхгофа для контуров, содержащих $\mathcal{E}_{1,2}, r_{1,2}$, обозначив ток через резистор R как I и выбрав направление циркуляции токов, одинаковое для всех таких контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR \\ \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \\ I = I_1 + I_2 \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить ток через резистор R:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - I_1 R}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - I_2 R}{r_2}$$

Откуда можно получить выражение для тока I:

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})}$$

С другой стороны, ток через резистор R на схеме 2 определяется выражением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Так как падения напряжений на резисторе R должны совпадать для любых значений сопротивления R, можно записать тождество, верное для всех R:

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1})} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

или

$$R\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \mathcal{E}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right) + r\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}\right) - \mathcal{E} = 0$$

Так как это тождество верно при всех значениях R, требуется приравнять нулю независимо свободный член и множитель перед R:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \mathcal{E}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) = 0 \\ r(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}) - \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

Из системы выше получаем :

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})}$$

Это правильный ответ для ЭДС. Из той же системы получаем:

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

Это правильный ответ для сопротивления. Подставляя числа из условия в формулы получаем ответ:

$$\mathcal{E} = 8 \text{ В}$$

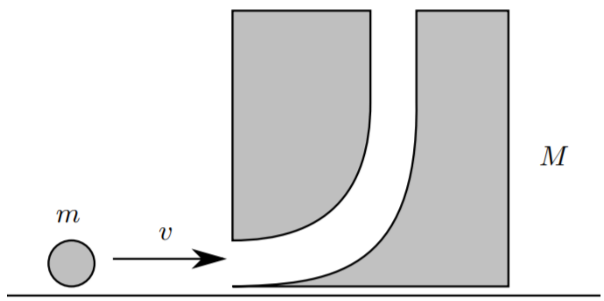
$$r = \frac{10}{7} \text{ Ом}$$

Критерии

1. Правильно записана система уравнений Кирхгофа (+ 3 балла).
2. Получена формула для тока через внешнее сопротивление R (+ 2 балла).
3. Получено тождество, верное для всех R (+ 3 балла).
4. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \frac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



Возможное решение

Шар и куб будут двигаться с одной скоростью все время, пока шар будет находиться внутри куба. В силу закона сохранения импульса горизонтальная скорость куба и шара после столкновения не будет равна нулю (куб поедет) и будет определяться как

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m}$$

Теперь шар будет иметь вертикальную составляющую скорости v_2. Поскольку нет потерь на трение, мы можем использовать закон сохранения энергии для определения этой скорости. До столкновения кинетическая энергия шара равна $E_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, после столкновения куб получит энергию

$$E_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}$$

Найдём отсюда скорость v_2:

$$mv_0^2 - Mv_1^2 = m(v_1^2 + v_2^2) \to v_2 = v_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

. Время, проведенное шаром в «воздухе» можно вычислить так: $t_2 = \dfrac{2v_2}{g}$. Тогда расстояние по горизонтали, пройденное шаром в воздухе будет равно

$$x = 2v_0 \frac{m}{m+M} v_0 \frac{1}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} = \frac{2v_0^2}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}}$$

Когда шарик возвращается в полость куба, горизонтальная проекция его скорости будет направлена в обратную сторону, относительно горизонтальной составляющей скорости в момент первого попадания шара в куб (куб, в свою очередь, продолжает движение в том же направлении). Горизонтальная скорость после повторного взаимодействия шара с кубом будет определяться из закона сохранения импульса: $v_3 = v_0 \dfrac{m-M}{m+M}$. Тогда время возвращения шара в исходную позицию будет равно

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}} \frac{M+m}{M-m} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}}$$

Поскольку шар поднимается гораздо выше, чем высота куба, то временем, проведённым в кубе можно пренебречь по сравнению с временем полета шара. Тогда искомое время будет равно $t_2 + t_3$:

$$\frac{2v_0}{g} \left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(\frac{M}{M-m} \right)$$

Вводя отношение масс, получаем итоговый ответ:

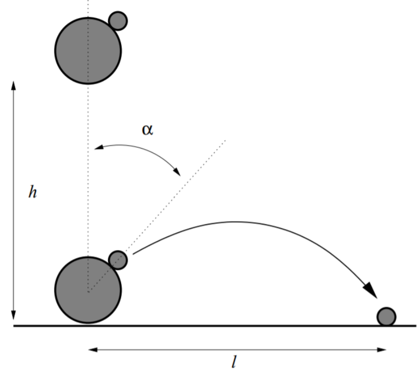
$$t = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(\frac{M}{M-m} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)$$

Критерии

1. Найдена горизонтальная проекция скорости шара в момент первого столкновения с кубом (+ 1 балл).
2. Найдена вертикальная проекция скорости шара после первого вылета из куба (+ 2 балла).
3. Найдено время полета шара «в воздухе» (+ 1 балл).
4. Найдена горизонтальная проекция расстояния, пройденного шаром «в воздухе» (+ 1 балл).
5. Найдена горизонтальная проекция скорости шара после второго взаимодействия шара и куба (+ 3 балла).
6. Найдено время второго взаимодействия шара и куба (+ 1 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 1. Шар для боулинга и мяч для гольфа сбрасывают вместе на плоскую поверхность с высоты h. Мяч для боулинга намного массивнее мяча для гольфа, и радиусы обоих шаров много меньше h. Шар для боулинга сталкивается с поверхностью и сразу после этого с мячом для гольфа: шары сбрасывают так, что все движения перед вторым столкновением являются вертикальными, и мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга под углом α от его верхней точки, как показано на рисунке. Все столкновения являются абсолютно упругими, нет трения между шаром для боулинга и мячом для гольфа. После столкновения мяч для гольфа движется при отсутствии сопротивления воздуха и приземляется на расстояние l. Высота $h = 1$ м фиксирована, но α может меняться. Каково максимально возможное значение l и под каким углом α оно достигается?



Возможное решение

Из закона сохранения энергии найдем скорость, с которой оба шара достигают поверхности:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \to v_0 = \sqrt{2gh}$$

После того, как шар для боулинга сталкивается с поверхностью, он отскакивает вверх со скоростью v_0, а мяч для гольфа движется вниз со скоростью v_0. Последующее столкновение легче всего понять в системе отсчета, движущейся со скоростью $v_0 cos\alpha$ вдоль оси, получаемой поворотом оси Oy на угол α по часовой стрелке. В дальнейшем система координат, повернутая на угол α по часовой стрелке будет обозначаться как $Ox'y'$. В этой системе мяч для гольфа до соударения с мячем для боулинга имеет компоненты скорости:

$$v_{0x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{0y'} = -2v_0 cos\alpha$$

Мяч для боулинга имеет нулевую компоненту скорости вдоль оси Oy'. Так как трения между мячами нет, компоненты импульса по оси Ox' не меняются при соударении. Мяч для гольфа испытывает абсолютно упругое соударение с неподвижным массивным объектом относительно движения вдоль оси Oy'. Следовательно, после соударения мяч для гольфа будет иметь следующие компоненты скорости в системе $Ox'y'$:

$$v_{x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{y'} = 2v_0 cos\alpha$$

Переходя в исходную систему отсчета, получаем, что:

$$v_x = v_{x'} cos\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) sin\alpha$$

$$v_y = v_{x'} sin\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) cos\alpha$$

Отсюда получаем: $v_x = 2v_0 \sin 2\alpha, v_y = 2v_0 \cos 2\alpha + v_0$. В то же время, время полёта t мяча для гольфа находится из: $v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \to t = \frac{2v_y}{g}$, значит длина полёта будет равна:

$$l = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2}{g}(2v_0 \sin 2\alpha)(2v_0 \cos 2\alpha + v_0) = \frac{8v_0^2}{g} \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + \frac{1}{2}) = 16h \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + \frac{1}{2})$$

Пусть $\beta = 2\alpha$, тогда для нахождения максимального расстояния приравняем к нулю производную полученной функции:

$$\frac{dl}{d\beta} = 16h \big[\cos\beta (\cos\beta + \frac{1}{2}) - \sin^2\beta \big] = 0 \Rightarrow \cos^2\beta - \sin^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = 2\cos^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta - 1 = 0$$

Значит $\cos\beta = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 8}}{4}$, и, выбирая положительный корень, получим $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{33} - 1}{8} = 0.593$.
Тогда $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = 0.805, \Rightarrow \beta \approx 54° \alpha \approx 27°$
Тогда максимальное расстояние $l = 16h \cdot 0.8 - 5 \cdot (0.593 + 0.5) \approx 14.08h \approx 14.1$ м.

Критерии

1. Верно найдена скорость, с которой мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга (+ 1 балл).
2. Записан верный закон сохранения импульса в новой системе координат (+ 1 балл).
3. Правильно найдены компоненты скорости в новой системе координат (+ 1 балл).
4. Правильно найдены компоненты скорости в исходной системе координат (+ 2 балла).
5. Правильно найдена дальность полета в зависимости от угла α и скорости v_0 (+ 2 балла).
6. Получено выражение для угла α (+ 2 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Схема содержит n элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями $r_1, \ldots, r_n$, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннем сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите зависимость $\mathcal{E}$ и r от $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$.

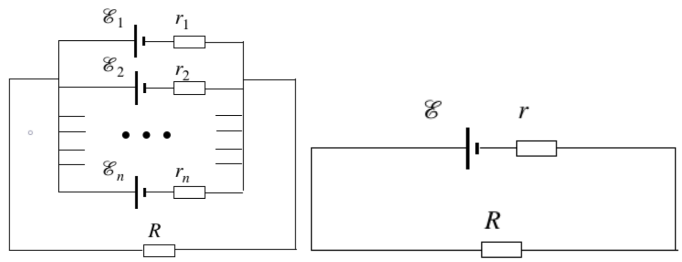


Рис. 1 Рис. 2

Возможное решение

Запишем систему уравнений Кирхгофа для контуров, содержащих $\mathcal{E}_i, r_i$, обозначив ток через резистор R как I и выбрав направление циркуляции токов, одинаковое для всех таких контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR \\ \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \\ \ldots \\ \mathcal{E}_n = I_n r_n + IR \\ I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить ток через резистор R:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i - I_i R}{r_i}$$

Откуда можно получить выражение для тока I:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

С другой стороны, ток через резистор R на схеме 2 определяется выражением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Так как падения напряжений на резисторе R должны совпадать для любых значений сопротивления R, можно записать тождество, верное для всех R.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

или

$$R\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}\right) + r \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0$$

Так как это тождество верно при всех значениях R, требуется приравнять нулю независимо свободный член и множитель перед R:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = 0 \\ r \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

Из системы получаем :

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Это правильный ответ для ЭДС Из той же системы получаем:

$$r = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Критерии

1. Правильно записана система уравнений Кирхгофа (+ 3 балла).
2. Получена формула для тока через внешнее сопротивление R (+ 2 балла).
3. Получено тождество, верное для всех R (+ 3 балла).
4. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 3. Горизонтальный цилиндр разделён пополам теплопроводящим поршнем. В одной половине находится гелий, в другой азот N_2. Отношение k числа молей гелия к числу молей азота равно 3. Сначала поршень закреплён, и газы медленно обмениваются теплом. В момент, когда давления газов (но не их температуры) становятся одинаковыми и равными $P_0 = 0{,}35$ МПа , поршень отпускают. Найдите давление P газов в конечном состоянии механического и теплового равновесия. Стенки цилиндра не проводят тепло, поршень движется без трения.

Возможное решение

Будем отмечать параметры гелия индексом 1, а параметры азота индексом 2. Запишем первое начало термодинамики для газов:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1\,, \quad Q_2 = \Delta U_2 + A_2$$

Здесь Q_1 и Q_2 — количества теплоты, подведённой к газам, ΔU_1 и ΔU_2 — приращения внутренней энергии газов, A_1 и A_2 — механические работы сил давления газов на поршень. Складывая эти равенства, получаем:

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U + A_1 + A_2\,,$$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ — приращение суммарной внутренней энергии газов. Так как газы обмениваются теплом только друг с другом, то

$$Q_1 = -Q_2 \quad \longrightarrow \quad Q_1 + Q_2 = 0$$

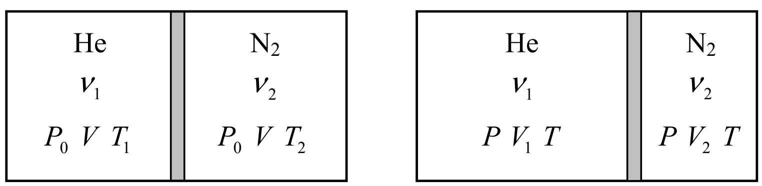
Поскольку механическая энергия поршня не меняется при переходе в конечное состояние, то

$$A_1 + A_2 = 0$$

Получаем:

$$\Delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad U = \text{const}\,,$$

то есть суммарная внутренняя энергия газов сохраняется. Этот результат можно получить по-другому, рассматривая баланс энергии для системы, состоящей из газов и поршня. Так как к системе не подводится тепло от внешних источников и система не совершает работу над другими телами, то её внутренняя энергия не меняется. Отсюда, учитывая неизменность механической энергии поршня, приходим к выводу о постоянстве суммарной внутренней энергии газов.



Пусть ν_1 и ν_2 — количества молей гелия и азота, T_1 и T_2 — их начальные температуры, V — начальный объём каждого из газов, P и T — конечные давление и температура, V_1 и V_2 — конечные объёмы. Запишем равенство значений суммарной внутренней энергии газов в начальном и конечном состояниях:

$$\frac{3}{2}\,\nu_1 R T_1 + \frac{5}{2}\,\nu_2 R T_2 = \frac{3}{2}\,\nu_1 R T + \frac{5}{2}\,\nu_2 R T$$

Перейдём от температур к давлениям и объёмам, воспользовавшись уравнением состояния:

$$P_0 V = \nu_1 R T_1\,, \quad P_0 V = \nu_2 R T_2\,, \quad P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T$$

Получаем:

$$3\,P_0 V + 5\,P_0 V = 3\,P V_1 + 5\,P V_2 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V}{3\,V_1 + 5\,V_2}$$

Выразим объёмы V_1 и V_2 через V . Из уравнения состояния имеем:

$$P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = k \quad \longrightarrow \quad V_1 = k\,V_2$$

Учитывая, что $V_1 + V_2 = 2\,V$, получаем:

$$V_1 = \frac{2\,k\,V}{k+1}\,, \quad V_2 = \frac{2\,V}{k+1} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V\,(\,k+1\,)}{2\,V\,(3\,k+5\,)} = \frac{4\,P_0\,(\,k+1\,)}{3\,k+5}$$

Подставим числовые значения:

$$P = \frac{4 \cdot 0,35 \cdot 4}{14} = \frac{8 \cdot 0,35}{7} = 0,4 \text{ МПа}$$

Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии через температуры газов (+ 3 балла).
2. Правильно записано уравнение состояния (+ 2 балла).
3. Закон сохранения энергии переписан через давления и объёмы (+ 1 балл).
3. Найдено отношение конечных объёмов (+ 2 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ для конечного давления (+ 1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 4. Влажный воздух адиабатически поднимается от поверхности моря вверх. Давление у поверхности моря равно $P_1 = 100$ кПа, температура воздуха - 298 К. На высоте, на которой давление становится равным $P_2 = 85$ кПа, начинают образовываться облака и начинает идти дождь.1 кг влажного воздуха теряет $\Delta m = 2{,}5$ г воды в виде дождя по достижению высоты, давление на которой равно $P_3 = 70$ кПа. Удельную теплоту испарения воды принять равной $\lambda = 2500 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, считать, что на всем диапазоне высот плотность воздуха меняется линейно. Пренебречь влиянием паров воды на плотность воздуха, воздух считать идеальным двухатомным газом с плотностью $\rho_1 = 1{,}189$ кг/м^3 Найти: 1. Температуру воздуха на высоте, где начинают появляться облака. 2. Найти высоту, на которой начинают появляться облака. 3. Найти температуру на высоте, где давление равно 70 кПа. Примечание: Для адиабатического процесса верно $PV^{\gamma} = const$, где P - давление, V - объем. γ - показатель адиабаты. Для воздуха можно принять $\gamma = 7/5$, теплоёмкость при постоянном объёме $C_V = 5/2\, R$, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К) - универсальная газовая постоянная.

Возможное решение

1. Ответ получается путем использования уравнения для идеального газа:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

и уравнения для адиабаты:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

2. Плотность воздуха на высоте, где давление равно P_2 можно найти из уравнения Клапейрона - Менделеева:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Разность давлений $P_1 - P_2$ создается столбом воздуха высоты h. Для простоты рассмотрим цилиндра такой высоты, опирающийся на основание площадью S:

$$\frac{mg}{S} = P_1 - P_2$$

Массу можно найти, зная, что плотность меняется линейно: $m = Sh\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$

$$h = 2\frac{P_1 - P_2}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$

3. Так как воздух поднимается адиабатически, но изменением его плотности из-за присутствия водяных паров мы пренебрегаем, можно рассматривать адиабатический процесс движения воздуха и конденсацию воды как два независимых процесса, и посчитать вклад каждого из них для воздуха на высоте, где давление достигает величины P_3:

$$T = T_a + \delta T$$

$$\delta T = \frac{\delta Q}{c_p}$$

Так как процесс выпадения дождя можно считать изобарным, то

$$c_p = 3.5\frac{R}{M} = 1000\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Таким образом:

$$T = T_1 \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \frac{\lambda \delta m}{c_p}$$

Критерии

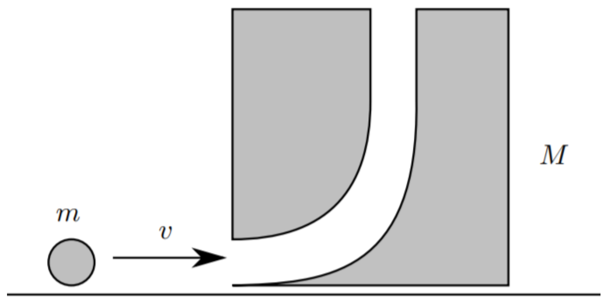
1. Найдена температура воздуха на высоте, где начинают появляться облака (+ 3 балла).

2. Найдена высота, на которой начинают появляться облака (+ 3 балла).

3. Найдена температура воздуха на высоте, где давление равно 70 кПа (+ 4 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \frac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



Возможное решение

Шар и куб будут двигаться с одной скоростью все время, пока шар будет находиться внутри куба. В силу закона сохранения импульса горизонтальная скорость куба и шара после столкновения не будет равна нулю (куб поедет) и будет определяться как

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m}$$

Теперь шар будет иметь вертикальную составляющую скорости v_2. Поскольку нет потерь на трение, мы можем использовать закон сохранения энергии для определения этой скорости. До столкновения кинетическая энергия шара равна $E_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, после столкновения куб получит энергию

$$E_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}$$

Найдём отсюда скорость v_2:

$$mv_0^2 - Mv_1^2 = m(v_1^2 + v_2^2) \rightarrow v_2 = v_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

. Время, проведенное шаром в «воздухе» можно вычислить так: $t_2 = \dfrac{2v_2}{g}$. Тогда расстояние по горизонтали, пройденное шаром в воздухе будет равно

$$x = 2v_0\frac{m}{m+M}v_0\frac{1}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}} = \frac{2v_0^2}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)^3}}$$

Когда шарик возвращается в полость куба, горизонтальная проекция его скорости будет направлена в обратную сторону, относительно горизонтальной составляющей скорости в момент первого попадания шара в куб (куб, в свою очередь, продолжает движение в том же направлении). Горизонтальная скорость после повторного взаимодействия шара с кубом будет определяться из закона сохранения импульса: $v_3 = v_0\dfrac{m-M}{m+M}$. Тогда время возвращения шара в исходную позицию будет равно

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)^3}}\frac{M+m}{M-m} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}}$$

Поскольку шар поднимается гораздо выше, чем высота куба, то временем, проведённым в кубе можно пренебречь по сравнению с временем полета шара. Тогда искомое время будет равно $t_2 + t_3$:

$$\frac{2v_0}{g}\left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right)$$

Вводя отношение масс, получаем итоговый ответ:

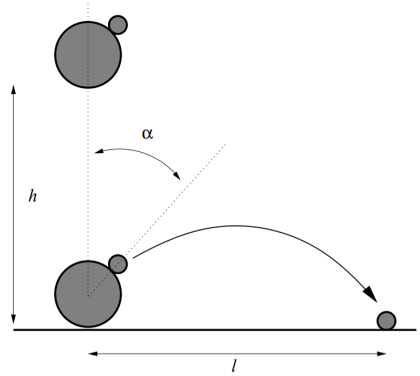
$$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$$

Критерии

1. Найдена горизонтальная проекция скорости шара в момент первого столкновения с кубом (+ 1 балл).
2. Найдена вертикальная проекция скорости шара после первого вылета из куба (+ 2 балла).
3. Найдено время полета шара «в воздухе» (+ 1 балл).
4. Найдена горизонтальная проекция расстояния, пройденного шаром «в воздухе» (+ 1 балл).
5. Найдена горизонтальная проекция скорости шара после второго взаимодействия шара и куба (+ 3 балла).
6. Найдено время второго взаимодействия шара и куба (+ 1 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 1. Шар для боулинга и мяч для гольфа сбрасывают вместе на плоскую поверхность с высоты h. Мяч для боулинга намного массивнее мяча для гольфа, и радиусы обоих шаров много меньше h. Шар для боулинга сталкивается с поверхностью и сразу после этого с мячом для гольфа: шары сбрасывают так, что все движения перед вторым столкновением являются вертикальными, и мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга под углом α от его верхней точки, как показано на рисунке. Все столкновения являются абсолютно упругими, нет трения между шаром для боулинга и мячом для гольфа. После столкновения мяч для гольфа движется при отсутствии сопротивления воздуха и приземляется на расстояние l. Высота $h = 1$ м фиксирована, но α может меняться. Каково максимально возможное значение l и под каким углом α оно достигается?



Возможное решение

Из закона сохранения энергии найдем скорость, с которой оба шара достигают поверхности:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \to v_0 = \sqrt{2gh}$$

После того, как шар для боулинга сталкивается с поверхностью, он отскакивает вверх со скоростью v_0, а мяч для гольфа движется вниз со скоростью v_0. Последующее столкновение легче всего понять в системе отсчета, движущейся со скоростью $v_0 cos\alpha$ вдоль оси, получаемой поворотом оси Oy на угол α по часовой стрелке. В дальнейшем система координат, повернутая на угол α по часовой стрелке будет обозначаться как $Ox'y'$. В этой системе мяч для гольфа до соударения с мячем для боулинга имеет компоненты скорости:

$$v_{0x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{0y'} = -2v_0 cos\alpha$$

Мяч для боулинга имеет нулевую компоненту скорости вдоль оси Oy'. Так как трения между мячами нет, компоненты импульса по оси Ox' не меняются при соударении. Мяч для гольфа испытывает абсолютно упругое соударение с неподвижным массивным объектом относительно движения вдоль оси Oy'. Следовательно, после соударения мяч для гольфа будет иметь следующие компоненты скорости в системе $Ox'y'$:

$$v_{x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{y'} = 2v_0 cos\alpha$$

Переходя в исходную систему отсчета, получаем, что:

$$v_x = v_{x'} cos\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) sin\alpha$$

$$v_y = v_{x'} sin\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) cos\alpha$$

Отсюда получаем: $v_x = 2v_0 \sin 2\alpha, v_y = 2v_0 \cos 2\alpha + v_0$. В то же время, время полёта t мяча для гольфа находится из: $v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \to t = \frac{2v_y}{g}$, значит длина полёта будет равна:

$$l = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2}{g}(2v_0 \sin 2\alpha)(2v_0 \cos 2\alpha + v_0) = \frac{8v_0^2}{g} \sin 2\alpha(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}) = 16h \sin 2\alpha(\cos 2\alpha + \frac{1}{2})$$

Пусть $\beta = 2\alpha$, тогда для нахождения максимального расстояния приравняем к нулю производную полученной функции:

$$\frac{dl}{d\beta} = 16h\big[\cos\beta(\cos\beta + \frac{1}{2}) - \sin^2\beta\big] = 0 \Rightarrow \cos^2\beta - \sin^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = 2\cos^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta - 1 = 0$$

Значит $\cos\beta = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+8}}{4}$, и, выбирая положительный корень, получим $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{33}-1}{8} = 0.593$.
Тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = 0.805, \Rightarrow \beta \approx 54^\circ \alpha \approx 27^\circ$
Тогда максимальное расстояние $l = 16h \cdot 0.8 - 5 \cdot (0.593 + 0.5) \approx 14.08h \approx 14.1$ м.

Критерии

1. Верно найдена скорость, с которой мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга (+ 1 балл).
2. Записан верный закон сохранения импульса в новой системе координат (+ 1 балл).
3. Правильно найдены компоненты скорости в новой системе координат (+ 1 балл).
4. Правильно найдены компоненты скорости в исходной системе координат (+ 2 балла).
5. Правильно найдена дальность полета в зависимости от угла α и скорости v_0 (+ 2 балла).
6. Получено выражение для угла α (+ 2 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Схема содержит n элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями $r_1, \ldots, r_n$, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннем сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите зависимость $\mathcal{E}$ и r от $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$.

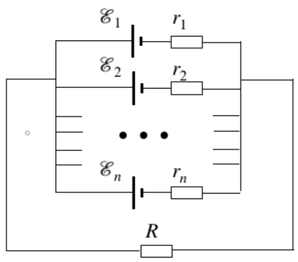


Рис. 1

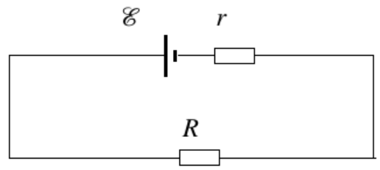


Рис. 2

Возможное решение

Запишем систему уравнений Кирхгофа для контуров, содержащих $\mathcal{E}_i, r_i$, обозначив ток через резистор R как I и выбрав направление циркуляции токов, одинаковое для всех таких контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR \\ \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \\ \ldots \\ \mathcal{E}_n = I_n r_n + IR \\ I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить ток через резистор R:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i - I_i R}{r_i}$$

Откуда можно получить выражение для тока I:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

С другой стороны, ток через резистор R на схеме 2 определяется выражением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Так как падения напряжений на резисторе R должны совпадать для любых значений сопротивления R, можно записать тождество, верное для всех R.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

или

$$R(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}) + r\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0$$

Так как это тождество верно при всех значениях R, требуется приравнять нулю независимо свободный член и множитель перед R:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = 0 \\ r\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

Из системы получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Это правильный ответ для ЭДС Из той же системы получаем:

$$r = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Критерии

1. Правильно записана система уравнений Кирхгофа (+ 3 балла).
2. Получена формула для тока через внешнее сопротивление R (+ 2 балла).
3. Получено тождество, верное для всех R (+ 3 балла).
4. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 3. Горизонтальный цилиндр разделён пополам теплопроводящим поршнем. В одной половине находится гелий, в другой азот N_2. Отношение k числа молей гелия к числу молей азота равно 3. Сначала поршень закреплён, и газы медленно обмениваются теплом. В момент, когда давления газов (но не их температуры) становятся одинаковыми и равными $P_0 = 0{,}35$ МПа, поршень отпускают. Найдите давление P газов в конечном состоянии механического и теплового равновесия. Стенки цилиндра не проводят тепло, поршень движется без трения.

Возможное решение

Будем отмечать параметры гелия индексом 1, а параметры азота индексом 2. Запишем первое начало термодинамики для газов:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1\,, \quad Q_2 = \Delta U_2 + A_2$$

Здесь Q_1 и Q_2 — количества теплоты, подведённой к газам, ΔU_1 и ΔU_2 — приращения внутренней энергии газов, A_1 и A_2 — механические работы сил давления газов на поршень. Складывая эти равенства, получаем:

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U + A_1 + A_2\,,$$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ — приращение суммарной внутренней энергии газов. Так как газы обмениваются теплом только друг с другом, то

$$Q_1 = -Q_2 \quad \longrightarrow \quad Q_1 + Q_2 = 0$$

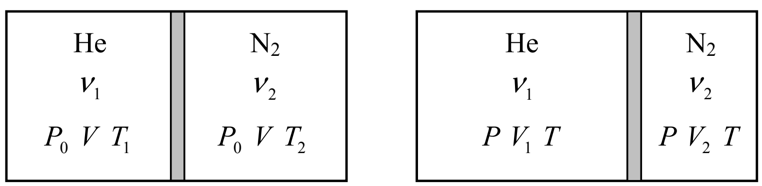
Поскольку механическая энергия поршня не меняется при переходе в конечное состояние, то

$$A_1 + A_2 = 0$$

Получаем:

$$\Delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad U = \text{const}\,,$$

то есть суммарная внутренняя энергия газов сохраняется. Этот результат можно получить по-другому, рассматривая баланс энергии для системы, состоящей из газов и поршня. Так как к системе не подводится тепло от внешних источников и система не совершает работу над другими телами, то её внутренняя энергия не меняется. Отсюда, учитывая неизменность механической энергии поршня, приходим к выводу о постоянстве суммарной внутренней энергии газов.



Пусть ν_1 и ν_2 — количества молей гелия и азота, T_1 и T_2 — их начальные температуры, V — начальный объём каждого из газов, P и T — конечные давление и температура, V_1 и V_2 — конечные объёмы. Запишем равенство значений суммарной внутренней энергии газов в начальном и конечном состояниях:

$$\frac{3}{2}\nu_1 R T_1 + \frac{5}{2}\nu_2 R T_2 = \frac{3}{2}\nu_1 R T + \frac{5}{2}\nu_2 R T$$

Перейдём от температур к давлениям и объёмам, воспользовавшись уравнением состояния:

$$P_0 V = \nu_1 R T_1\,, \quad P_0 V = \nu_2 R T_2\,, \quad P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T$$

Получаем:

$$3\,P_0 V + 5\,P_0 V = 3\,P V_1 + 5\,P V_2 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V}{3\,V_1 + 5\,V_2}$$

Выразим объёмы V_1 и V_2 через V. Из уравнения состояния имеем:

$$P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = k \quad \longrightarrow \quad V_1 = k\,V_2$$

Учитывая, что $V_1 + V_2 = 2\,V$, получаем:

$$V_1 = \frac{2\,k\,V}{k+1}\,, \quad V_2 = \frac{2\,V}{k+1} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V\,(\,k+1\,)}{2\,V\,(3\,k+5\,)} = \frac{4\,P_0\,(\,k+1\,)}{3\,k+5}$$

Подставим числовые значения:

$$P = \frac{4\cdot 0,35\cdot 4}{14} = \frac{8\cdot 0,35}{7} = 0,4 \text{ МПа}$$

Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии через температуры газов (+ 3 балла).
2. Правильно записано уравнение состояния (+ 2 балла).
3. Закон сохранения энергии переписан через давления и объёмы (+ 1 балл).
3. Найдено отношение конечных объёмов (+ 2 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ для конечного давления (+ 1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 4. Влажный воздух адиабатически поднимается от поверхности моря вверх. Давление у поверхности моря равно $P_1 = 100$ кПа, температура воздуха - 298 К. На высоте, на которой давление становится равным $P_2 = 85$ кПа, начинают образовываться облака и начинает идти дождь.1 кг влажного воздуха теряет $\Delta m = 2{,}5$ г воды в виде дождя по достижению высоты, давление на которой равно $P_3 = 70$ кПа. Удельную теплоту испарения воды принять равной $\lambda = 2500 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, считать, что на всем диапазоне высот плотность воздуха меняется линейно. Пренебречь влиянием паров воды на плотность воздуха, воздух считать идеальным двухатомным газом с плотностью $\rho_1 = 1{,}189$ кг/м^3 Найти: 1. Температуру воздуха на высоте, где начинают появляться облака. 2. Найти высоту, на которой начинают появляться облака. 3. Найти температуру на высоте, где давление равно 70 кПа. Примечание: Для адиабатического процесса верно $PV^\gamma = const$, где P - давление, V - объем. γ - показатель адиабаты. Для воздуха можно принять $\gamma = 7/5$, теплоёмкость при постоянном объёме $C_V = 5/2\,R$, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К) - универсальная газовая постоянная.

Возможное решение

1. Ответ получается путем использования уравнения для идеального газа:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

и уравнения для адиабаты:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

2. Плотность воздуха на высоте, где давление равно P_2 можно найти из уравнения Клапейрона - Менделеева:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Разность давлений $P_1 - P_2$ создается столбом воздуха высоты h. Для простоты рассмотрим цилиндра такой высоты, опирающийся на основание площадью S:

$$\frac{mg}{S} = P_1 - P_2$$

Массу можно найти, зная, что плотность меняется линейно: $m = Sh\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$

$$h = 2\frac{P_1 - P_2}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$

3. Так как воздух поднимается адиабатически, но изменением его плотности из-за присутствия водяных паров мы пренебрегаем, можно рассматривать адиабатический процесс движения воздуха и конденсацию воды как два независимых процесса, и посчитать вклад каждого из них для воздуха на высоте, где давление достигает величины P_3:

$$T = T_a + \delta T$$

$$\delta T = \frac{\delta Q}{c_p}$$

Так как процесс выпадения дождя можно считать изобарным, то

$$c_p = 3.5\frac{R}{M} = 1000\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Таким образом:

$$T = T_1 \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \frac{\lambda \delta m}{c_p}$$

Критерии

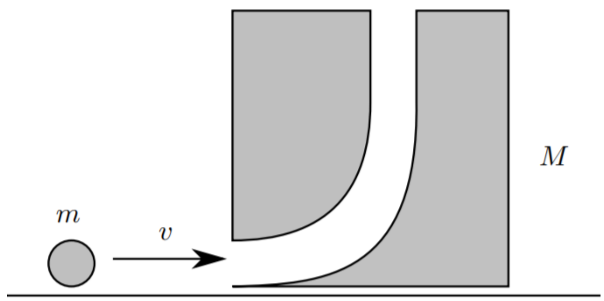
1. Найдена температура воздуха на высоте, где начинают появляться облака (+ 3 балла).

2. Найдена высота, на которой начинают появляться облака (+ 3 балла).

3. Найдена температура воздуха на высоте, где давление равно 70 кПа (+ 4 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \frac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



Возможное решение

Шар и куб будут двигаться с одной скоростью все время, пока шар будет находиться внутри куба. В силу закона сохранения импульса горизонтальная скорость куба и шара после столкновения не будет равна нулю (куб поедет) и будет определяться как

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m}$$

Теперь шар будет иметь вертикальную составляющую скорости v_2. Поскольку нет потерь на трение, мы можем использовать закон сохранения энергии для определения этой скорости. До столкновения кинетическая энергия шара равна $E_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, после столкновения куб получит энергию

$$E_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}$$

Найдём отсюда скорость v_2:

$$mv_0^2 - Mv_1^2 = m(v_1^2 + v_2^2) \to v_2 = v_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

. Время, проведенное шаром в «воздухе» можно вычислить так: $t_2 = \dfrac{2v_2}{g}$. Тогда расстояние по горизонтали, пройденное шаром в воздухе будет равно

$$x = 2v_0 \frac{m}{m+M} v_0 \frac{1}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} = \frac{2v_0^2}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}}$$

Когда шарик возвращается в полость куба, горизонтальная проекция его скорости будет направлена в обратную сторону, относительно горизонтальной составляющей скорости в момент первого попадания шара в куб (куб, в свою очередь, продолжает движение в том же направлении). Горизонтальная скорость после повторного взаимодействия шара с кубом будет определяться из закона сохранения импульса: $v_3 = v_0 \dfrac{m-M}{m+M}$. Тогда время возвращения шара в исходную позицию будет равно

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}} \frac{M+m}{M-m} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}}$$

Поскольку шар поднимается гораздо выше, чем высота куба, то временем, проведённым в кубе можно пренебречь по сравнению с временем полета шара. Тогда искомое время будет равно $t_2 + t_3$:

$$\frac{2v_0}{g}\left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right)$$

Вводя отношение масс, получаем итоговый ответ:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$$

Критерии

1. Найдена горизонтальная проекция скорости шара в момент первого столкновения с кубом (+ 1 балл).
2. Найдена вертикальная проекция скорости шара после первого вылета из куба (+ 2 балла).
3. Найдено время полета шара «в воздухе» (+ 1 балл).
4. Найдена горизонтальная проекция расстояния, пройденного шаром «в воздухе» (+ 1 балл).
5. Найдена горизонтальная проекция скорости шара после второго взаимодействия шара и куба (+ 3 балла).
6. Найдено время второго взаимодействия шара и куба (+ 1 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Примечание: в условии некоторых задач на олимпиаде были возможны опечатки, которые могли привести к иному пониманию условия задачи. Любые правильные решения оценивались в полный балл.

Задача 1. Пусть имеется пушка на поверхности земли, которая может выпускать снаряд со скоростью v_0 под любым углом к горизонту. Определите границу «простреливаемой» области: получите уравнение кривой, которая разделяет вертикальную плоскость на точки, достижимые для попадания снарядом, и на те, в которые снаряд не попадет ни в каком случае. Ускорение свободного падения равно g, сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение

Рассмотрим снаряд, выпущенный под произвольным углом α к горизонту.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Его траектория будет описываться уравнением

$$y(x) = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

Рассмотрим это уравнение относительно переменной $p = \operatorname{tg}\alpha$ и параметров (x, y).

$$p^2 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2} - p \cdot x + (y + \frac{gx^2}{2v_0^2}) = 0$$

Решением такого уравнения будет значение угла α, под которым надо выстрелить, чтобы попасть в точку с заданными координатами (x, y). Заметим, что данное уравнение является квадратным, соответственно имеются три случая:

1. уравнение имеет два корня, значит в точку можно попасть снарядом двумя способами;
2. уравнение имеет один корень, в точку можно попасть единственным способом;
3. уравнение не имеет корней, точка недостижима для попадания снарядом.

Можно заметить, эти три случая делят всю вертикальную плоскость на две искомые области. Второй случай соответствует границе «простреливаемой области». Для квадратного уравнения единственность решения равносильна равенству нулю его дискриминанта.

$$D(x, y) = x^2 + 4 \cdot \frac{gx^2}{2v_0^2}(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}) = 0$$

$$y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2} \text{ — искомое уравнение.}$$

Критерии

1. Найдена максимальная точка границы простреливаемой области по вертикали (+ 1 балл).
2. Найдена максимальная точка границы простреливаемой области по горизонтали (+ 1 балл).
3. Правильно записана система зависимостей координат от времени для траектории полета снаряда (+ 1 балл).
4. Получено уравнение траектории снаряда (+ 1 балл).
5. Правильно выполнен переход к квадратному уравнению относительно переменной p (+ 2 балла).
6. Правильно проведен анализ дискриминанта квадратного уравнения (+ 2 балла).
7. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Комментарий: если форма огибающей кривой подбирается в виде параболы без достаточного обоснования, то за в остальном верное решение — оценка 7 баллов.

Задача 2. Из тонкой проволоки согнут прямой угол, неподвижно закреплённый так, что одна из его сторон вертикальна. По сторонам угла могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2 одинаковой массы. Бусинки соединены жёстким невесомым стержнем длины $L = 0{,}75$ м. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки неподвижны, стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V, до которой разгонится бусинка 2 при движении бусинки 1 вниз. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.

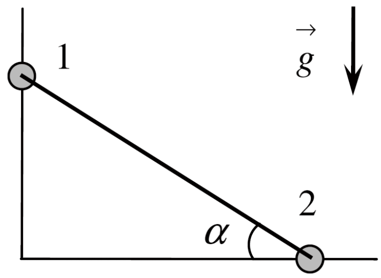


Рис. к задаче 2.

Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда стержень наклонён к горизонту под углом φ. Скорости бусинок в этом положении обозначим через V_1 и V_2. Отсчитывая высоты от вершины угла, запишем закон сохранения энергии:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mgL\sin\varphi \quad \longrightarrow \quad V_1^2 + V_2^2 = 2gL\,(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

Здесь m — масса бусинок. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают:

$$V_1\sin\varphi = V_2\cos\varphi$$

Исключая скорость V_1, находим V_2 как функцию угла φ:

$$V_1 = V_2\operatorname{ctg}\varphi \quad \longrightarrow \quad V_2^2\,(\operatorname{ctg}^2\varphi + 1) = 2gL\,(\sin\alpha - \sin\varphi) \quad \longrightarrow \quad V_2^2 = 2gL\sin^2\varphi\,(\sin\alpha - \sin\varphi)$$

Угол φ меняется на отрезке $[0, \alpha]$. На концах отрезка скорость V_2 обращается в нуль. Найдём экстремумы V_2. Приравнивая нулю первую производную по φ, получаем:

$$2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin\alpha - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin\varphi\,\cos\varphi\,(2\sin\alpha - 3\sin\varphi) = 0$$

Максимуму соответствует корень

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\alpha}{3}$$

Максимальная скорость второй бусинки равна:

$$V^2 = 2gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^2\left(\sin\alpha - \frac{2\sin\alpha}{3}\right) = gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^3$$

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}53 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}53 \text{ м/с}$$

Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии (+ 3 балла).
2. Записано условие нерастяжимости стержня (+ 2 балла).
3. Получена зависимость скорости от угла наклона (+ 2 балла).
4. Правильно найден угол наклона, при котором скорость максимальна (+ 2 балла).
5. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

Задача 3. Одноатомный идеальный газ работает по циклу $1-2-3-1$, имеющему вид равнобедренного треугольника на диаграмме $P-V$. Известно, что процесс $1-2$ лежит на прямой, проходящей через начало координат. Отношение максимального давления в цикле к минимальному $P_2/P_1 = 2$. Найдите работу, совершаемую газом за один цикл, считая известными давление и объем в точке 1. Найдите КПД тепловой машины, работающей по указанному циклу.

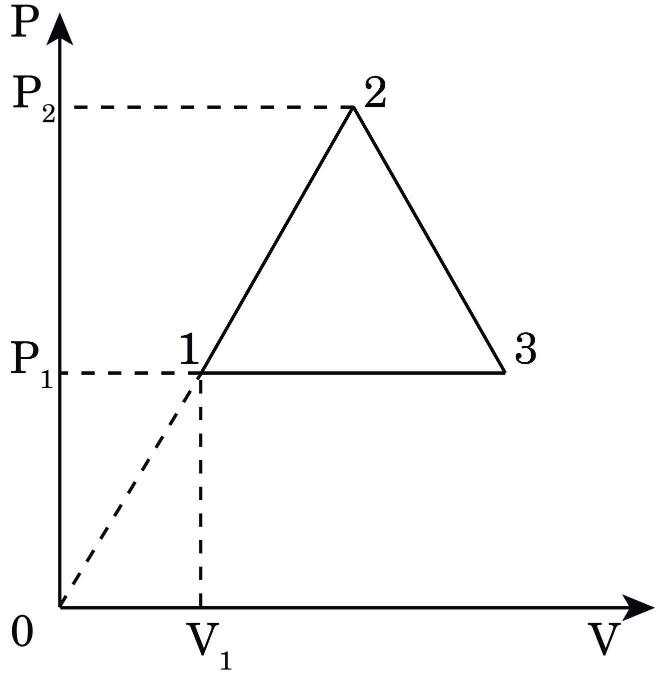
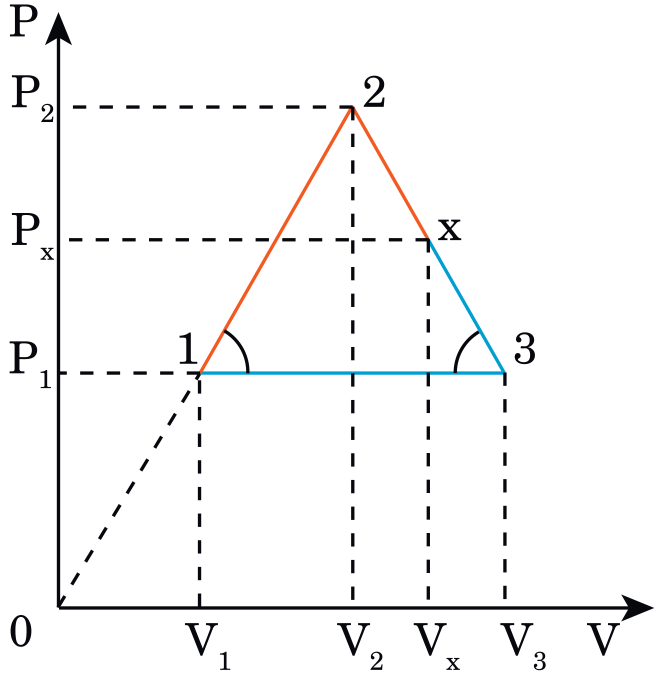


Рис. к задаче 3.



К решению задачи 3.

Возможное решение

Учитывая разную размерность осей на диаграмме $P-V$, у данного равнобедренного треугольника равными могут быть только боковые стороны. Т.к. процесс $1-2$ лежит на прямой, проходящей через начало координат, $V_2/V_1 = P_2/P_1 = 2$, откуда $V_2 = 2V_1$. Из симметрии треугольника относительно высоты, опущенной из точки 2, следует $V_3 - V_2 = V_2 - V_1 = V_1$, следовательно $V_3 = 3V_1$. Таким образом нам известны координаты всех вершин этого треугольника.

Работа вычисляется как площадь треугольника $1-2-3$:

$$A = \frac{(P_2 - P_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{(2P_1 - P_1)(3V_1 - V_1)}{2} = P_1 V_1$$

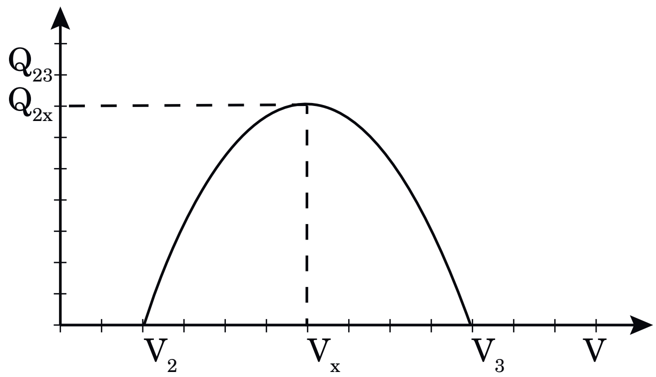
Для нахождения КПД тепловой машины, работающей по указанному циклу, необходимо найти количество подведенной теплоты. Теплота подводится в процессе $1-2$, и на некотором участке $2-x$ процесса $2-3$.

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{12} + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) = \\ = \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) = \\ = \frac{9}{2} P_1 V_1 + \frac{3}{2} P_1 V_1 = 6 P_1 V_1. \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти Q_{2x}, необходимо определить ту самую точку x, в которой перестает подводиться теплота. Это можно сделать, представив подведенную теплоту в процессе $2-x$ в виде функции от объёма $Q_{2x}(V_x)$, и найти у этой функции максимум на отрезке $V_x \in [V_2; V_3]$.

Т.к. треугольник $1-2-3$ равнобедренный, наклон процесса $1-2$ совпадает с наклоном $2-3$. Пусть $\frac{P_1}{V_1} = \alpha$, тогда $\frac{P_2 - P_x}{V_x - V_2} = \alpha$, откуда $P_x(V_x) = P_2 - \alpha(V_x - V_2) = \alpha(2V_2 - V_x)$.

$$
\begin{aligned}
Q_{2x} &= \Delta U_{2x} + A_{2x};\\
\Delta U_{2x} &= 3/2 \cdot \nu R \Delta T_{2x} = 3/2 \cdot (P_x V_x - P_2 V_2) = 3\alpha/2 \cdot (V_x(2V_2 - V_x) - V_2^2)\\
&= -3\alpha/2 \cdot (V_x - V_2)^2;\\
A_{2x} &= 1/2(P_2 + P_x)(V_x - V_2) = \alpha/2 \cdot (3V_2 - V_x)(V_x - V_2);\\
Q_{2x} &= \alpha/2 \cdot \left[(3V_2 - V_x)(V_x - V_2) - 3(V_x - V_2)^2\right] =\\
&= \alpha/2 \cdot (V_x - V_2)(3V_2 - V_x - 3V_x + 3V_2) = \alpha(V_x - V_2)(3V_2 - 2V_x).
\end{aligned}
$$



К решению задачи 3.

$Q_{2x}(V_x)$ представляет собой параболу с направленными вниз ветвями и корнями V_2 и $3/2V_2 = V_3$. Вершина параболы расположена симметрично между корнями $V_x = 5/4V_2 = 5/2V_1$. Тогда подведенное количество теплоты на участке

$$Q_{2x} = \alpha(5/2V_1 - 2V_1)(6V_1 - 5V_1) = 1/2 \cdot \alpha V_1^2 = 1/2 \cdot P_1 V_1$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12} + Q_{2x}} = \frac{P_1 V_1}{6P_1 V_1 + 1/2 \cdot P_1 V_1} = \frac{2}{13} \text{ или } \approx 15{,}4\%$$

.

Критерии

1. Найдена работа цикла (+ 1 балл).
2. Найдено количество теплоты, подведенное в процессе $1-2$ (+ 1 балл).
3. Написано уравнение прямой процесса $2-3$ (+ 1 балл).
4. Найдено положение точки x, в которой тепло перестает подводиться (+ 5 баллов).
5. Найдено количество теплоты, подведенное на участке $2-x$ (+ 1 балл).
6. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Задача 4. Штирлиц получает секретные задания от радистки Кэт по обычному радиоприёмнику, настроенному на частоту 100 МГц. Радиоприёмник содержит в себе колебательный контур, резонансная частота которого соответствует частоте радиосигнала. Для того, чтобы ловить сигнал от разных радиостанций, в колебательном контуре меняют площадь перекрытия обкладок конденсатора S, тем самым меняя его ёмкость C, а индуктивность катушки L остаётся неизменной. Известно, что катушка индуктивности имеет $N = 100$ витков, радио ловит частоту 100 МГц при $S = 100$ см^2. В один момент из-за плохой изоляции в катушке замкнулись два соседних витка. На какое значение на шкале частот Штирлицу нужно будет настроить радиоприёмник, чтобы услышать сообщение радистки Кэт? Как при этом изменится значение S?

Возможное решение

Собственная частота колебательного контура определятся по формуле Томсона $2\pi\nu = \omega = 1/\sqrt{LC}$. В данной задаче нет необходимости находить точные формулы для L и C, достаточно качественно показать зависимость от изменяемых величин. Коэффициент самоиндукции катушки можно считать пропорциональным квадрату числа витков $L \sim N^2$, а ёмкость — площади перекрытия $C \sim S$. Соответственно, частота ω зависит от N и S следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{\gamma}{\sqrt{N^2 \cdot S}} = \frac{\gamma}{N \cdot \sqrt{S}},$$

где γ — постоянный коэффициент. С точки зрения школ частот радио приёмника, номинальное значение ω зависит только от площади перекрытия, т.к. индуктивность катушки не меняется, т.е. $\omega \sim 1/\sqrt{S}$.

При замыкании двух соседних витков в катушке можно считать, что их количество уменьшается на 1: $N' = N - 1$. Теперь для того, чтобы поймать первоначальную частоту, придется изменить площадь перекрытия S, тем самым значение на шкале радиоприёмника изменится.

$$\omega = \frac{\gamma}{N \cdot \sqrt{S}} = \frac{\gamma}{N' \cdot \sqrt{S'}}$$

$$S' = S\frac{N^2}{N'^2},\ \Delta S = S' - S = S\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) \simeq \frac{2S}{N-1} \simeq 2 \text{ см}^2$$

.

Новое значение, на которое надо настроить Штирлицу шкалу радиоприёмника соответствует новой площади перекрытия S' при первоначальном(!) значении N.

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}}$$

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{S}{S'}} = \nu\frac{N'}{N} = \nu\frac{N-1}{N} = 99 \text{ МГц}$$

.

Критерии

1. Правильно записана формула Томсона для колебательного контура (+ 1 балл).
2. Показана зависимость коэффициента самоиндукции L от N (+1 балл).
3. Показана зависимость емкости конденсатора C от площади перекрытия обкладок конденсатора S (+ 1 балл).
4. Найдено число N' витков после замыкания (+ 2 балла).
5. Получено равенство частот ω и ω' (+ 2 балла).
6. Получено измененное значение перекрытия обкладок конденсатора S' (+ 1 балл).
7. Получено новое значение частоты радиоприемника ν' (+ 2 балла).

Задача 5. В тетраэдре $ABCD$ каждое ребро представляет собой последовательно соединённые резистор и ЭДС с произвольными значениями R_i и $\mathcal{E}_i$ соответственно, где i — номер ребра, например, 1 для ребра AB, 2 — для ребра BC и т.д. В ребро AB последовательно подсоединили ключ K, а в ребро CD — идеальный амперметр. При каких условиях на R_i для любых значений $\mathcal{E}_i$ замыкание и размыкание ключа K не приведут к изменениям показаний амперметра.

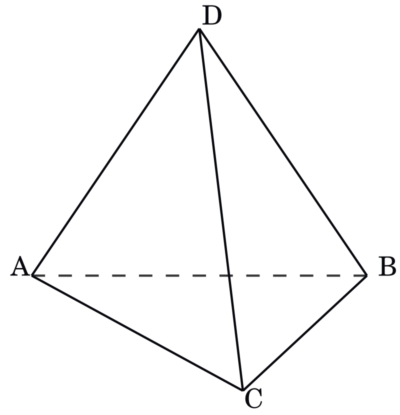
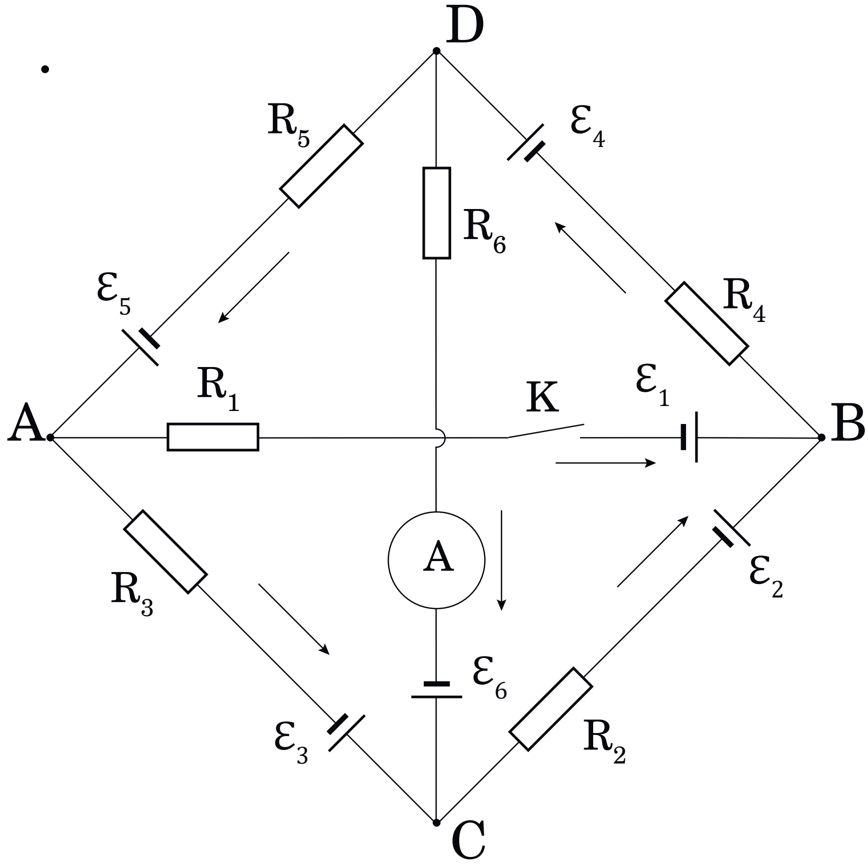


Рис. к задаче 5.

Возможное решение

Перерисуем тетраэдр в виде эквивалентной электрической схемы (Мост Уитстона) и пронумеруем элементы как показано на рисунке.



К решению задачи 5.

Запишем систему уравнений на токи и напряжения, при условии, что ключ K замкнут. Из всх возможных уравнений выберем те, которые содержат I_6, этого достаточно.

$$\begin{cases} I_3 + I_6 - I_2 = 0 & \text{узел C} \\ I_5 + I_6 - I_4 = 0 & \text{узел D} \\ I_3R_3 - I_6R_6 + I_5R_5 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_6 + \mathcal{E}_5 & \text{контур ACD} \\ I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_6 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_6 & \text{контур BCD} \end{cases}$$

При размыкании ключа K ток I_1 обратится в 0, что приведет к изменению других токов, но ток I_6 по условию должен остаться неизменным. Обозначим новые токи I_2', I_3', I_4', I_5'. Для них система уравнений будет выглядеть точно так же, просто «нештрихованные» токи заменятся «штрихованными». Сопоставив эти две системы получим:

$$\begin{cases} I_3' - I_2' = I_3 - I_2 \\ I_5' - I_4' = I_5 - I_4 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} I_3' - I_2' = I_3 - I_2 \\ I_5' - I_4' = I_5 - I_4 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \\ I_3'R_3 + I_5'R_5 = I_3R_3 + I_5R_5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} I_3' - I_3 = I_2' - I_2 \\ I_5' - I_5 = I_4' - I_4 \\ R_3(I_3' - I_3) = R_2(I_2' - I_2) \\ R_5(I_5' - I_5) = R_4(I_4' - I_4) \end{cases}$$

Откуда получаем условие:

$$\frac{R_5}{R_3} = \frac{R_4}{R_2}$$

.

Также заметим, что в задаче существует тривиальное решение. При $R_{AB} = \infty$ и любых конечных значениях остальных сопротивлений, I_1 будет всегда равен 0, вне зависимости от состояния ключа K.

Критерии

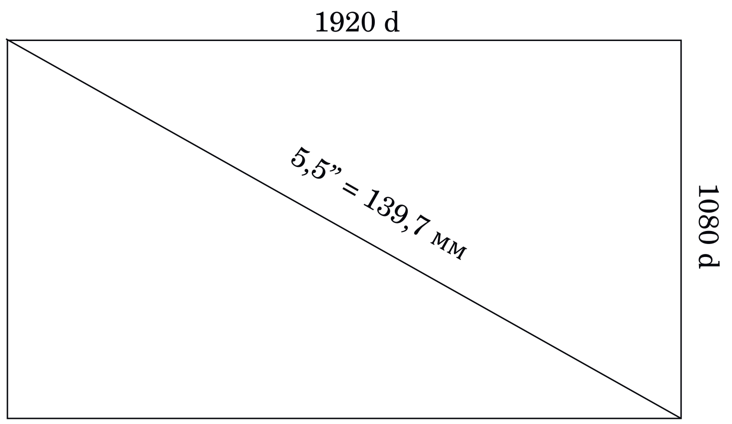
1. Правильно записаны правила Кирхгофа для замкнутой цепи (+ 2 балла).
2. Правильно записаны правила Кирхгофа для цепи после размыкания ключа (+ 2 балла).
3. Получена формула балансировки сопротивлений (+ 5 баллов)
4. Рассмотрен частный случай: сопротивление R_{AB} бесконечное, все остальные сопротивления конечные (+ 1 балл)

Комментарий:
1. Написана формула балансировки сопротивлений без вывода — оценка 3 балла.
2. При отсутствии аналитического решения рассмотрены частные случаи:
а) Все $\mathcal{E}_i$ равны 0 (+ 1 балл).
б) Сопротивление R_{AB} бесконечное, все остальные сопротивления конечные (+ 1 балл).
в) Все сопротивления R_i бесконечные (+ 1 балл).

Задача 6. Экран современного мобильного телефона может служить отражательной дифракционной решеткой. Если посмотреть на изображение удаленного точечного источника света, отраженное от выключенного экрана телефона, можно увидеть дифракционную картину (попробуйте провести данный опыт по окончании олимпиады). Возьмем технические характеристики одной популярной модели: диагональ экрана $D = 5{,}5$ дюймов, разрешение 1920 на 1080 пикселей. Определите период дифракционной решетки, соответствующей данному экрану, считая, что пиксели имеют квадратную форму. Определите угловое расстояние между максимумами первого порядка для красного света (длина волны $\lambda_1 = 650$ нм) и синего ($\lambda_2 = 450$ нм). Угол отсчитывается от нормали к поверхности экрана.

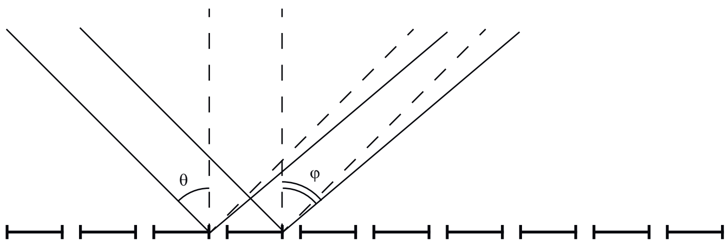
Возможное решение

Сначала определим период дифракционной решетки, решив простую геометрическую задачу, предварительно переведя диагональ экрана в мм: $c = 5{,}5'' = 139{,}7$ мм.



$$\frac{a}{b} = \frac{1920}{1080} = \frac{16}{9} \to 1080d = \frac{9}{\sqrt{9^2+16^2}}c \to d \approx 0{,}088 \text{ мм}$$

Пусть свет падает под углом θ к нормали экрана. Центральный максимум будет отражаться под углом θ, а максимумы высших порядков под углами ϕ_1 и ϕ_2.



Запишем условие дифракционных максимумов, определив из рисунка соответствующую разность хода.

$$\begin{cases} d(\sin\phi_1 - \sin\theta) = m\lambda_1 \\ d(\sin\phi_2 - \sin\theta) = m\lambda_2 \end{cases}$$

Для максимумов первого порядка $m = 1$. Учтем, что $\phi_i - \theta << 1$, $\phi_1 + \phi_2 \approx 2\theta$, и воспользуемся приближением малых углов $\sin x \approx x$.

$$2d\sin\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2} = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\Delta\phi \approx \frac{\lambda_1-\lambda_2}{d\cos\theta}$$

Значение $\cos\theta \in [0;1]$, где 0 соответствует скользящему падению лучей, а 1 — нормальному. При комфортном наблюдении данной дифракционной картины можно считать $\cos\theta \in [\sim 0.5; 1]$. Итоговое значение $6{,}8 \cdot 10^{-3}$ рад $\geq \Delta\phi \geq 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ рад. Ограничение «сверху» в данной задаче имеет исключительно оценочный характер.

Критерии

1. Правильно найден период дифракционной решетки (+ 2 балла).
2. Правильно записано условие нахождения дифракционных максимумов 1 порядка (+ 2 балла).
3. Правильно получена формула для углового расстояния (+ 4 балла).
4. Получен правильный численный ответ (+ 2 балла).

Комментарий:
1. Не записан порядок максимумов $m = 1$ оценка снижается на 1 балл.
2. Записанная без каких-либо пояснений формула для дифракционной решетки не оценивается.
3. Решение частного случая задачи падения света на экран при $\theta = 0^\circ$ принималось как полное решение задачи.
4. Решение задачи, в котором угловое расстояние находилось между 1 и -1 максимумами для красного и синего света принималось как полное решение задачи.